

## 微分方程式の解の漸近展開 の誤差について

東工大 理 西本敏彦

§1 まえがき. 微分方程式の漸近理論において解の漸近展開の誤差の評価は応用上特に重要である. 普通, 漸近理論は形式解の構成とそれの解析的意味を求めることから成るがこのとき自然に誤差の *upper bound* をみちびかれる. ところが, この誤差評価は注意深くできるだけ小さくなるようにやらないと大きくなりすぎて現実的でなくなってしまう. このような観点から, F. W. J. Olver は主に二階常微分方程式で定義されるいくつかの特殊関数, 特異点又は変り点の近傍での解の漸近展開とそれらの実用的な誤差評価を与えた.

(1) F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*.

(1974) Academic Press.

特に *simple turning point* を含む二階微分方程式に關しては *W-K-B approximation* 及び接続公式 (*lateral*) とそれらの誤差評価:

- (2) F.W.J. Olver, Error analysis of Phase integral methods I  
 J. Res. Nat. Bur. Standards B 69(4) (1965) 291-300

又 simple turning point の近傍での一標漸近展開とその誤差:

- (3) F.W.J. Olver, Error bounds for asymptotic expansion in  
 turning point problem. J. Soc. Indust. App. Math 12(1964)  
 200-214.

2つの simple turning points をもつ場合の一標漸近展開とその  
 誤差評価:

- (4) F.W.J. Olver, Second order linear diff. equations with two  
 turning points. Phil. Trans. Roy. Soc. of London, A. 278  
 (1975) 137-185.

さて turning point problem において, turning point の  
 order が高いとき, 微分方程式の階数が高いとき, 或いは  
 system の場合には一般に一標漸近展開は不可能でありこのよ  
 うな場合には matching method が有効である。ところがこの方  
 法による漸近展開と接続公式, 及びそれらの error analysis に  
 ついては未だ試みられていないように思う。そこで筆者の目  
 的の1つは "Matching method とその Error analysis" という  
 ことである。

次に Orr-Sommerfeld equation について考えてみよう。  
 これは粘性流体の平行流の安定性の問題において基本的な方

程式であり四階の微分方程式である。これについて Olver の理論 (2) (3) (4) と同様のことを考察することは興味あることであるがここではむしろ, "Orr-Sommerfeld equation に対する Matching method とその Error analysis" について試みてみようと思う。これは最近, Eagles や Reid らによって全く形式的に Matching method を用いて Orr-Sommerfeld equation の simple turning point の近傍における形式解を求めかつこれを用いて stability problem をとり扱っていることから意味あることと思う。

- (5) P. M. Eagles, Composite series in the Orr-Sommerfeld problem for symmetric channel flow. *Q. Jour. Mech and Appl. Math.* 22 (1969) 129-182
- (6) W. D. Lakin and W. H. Reid, Stokes multipliers for the Orr-Sommerfeld equation. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A.* 268 (1970) 325-349
- (7) W. H. Reid, Composite Approximations to the Solutions of the Orr-Sommerfeld Equation, *Studies in Appl. Math.* 51 (1972) 341-368.

§2 において Hankel function の漸近展開の誤差の評価をみることにより誤差のもつ一般的な性質をのべ §3 において Orr-Sommerfeld equation について考える。

## §2 Hankel 関数の誤差評価

Order  $\nu$  の Hankel 関数  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$  は Bessel equation

$$(2.1) \quad \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = 0$$

の解であり  $|z| \rightarrow \infty$  のとき次の漸近展開をもつ:

$$(2.2) \quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\zeta} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} i^s \frac{A_s(\nu)}{z^s} + \eta_{n1} \right\} & -\pi + \delta \leq \text{ph} z \leq 2\pi - \delta \\ H_\nu^{(2)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\zeta} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} (-i)^s \frac{A_s(\nu)}{z^s} + \eta_{n2} \right\} & -2\pi + \delta \leq \text{ph} z \leq \pi - \delta \end{cases}$$

但し  $\zeta = z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi$

$$A_s(\nu) = \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 3^2) \cdots (4\nu^2 - (2s-1)^2)}{8^s s!}$$

Error term  $\eta_{n1}(z)$ ,  $\eta_{n2}(z)$  の upper bound は (1) によれば

$$(2.3) \quad \begin{cases} |\eta_{n1}(z)| \leq 2 |A_n(\nu)| \gamma_{z+i\infty}(t^{-n}) \exp\left\{|\nu^2 - \frac{1}{4}|\gamma_{z+i\infty}(t^{-1})\right\} \\ |\eta_{n2}(z)| \leq 2 |A_n(\nu)| \gamma_{z-i\infty}(t^{-n}) \exp\left\{|\nu^2 - \frac{1}{4}|\gamma_{z-i\infty}(t^{-1})\right\} \end{cases}$$

但し  $\gamma_{z \pm i\infty}(t^{-a}) \equiv a \int_z^{\pm i\infty} \left| \frac{dt}{t^{a+1}} \right|$ .

