数理解析研究所講究録
第267巻 1976年 93-101

全微分方程式の特異点

神戸大 理　髙野恭一

§1 序

M を n dim. complex manifold, $V(\subset M)$ を codim. 1 の nonsingular とは限らない variety とする。$M-V$ 上で一価正則で V 上には高々極をもつ関数を係数とする完全積分可能な線形微分方程式を考える。この方程式が Fuchs 型であるというのは、任意の解が V 上に高々確定特異点をもつことと定義する。ここで、$M-V$ 上で多価正則な関数が V 上に高々確定特異点をもつとは、f が V の任意の nonsingular な点の近傍で確定特異であることである。頭においているのは、$M=\mathbb{P}^n$, $V=\{$hyperplane$\}$ で方程式は1個の未知関数に関するもの（単独型ということにする）である。

先ずやらねばならないことは、局所理論をきちんと作ることである。以下局所理論に関するいくつかの結果を述べる。単独型方程式は連立全微分方程式になおせるから局所理論の一部は連立方程式において展開する。

§2 確定、不確定の判定

local theory をはじめるにあたり、特異点集合 V においてすべての解が確定かどうかを判定する手段があることをいっておいた方が気持がよい。常微分方程式における、'Fuchsの定理' に相当するものを得たいのであるがまだ成功していない。この節の話は<u>連立</u>全微分方程式に関するものであるのであまり役に立たない。次の方程式を考える。記号の都合で $n+1$ 次元にしておく。

(1) $$dX = \left(\sum_{i=1}^{n+1} P_i(x, x_{n+1})\,dx_i\right)X$$

X : unknown $m\times m$ matrix, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$

$P_i(x,x_{n+1})$: $m\times m$ matrix, 成分は $|x_1|,\cdots,|x_n|<r$, <u>$0<|x_{n+1}|<r$</u> で hol. <u>$x_{n+1}=0$ に pole</u> をもつ.

(1)の解を原点の近傍で構成する方法を与え、同時に $x_{n+1}=0$ が確定特異点かどうかを判定するアルゴリズムを与える。

この目的のために次の system を考える。その parameter に関する正則性についての定理を与える。

(2) $$dX = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i(x,\lambda)\,dx_i\right)X$$

$x=(x_1,\cdots,x_n)$, <u>λ : parameter</u>

$$P_i(x,\lambda) = \sum_{k\geq e_i} P_{ik}(\lambda)\,x^{k-e_i}, \quad e_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{\check{1}},0,\cdots,0)$$

$P_i(x,\lambda)$: hol. in $D_x(r)\times E_\lambda$ 、ここで

$D_x(r)=\{x\in\mathbb{C}^n \mid , |x_i|<r,\ i=1,\cdots n\}$, E_λ は

simply connected とはかぎらない $\mathbb{C}$ のある domain.

(2)の積分可能条件は

(3) $$k_j P_{i,k}(\lambda)-k_i P_{j,k}(\lambda)+\sum_{\substack{k'+k''=k\\ k'\geq e_i,\ k''\geq e_j}}[P_{ik'}(\lambda),P_{jk''}(\lambda)]=0$$

for any $k=(k_1,\cdots,k_n)$, i,j.

であることが確められる。ここで $[A,B]\underset{\mathrm{def}}{=\!=}AB-BA$.

次の形式解の存在定理がえられる。

定理1 (2)は次の形の形式的巾級数解をもつ.

(4) $$X=I+\sum_{k>0}U_k(\lambda)x^k.$$

ここで $U_k(\lambda)$ は次の recursion formula によってきまる

(5) $$k_i U_k(\lambda)=P_{ik}(\lambda)+\sum_{e_i\leq l<k}P_{il}(\lambda)U_{k-l}(\lambda)\ ,\quad i=1,\cdots n$$

従って $U_k(\lambda)$ は E_λ で hol.

