数理解析研究所講究録
第 267 巻 1976 年 121-130

複素射影空間における代数的全微分方程式

木村俊房（東大理）

§1 Darboux の結果

Darboux は次の方程式を考えた.

$$L(x,y)\,dy - M(x,y)\,dx - N(x,y)(x\,dy - y\,dx) = 0$$

こゝで L, M, N は x, y の $m-1$ 次の多項式である. 一見変った形の方程式であるが, 複素射影平面の方程式と考えると対称的な形になる. そのため,

x を $\frac{x}{z}$ で, y を $\frac{y}{z}$ で

おきかえると,

$$P(x,y,z)(z\,dy - y\,dz) + Q(x,y,z)(z\,dx - x\,dz) + R(x,y,z)(y\,dx - x\,dy) = 0$$

となる. こゝで

$$P(x,y,z) = z^{m-1} L\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

$$Q(x,y,z) = z^{m-1} M\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

$$R(x,y,z) = z^{m-1} N\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

これを行列式を使って書くと

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 .$$

dx, dy, dz で展開して

$$(1) \qquad A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz = 0$$

と書くと,

$$A = yR - zQ,\quad B = zP - xR,\quad C = xQ - yP$$

で,

$$(2) \qquad xA + yB + zC = 0$$

とみたす. (2) は (1) が複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ における方程式とみなされるための必要十分な条件である.

A, B, C は互に素: $(A, B, C) = 1$ とする.

$f = 0$ が (1) の代数的解であるとは, f が既約な同次多項式で $\{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$ 上で

$$df \wedge \omega = 0$$

がなりたつものとする.

F, G を x, y, z の同次多項式 (互に素) としたとき, F/G が有理的積分であるというのは

$$d\left(\frac{F}{G}\right) = R\,\omega \qquad (R \text{ は有理関数})$$

がなりたつこととする.

そのとき, Darboux の定理は次のように述べられる.

定理 (Darboux). A, B, C は互に素な m 次同次多項式

で (2) を満たすとする.

$$p = \frac{1}{2}m(m-1)+2$$

とおく. さらに, 方程式 (1) は互に異なる r 個の代数的解

$f_1=0, \cdots, f_r=0$ をもつとする そのとき,

1) $r=p-1$ ならば, 適当に $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ をとると

$$f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$$

は (1) の積分因子となるか積分となる.

2) $r=p$ ならば, 適当に $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ をとると

$$f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$$

は (1) の積分となる.

3) $r>p$ ならば, (1) は有理的積分 F/G を持つ. したがって, すべての解は代数的解である.

$f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ が積分因子であることと,

$$d(f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}\omega)=0$$

は同値である. この式を $\prod f_i^{\alpha_i-1}$ で割って,

$$f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r} \text{が積分因子} \Leftrightarrow \Big(\sum_i \alpha_i \prod_{k\neq i} f_k\Big)\wedge\omega + \prod_i f_i \cdot d\omega = 0$$

となる.

$f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ が積分であることと,

$$d(f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}) \wedge \omega = 0$$

は同値. これを $\prod f_i^{\alpha_i}$ で割って,

$$f_1^{\alpha_1}\cdots f_n^{\alpha_n} \text{ が積分} \Leftrightarrow \left(\sum_i \alpha_i \frac{df_i}{f_i}\right)\wedge\omega = 0$$

がわかる．

(1) の代数的解の個数について，次の $p+2$ 個の場合が起る：

$$0,\ 1,\ \cdots,\ p,\ \text{すべて}.$$

最後の場合は（代数的に解けるといわれた），Poincaré, Autonné, Painlevé の研究の対象となったが，いずれも不完全である．最初の場合，すなわち代数的解をもたない方程式については，最近 Jouanolou が次の結果を得ている．

(1) は定数倍を無視できるから，A, B, C の係数のうち独立なものの個数を N とすれば，m 次係数をもつ方程式は $\mathbb{P}^N$ と同一視できる．そのとき

定理．m 次多項式を係数にもつ方程式 (1) の全体は，$\mathbb{P}^N$ から可算個の代数多様体を除いたものに等しい．ただし $m>2$

その様な方程式の例として

$$(x^{m-1}z - y^m)dx + (y^{m-1}x - z^m)dy + (z^{m-1}y - x^m)dz = 0$$

$(m>2)$ がある．

注意．(2) をみたす互に素な A, B, C に対し，

$$A = yR - zQ,\quad B = zP - xR,\quad C = xQ - yP$$

をみたす P, Q, R が存在する．ただし一意にはきまらない．条件

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

をおくと一通りにきまる

§2 $\mathbb{P}^n$ における方程式

$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ を n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ の同次座標としたとき，m 次代数的全微分方程式とは

(3) $$\sum_{i=0}^{n} A_i(x_0, x_1, \cdots, x_n)\, dx_i = 0$$

の形の方程式をする．ただし A_i は m 次同次多項式で

(4) $$\sum_{i=0}^{n} x_i A_i = 0$$

と満たすものとする．

(3)の左辺を ω で表わす：

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} A_i(x_0, \cdots x_n)\, dx_i.$$

$T(\mathbb{P}^n)$ を $\mathbb{P}^n$ の接バンドル，L を $\mathbb{P}^n$ の標準直線バンドルとすると，m 次代数的 1-形式の全体と $\mathrm{Hom}(T(\mathbb{P}^n), L^{-(m+1)})$ とは自然な対応によって 1:1 となる．

以下 A_i $(i=0, \cdots, n)$ の最大公約因子は 1 とする．

定義：条件

$$A_0(x_0, \cdots x_n) = \cdots = A_n(x_0, \cdots, x_n) = 0$$

をみたす点 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ を (3) の特異点といい，特異点の集合を S で表わす．

そのとき，

定理．n が奇数で $m=1$ 以外のときは，$S \neq \phi$．

がなりたつ.