積分路は  $\text{Im} t$  が単調に  $\infty$  から  $\pm i\infty$  に向って減少するように、かつ  $\gamma_{z, \pm i\infty}$  の値がなるべく小さくなるように選ぶ。その結果は、

$$(2.4) \quad \mathcal{Y}_{z \infty}(t^{-n}) \cong \begin{cases} |z|^{-n} & 0 \leq \text{ph} z \leq \pi \\ \chi(n) |z|^{-n} & -\frac{1}{2}\pi \leq \text{ph} z \leq 0 \text{ or } \pi \leq \text{ph} z \leq \frac{3}{2}\pi \\ 2\chi(n) |\text{Im} z|^{-n} & -\pi < \text{ph} z \leq -\frac{1}{2}\pi \text{ or } \frac{3}{2}\pi \leq \text{ph} z < 2\pi \end{cases}$$

上式から  $H_\nu^{(1)}(z)$  の漸近展開の誤差は、展開の成り立つ範囲の境界  $\arg z = -\pi, 2\pi$  に近づくにつれ大きくなる可能性がある。境界の近くでの  $H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)$  のもっと精度のよい漸近展開は接続公式によって得られる、即ち

$$H_\nu^{(1)}(z) = -H_\nu^{(1)}(ze^{-2\pi i}) + 2\cos(\nu\pi) H_\nu^{(1)}(ze^{-\pi i})$$

から

$$(2.5) \quad H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\zeta} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} i^s \frac{A_s(\nu)}{z^s} + \eta_{n1}(ze^{-2\pi i}) \right\} \\ + (1 + e^{-2\nu\pi i}) \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\zeta} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} (-i)^s \frac{A_s(\nu)}{z^s} + \eta_{n1}(ze^{-\pi i}) \right\} \\ (\pi < \text{ph} z < 3\pi)$$

従って  $H_\nu^{(1)}(z)$  は  $\pi < \text{ph} z < 2\pi$  において2つの漸近的表現が得られたのであるが漸近的には等しい。ところが *error bound* をみてみると  $\frac{3}{2}\pi < \text{ph} z < 2\pi$  においては

$$|\eta_{n1}(ze^{-2\pi i})| \leq \chi(n) |z|^{-n}, \quad |\eta_{n2}(ze^{-\pi i})| \leq |z|^{-n}$$

となり (2.4) と比べることにより (2.5) のほうが誤差の評価が小さいことが分る。漸近展開 (2.5) のオ2項は  $\frac{3}{2}\pi < \text{ph} z < 2\pi$  において *exponentially small* である。Poincaré の意味による漸近展開においては *exp. small term* は省略され、常微分方程式の不確定特異点や変り点の近傍における漸近展開の理

論においても普通このようにとり扱われているが、誤差のことを考慮に入れると漸近展開の成り立つ範囲の境界においては、exp. small term も残しておいた方がよい近似を与えるように思われる。以上のことから一般に精度のよい漸近展開を得るためには (i) 適当な形式解とそのなるべく正確な誤差の評価を行うこと、(ii) 接続公式 (central and lateral) を求めること、に帰着される。

Orn-Sommerfeld equation に対して、W.H. Reid らは (6), (7) において simple turning point の近傍における解を、2階方程式の類推により exp. small term を含む形の漸近展開で与えている。これらの適切性は error analysis を行うことにより証明されるべきであるが一般 reasonable のように思われる。

§3. Orn-Sommerfeld equation について。

$$(3.1) \quad \frac{1}{dR} \{ \phi^{(4)} - 2\alpha^2 \phi^{(2)} + \alpha^4 \phi \} = i \{ (w(x) - c) [\phi^{(2)} - \alpha^2 \phi] - w''(x) \phi \}$$

又は  $(\alpha R)^{-1} = \varepsilon^2$  とおいて

$$\varepsilon^2 \phi^{(4)} - \{ i(w(x) - c) + 2\alpha^2 \varepsilon^2 \} \phi^{(2)} + \{ \alpha^2 i(w(x) - c) + i w''(x) + \alpha^4 \varepsilon^2 \} \phi = 0$$