注意：(5)においてみられるように $U_k(\lambda)$ は n 個の関係式を同時に満たすようにきめられねばならない。これを保証するのが積分可能条件(3)である。

Formal sol. (4)の解析性は優級数の方法で示せる。

<u>定理2 (2)の形式解(4)は、$D_x(r)\times E_\lambda$ の任意のcompact set上で一様絶対収束する。従ってそれは $D_x(r)\times E_\lambda$ で hol. な(2)の解を表わす。</u>

次の事実に注意しておく。

<u>Prop. 1 (2)の解を $X(x,\lambda)$ とし $\det X(x,\lambda)=\Delta(x,\lambda)$ とすると</u>

$$\Delta(x,\lambda)=\Delta(x_0,\lambda)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}\,P_i(\xi,\lambda)d\xi_i\right)$$

本題の方程式(1)にもどる。次の方程式を考える。

(6) $$dU=\left(\sum_{i=1}^{n}P_i(x,x_{n+1})dx_i\right)U.$$

ここで x_{n+1} を parameter と考える。(6)は明らかに積分可能な方程式であるので、定理1, 2 より、

(7) $$U(x,x_{n+1})=I+\sum_{k>0}U_k(x_{n+1})x^k$$

なる形の収束解をもつ。ここで $U_k(x_{n+1})$ は recursion formula によって四則演算によってきめられ、$0<|x_{n+1}|<r$ で hol. $x_{n+1}=0$ は pole である。

$\det U(0,x_{n+1})=1\neq 0$ であるから prop. 1 により

$\det U(x,x_{n+1})\neq 0$ for $\forall\ |x_1|,\cdots|x_n|<r, 0<|x_{n+1}|<r$ である。

この $U(x,x_{n+1})$ を用いて(1)を

$$X=U(x,x_{n+1})Y$$

で変換すると、Uが(6)の解であるのでYに関する方程式は

x_{n+1}に関する常微分方程式

$$\frac{dY}{dx_{n+1}} = U(x, x_{n+1})^{-1} P_{n+1}(x, x_{n+1}) U(x, x_{n+1}) Y$$

となる。さらに右辺の係数はxに関して independent であることが確められるので特に$x=0$とおいて

(8) $$\frac{dY}{dx_{n+1}} = P_{n+1}(0, x_{n+1}) Y .$$

(8)はx_{n+1}に関する常微分方程式であり、$P_{n+1}(0, x_{n+1})$は$x_{n+1}=0$に一般にpoleをもっているが、解の構成方法が知られている。

こうして(1)の解を$(x, x_{n+1}) = (0, 0)$の近傍で構成することができた。さらに、巾級数(7)の係数$U_k(x_{n+1})$の$x_{n+1}=0$における poleの位数をd_kとするとこの節の目的である次の定理が与えられる。

定理3　$x_{n+1}=0$が(1)の確定特異点

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \sup_k d_k < \infty \\ \text{かつ常微分方程式(8)において } x_{n+1}=0 \text{ が確定特異点.} \end{cases}$

この証明は簡単である。

こうして、Vの nonsingular point の近傍で解を構成す

ることができたので、local theory の次は、Vの singular point の近傍で解をどう表現するかということである。

§3 Normal crossing の場合

Vの singular point の中でたちのよい normal crossing の場合を考える。確定特異点型の最も典型的でよくあらわれるものとして

$$(9) \qquad dX = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i(x) \frac{dx_i}{x_i}\right) X \quad , \quad P_i(x) : \text{hol. at } x=0$$

がある。これについては既に当研究所において吉田正章氏(神戸大)が報告しているので、結果だけ述べると、

(9)の基本解は

$$X = U(x)\, x_1^{L_1} \cdots x_n^{L_n}\, x_1^{B_1} \cdots x_n^{B_n}$$

の形で構成できる。L_i は整数を要素とする対角行列、B_i は定数行列であり、L_i, B_i は有限回の代数的演算で計算できる。

(9)は確定特異点型として代表的なものであるが、不確定特異点型の場合については別の機会に報告する。

§4. normal crossing でない場合

normal crossing でない場合その点の近傍で解を構成することは一般に接続問題を解くことと同じである。この節で

はこの接続問題が常微分方程式の接続問題に帰着されることを示す。後者も一般には解けていないので結局何も解けたことにならない。簡単のため $n=2$ で述べる。

原点の近傍で V は r コ ($r \geq n+1=3$) の irreducible components (各 component は直線とする) をもつとしよう。それを