定義: (3) は,

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

をみたすとき, 完全積分可能という.

$n=2$ のとき ω は常に完全積分可能である.

そのとき,

定理. (3)が完全積分可能であれば, S は $n-2$ 次元の成分を含む.

しかし, すべての成分が $n-2$ 次元とは限らない.

定義: f を既約同次多項式とし, $\omega \wedge d\omega$ の係数がすべて f で割れるとき, $f=0$ を (3) の代数的解という.

定義: F, G を互に素な同次多項式とし,

$$d\left(\frac{F}{G}\right) = R\,\omega \qquad (R: \text{有理関数})$$

がなりたつとき, F/G を (3) の有理的積分という.

F/G が有理的積分ならば, F と G の次数は等しい. (3) が有理的積分 F/G をもち, $f=0$ が (3) の代数的解ならば

$$\exists (\lambda, \mu) \neq (0,0),\ \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \ f \mid \lambda F + \mu G$$

がなりたつ.

Darboux の定理は,

$$p = \frac{1}{2} m(m-1)\binom{m+n-1}{n-2} + 2$$

とおくことにより, そのまま成立する.

定理. (3)は m次 既約代数的全微分方程式で, r個の代数的解 $f_1=0, \cdots, f_r=0$ を持つとする. そのとき,

1) $r=p-1$ ならば,

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\frac{df_i}{f_i}\right)\wedge\omega+d\omega=0$$

かまたは

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\frac{df_i}{f_i}\right)\wedge\omega=0$$

をみたす $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{C}$ が存在する.

2) $r=p$ ならば

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\frac{df_i}{f_i}\right)\wedge\omega=0$$

をみたす $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{C}$ が存在する.

3) $r>p$ ならば, (3)は有理的積分 F/G をもつ. したがってすべての解は代数的解である.

したがって, $r\geq p-1$ ならば, (3)は完全積分可能である.

代数的解の個数は

$0,1,\cdots,p$, すべて

のどれかになる.

問題: 代数的解をもたない方程式の例をつくれ.

代数的解をもたない m次の方程式は generic か.

(3)が正規な代数的解をもつとき, 次の定理がなりたつ.

定理. (3)は既約m次全微分方程式とする. $f=0$が(3)の代数的解で, 代数超曲面 $f=0$ は正規とする. そのとき

1) 同次多項式aと多項式を係数にもつ 1-form ϖ が存在して

$$\omega = a\,df + f\varpi$$

2) 曲面 $f=0$ は ω の特異集合 S の $n-2$ 次元成分を含む

3) $\deg. f \leqq m$

4) $f \mid \omega\wedge d\omega$

系. 特に $\deg f = m$ ならば, (3)は

$$\frac{f}{(a_0x_0+\cdots+a_nx_n)^m}$$

の形の第一積分をもつ. したがって(3)は完全積分可能である.

§3. 葉層構造

(3)は完全積分可能とする. そのとき, (3)によって

$$U = \mathbb{P}^n - S$$

内に自然に codim. 1 の foliation が定まる. 任意の leaf F に対して

$$B(F) = \overline{F} - F \qquad (\overline{} \text{ は } \mathbb{P}^n \text{ の位相による閉包})$$

とおく. $B(F)$は閉不変集合である. すなわち, $B(F)\cap U \neq \phi$

ならば, $B(F)\cap U$ の任意の点を通る leaf は $B(F)$ に含まれる.

このことから

$$B(F)\cap F=\phi$$

$$B(F)=\overline{F}$$

のいずれかが起る. 前者がなりたつとき, F を proper という.

$\mathbb{C}^2$ における方程式

$$\lambda y\,dx - x\,dy = 0$$

を $\mathbb{P}^2$ に拡張すると

$$\lambda yz\,dx - xz\,dy - (\lambda-1)\,xy\,dz = 0$$

となる. S は3点

$$(0,0,1),\ (1,0,0),\ (0,1,0)$$

からなり, $x=0$, $y=0$, $z=0$ は代数的解である. 点 $(1,1,1)$ を通る leaf F は

$$x=e^t,\ y=e^{\lambda t},\ z=1$$

で与えられる. λ は無理数で $0<\lambda<1$ とすると

$$B(F)=\overline{F}\ni(0,0,1),\ (1,0,0)$$

で, $B(F)-\{(0,0,1),(1,0,0)\}$ は $T^2\times\mathbb{R}$ に同相である. ここで T^2 は torus.

次の定理が知られている.

定理:

1) $\overline{U}$に含まれるコンパクト・リーフは存在しない

2) F の algebraic leaf $\Leftrightarrow$ $B(F) \subset S$

3) すべての leaf が proper ならば, algebraic leaf が存在する.

文献

1) 吉江琢児: 初等常微分方程式

2) Gerard-Jouanolou: Etude de l'existence de variété intégrales .... C.R 277 (1973) 167–169

3) Gerard-Jouanolou: Etude de l'existence de feuilletes compactes .... C.R. 277 (1973), 311–314

4) Jouanolou: Equations de Pfaff algébrique sur un espace projectif 1975 (Preprint)

5) Jouanolou: Densité des équations de Pfaff algébriques sans solutions algébriques 1975 (Preprint)

6) Tran Huy Hoang: Sur les feuilletage défini par une equation de Pfaff algébrique sur $P_n \mathbb{C}$, Thèse de Doc. de 3e cycle, 1975, Strasbourg.