上の方程式を system に直して

$$(3.2) \quad \varepsilon \frac{dY}{dx} = P(\alpha, \varepsilon) Y, \quad Y = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \\ \phi^{(2)} \\ \varepsilon \phi^{(3)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

$$P(\alpha, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ g(\alpha, \varepsilon) & 0 & p(\alpha, \varepsilon) & 0 \end{bmatrix}$$

但し

$$p(\alpha, \varepsilon) = i \{ w(\alpha) - c \} + 2d^2 \varepsilon^2$$

$$g(\alpha, \varepsilon) = -i \{ d^2 (w(\alpha) - c) + w''(\alpha) \} - d^4 \varepsilon^2$$

いつものように (3.2) を Block diagonalization を行う:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \sqrt{p_0(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E + \varepsilon QR & \varepsilon Q \\ R & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} W$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2} p_0} \varepsilon^2 & -\frac{1}{\sqrt{2} p_0} \varepsilon^2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2} p_0} \varepsilon & \frac{1}{\sqrt{2} p_0} \varepsilon \\ -\frac{g_0}{p_0} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p_0}{2}} & \sqrt{\frac{p_0}{2}} \end{bmatrix} W$$

但し  $p_0(x) = i(w(x) - c)$ ,  $g_0(x) = -i \{ d^2 (w(x) - c) + w''(x) \}$

$E$  は 2-2 単位行列  $Q, R, S$  は次のような 2-2 行列である

:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_0} \varepsilon & 0 \\ \frac{p_0'}{p_0^2} \varepsilon & \frac{1}{\sqrt{p_0}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -\frac{q_0}{p_0} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{p_0}} \left(\frac{q_0}{p_0}\right)' \varepsilon & \frac{1}{\sqrt{p_0}} \frac{q_0}{p_0} \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon s(x) - \varepsilon^2 s^2(x) & -1 + \varepsilon s(x) \\ 1 - \varepsilon s(x) - \varepsilon^2 s^2(x) & 1 + \varepsilon s(x) \end{bmatrix}, \quad s(x) = \frac{p_0'}{8p_0\sqrt{p_0}}$$

このとき

$$(3.3) \quad \varepsilon \frac{dW}{dx} = \begin{bmatrix} A(x, \varepsilon) & B(x, \varepsilon) \\ C(x, \varepsilon) & D(x, \varepsilon) \end{bmatrix} W \quad A, B, C, D \text{ は } 2 \times 2 \text{ matrix.}$$

$$\text{但し} \quad A(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q_0}{p_0} & 0 \end{bmatrix} \varepsilon + A_R(x, \varepsilon), \quad B(x, \varepsilon) = B_R(x, \varepsilon),$$

$$C(x, \varepsilon) = C_R(x, \varepsilon), \quad D(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \sqrt{p_0} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p_0} \end{bmatrix} - \frac{p_0'}{4p_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon + D_R(x, \varepsilon).$$

ここで  $A_R = O(\varepsilon^3)$ ,  $B_R = O(\varepsilon^3)$ ,  $C_R = O(\varepsilon^2)$ ,  $D_R = O(\varepsilon^2)$ .

$U_0$  を 2 階方程式

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{q_0}{p_0} u = 0$$

の基本系とする。  $x=a$  を  $p_0(x)=0$  の単根とする (simple turning point) とその近傍では

$$U_0 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} u_{11} &= (x-a) P_1(x-a), & u_{21} &= u_{11}' \\ u_{12} &= P_2(x-a) - \frac{q_0(a)}{p_0'(a)} u_{11} \log(x-a), & u_{22} &= u_{12}' \end{aligned}$$

で与えられる。又  $V_0(x, \varepsilon)$  を



$$V_0(x, \varepsilon) = p_0(x)^{-\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} e^{\xi(x, \varepsilon)} & 0 \\ 0 & e^{-\xi(x, \varepsilon)} \end{bmatrix}, \quad \xi(x, \varepsilon) = \int \frac{\sqrt{P_0(x)}}{\varepsilon} dx$$

とすると  $W_0 = \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & V_0 \end{bmatrix}$  は方程式

$$\varepsilon W' = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\frac{q_0}{p_0} \varepsilon & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \sqrt{p_0} - \frac{p_0'}{4p_0} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\sqrt{p_0} - \frac{p_0'}{4p_0} \varepsilon \end{pmatrix} \end{bmatrix} W$$