$$l_i = a_i x - b_i y \qquad i=1,\cdots,r$$

とする。$b_i \neq 0$ ($i=1,\cdots,r$) として一般性を失わない。

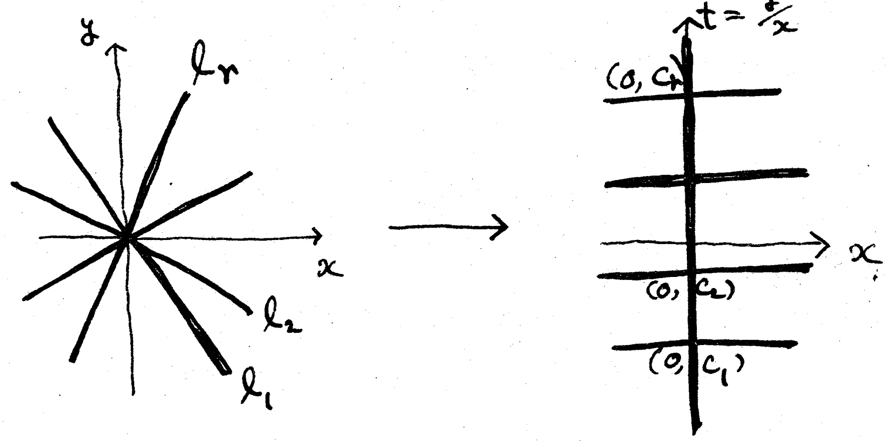
次の方程式を考える。

$$(10) \qquad dX = \left(\sum_{i=1}^{r} P_i(x,y) \frac{dl_i}{l_i} \right) X \, ,$$

原点で blow up する。i.e. $t = y/x$ とすると

$$(11) \qquad dX = \left(S(x,xt) \frac{dx}{x} + \sum_{i=1}^{r} P_i(x,xt) \frac{dt}{t-c_i} \right) X$$

ここで $S(x,xt) = \sum_{i=1}^{r} P_i(x,xt)$, $c_i = a_i/b_i$.



$(x, t) = (0, c_i)$ の近傍において(11)の基本解を構成できることは§3で示した。従って各$(0, c_i)$の近傍での基本解の接続ができれば、$(x, y) = 0$ の近傍における(10)の解が得られることになる。

$$S(0,0) = S_0, \quad P_i(0,0) = P_{i,0} \qquad i=1, \dots n$$

とすると、$[S_0, P_{i,0}] = 0$ $(i=1, \cdots n)$ はすぐわかる。簡単のため S_0 の固有値の差は整数でないとしておこう。次の方程式

(12) $$\frac{dU}{dx} = \frac{S(x, xt)}{x} U \qquad t \text{ は parameter}$$

を考える。$S(x, xt)\big|_{x=0} = S_0$ に注意すると、(12)は

(13) $$U(x,t) = V(x,t)\, x^{S_0}$$
$$V(x,t) = I + \sum_{k>0} V_k(t)\, x^k$$

なる形の解をもつ。この$U(x,t)$を用いて、

(14) $$X = U(x,t)\, Y$$

なる変換をすると、Yに関する方程式は、

$$\frac{dY}{dt} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t-c_i} x^{-S_0} V(x,t)^{-1} P_i(x, xt) V(x,t) x^{S_0}$$
$$- x^{-S_0} V(x,t)^{-1} V_t(x,t) x^{S_0} \Big) Y$$

となる。右辺の係数は x に independent であることが確められるので、Yに関する方程式は

$$\frac{dY}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{P_{i,0}}{t-c_i} dt \right) Y \tag{15}$$

であることがわかる。$P_{i,0}$ が定数行列であることに注意.

こうして、$(x,y)=(0,0)$ の近傍における(10)の解は

$$X = V(x,t)\, x^{s_0}\, Y(t)$$

としてもとめられることがわかった。i.e. 非常に簡単な常微分方程式(15)を解けばよい。残念ながら(15)の大域解は一般にはもとめられないが、normal crossing でない場合のむつかしさは、(15)の大域解をもとめることのむつかしさにあるということがわかった訳である。

References

T. Kimura: Hypergeometric functions of two variables, Seminar Note, 1973.

Lappo-Danilevsky, Mémoire sur la théorie des systèms des équations differentielle linéare, Chelsea Publ. Co. 1953

M. Yoshida, K. Takano, Local theory of Fuchsian systems I, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 219-223