の基本系である。  $W_0$  を方程式 (3.3) の近似解と考え誤差について考える。

$$(3.4) \quad W = W_0 + \tilde{W} = \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & V_0 \end{bmatrix} \{E + W_R\} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & V_0 \end{bmatrix}$$

とおいて  $W_R$  を誤差関数と呼ぶことにしよう。(3.4) を (3.3) に代入して

$$W_R = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

に関する積分方程式をみちびくと

$$(3.5) \quad \begin{cases} \varepsilon W_{11}(x) = \int^x U_0^{-1}(\tau) \{A_R U_0(\tau) + A_R U_0(\tau) W_{11}(\tau) + B_R W_{21}(\tau)\} d\tau \\ \varepsilon W_{21}(x) = \int^x V_0(x, \varepsilon) V_0(\tau, \varepsilon)^{-1} \{C_R U_0(\tau) + C_R U_0(\tau) W_{11}(\tau) + D_R W_{21}(\tau)\} d\tau \end{cases}$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} \varepsilon W_{12}(x) = \int^x U_0^{-1}(\tau) \{A_R U_0(\tau) W_{12}(\tau) + B_R + B_R W_{22}(\tau)\} V_0(\tau, \varepsilon) V_0^{-1}(x, \varepsilon) d\tau \\ \varepsilon W_{22}(x) = \int^x V_0(x, \varepsilon) V_0(\tau, \varepsilon)^{-1} \{C_R U_0(\tau) W_{12}(\tau) + D_R + D_R W_{22}(\tau)\} V_0(\tau, \varepsilon) V_0^{-1}(x, \varepsilon) d\tau \end{cases}$$

となるがこの解の評価が問題である。

(3.5) と (3.6) は逐次近似法によってとかれる。

考える領域は complex  $x$  の適当な admissible region  $D = D(x, a, \varepsilon)$  の内部には turning point を含まず,  $D$  内の各点  $x$  から定数  $a_1, a_2$  を  $D$  内でつなぐ piecewise smooth な曲線  $C_1(a_1, x)$  と  $C_2(a_2, x)$  がとれ,  $\operatorname{Re} \xi(x, \varepsilon)$  は  $C_1(a_1, x)$  にそって単調非増加,  $C_2(a_2, x)$  にそって単調非減少となるものがとれる。

今行列  $G = (g_{ij})$  に対し

$$\|G\| \equiv \max_{i,j} |g_{ij}|$$

とし

$$\max \left\{ \|U_0^{-1}(\tau) A_R(\tau, \varepsilon) \varepsilon^{-1} U_0(\tau)\|, \|U_0^{-1}(\tau) B_R(\tau, \varepsilon) \varepsilon^{-1}\| \right\} \equiv g(\tau)$$

$$\max \left\{ \|C_R(\tau, \varepsilon) \varepsilon^{-1} U_0(\tau)\|, \|D_R(\tau, \varepsilon) \varepsilon^{-1}\| \right\} \equiv h(\tau)$$

とおく。又

$$W_R = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \equiv (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4),$$

と  $W_R$  の縦ベクトルを  $u_1, u_2, u_3$  及び  $u_4$  とかく。

$$\text{定理 1. } \|u_1(x)\|, \|u_2(x)\| \leq 2 \left[ \exp \left\{ \int_{C_1(a_1, x) + C_2(a_2, x)} \frac{g+h}{2} |d\tau| \right\} - 1 \right],$$

$$\|u_3(x)\| \leq \left[ \exp \left\{ \int_{C_1(a_1, x)} (g+h) |d\tau| \right\} - 1 \right],$$

$$\|u_4(x)\| \leq \left[ \exp \left\{ \int_{C_2(a_2, x)} (g+h) |d\tau| \right\} - 1 \right].$$

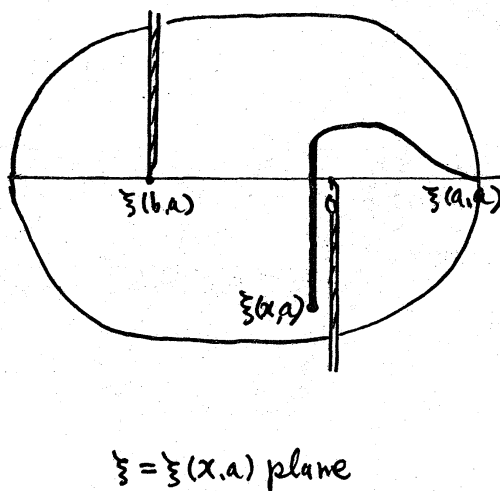
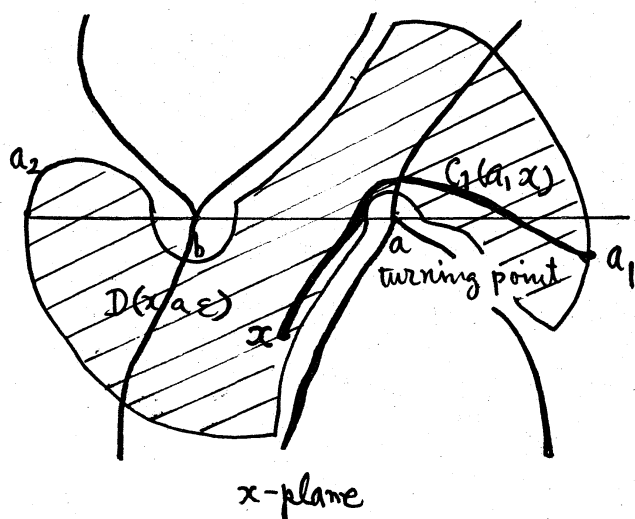
この定理から直ちに  $A_R, B_R, C_R, D_R = O(\varepsilon^2)$  であるから  $g(x), h(x) = O(\varepsilon)$ . 故に

$$\|W_R\| = O(\varepsilon).$$

又 turning point (simple)  $x=a$  の近傍においては,  $A_R, B_R, C_R, D_R$  の pole の order を数えよと maximum  $7/2$  となることから

$$\|W_R\| = O\{|x-a|^{-5/2} \varepsilon\}$$

が分る. 次に Stokes curve  $\operatorname{Re} \xi(x,a) = 0$  の近傍の真における  $W_R$  の評価をしてみるとこれは不確定特異点の場合と同様に  $x$  が Stokes curve に近づくにつれ  $\|W_R\|$  は大きくなること分る.



例えば  $x$  が図のような位置にあると, 積分路  $C_1(a,x)$  は  $x$  から  $\operatorname{Re} \xi(\tau,a) = \operatorname{Re} \xi(x,a)$  に沿って turning point  $a$  をまわり  $a_1$  に向かうものである. これは  $\xi$ -plane で描けば右図のようになる.

積分を  $x=a$  の近傍と他の部分に分ける.  $K_i$  を適当な正の常数とする.  $x=a$  の適当な近傍において,

$$g+h \leq K_1 |p_0(x)|^{-7/2} \varepsilon, \quad |d\xi| = |\sqrt{p_0(x)} dx|,$$

$$K_2 |\xi(xa)|^{2/3} \leq |p_0(x)| \leq K_3 |\xi(xa)|^{2/3}.$$

$x=a$  の近傍の部分は  $\xi$ -平面において虚軸に平行な直線  $\operatorname{Re} \xi(\tau, a) = \operatorname{Re} \xi(xa)$  に直して評価してやると

$$\begin{aligned} \int_{G(x, \varepsilon)} (g+h) |d\tau| &\leq K_4 \varepsilon + K_5 \varepsilon \int_{\xi_1}^{\xi_2} |\xi|^{-8/3} |d\xi| \leq K_4 \varepsilon + K_5 \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(\operatorname{Re} \xi(xa)^2 + \tau^2)^{8/6}} \\ &\leq K_4 \varepsilon + K_6 \varepsilon [\operatorname{Re} \xi(xa)]^{-5/3}. \end{aligned}$$

$\rho(x, \xi)$  を  $x$  から Stokes curve  $\xi(xa) = 0$  までの距離とし,  $x_0$  を曲線  $\operatorname{Re} \xi(x, a) = \operatorname{Re} \xi(xa)$  が Anti-Stokes curve  $\operatorname{Im} \xi(x, a) = 0$  と交わる点とある. 明らかに

$$\rho(x, \xi) \leq K_7 |x_0 - a|$$

$$|\operatorname{Re} \xi(xa)| = |\operatorname{Re} \xi(x_0, a)| \geq K_8 |x_0 - a|^{3/2} \geq K_9 \rho(x, \xi)^{3/2}.$$

$$\therefore \int_{G(x, \varepsilon)} (g+h) |d\tau| \leq K_{10} \varepsilon + K_{10} [\rho(x, \xi)]^{-5/2} \varepsilon.$$

以上のことをまとめると

**定理 2** 方程式 (3.2) は形式解を, turning point 及び Stokes curve の  $K\varepsilon^{2/3}$  近傍をのぞいた admissible region において漸近展開として持つ. 又誤差は turning point 及びその境界をなす Stokes curve に近づくにつれ大きくなる. 以上.