数理解析研究所講究録
第268巻 1976年 1-9

HOMEOMORPHISMS OF LARGE SEIFERT MANIFOLDS

関西学院大学 理　浅野孝平

Pをpolyhedronとし、Pの自己同相写像の全体がつくる群の、isotopic to identityな自己同相写像の全体のつくる部分群による剰余群を、Pのhomeotopy group $\Lambda(P)$と呼ぶ。ここでは、3-manifoldのhomeotopy groupについて考える。3-manifoldのhomeotopy groupについては、次の問題に関連して興味がある。

1. 3次元球面の中のknotは、そのcomplementaryによってtypeが決定されるか。

2. Smith Conjecture。

3. knot groupのautomorphism groupを決定する。

sufficiently largeな、（すなわちincompressibleなorientable surfaceをふくむ）、irreducibleな3-manifoldのhomeotopy groupについては、Waldhausenの基本的な結果[2]が知られている。しかし、実際に、homeotopy groupを決定するこ

とは. 一般には. 非常にむずかしい。ここでは [1] [2] の結果を利用して. sufficiently large な Seifert fiber space についての結果を述べる。

<u>準備</u> 次のようにして. 構成された 3-manifold を Seifert fiber space (あるいは. Seifert manifold) $\{b; (\epsilon, g); (\alpha_1, \beta_1), \cdots (\alpha_r, \beta_r)\}$ と呼ぶ。但し. $\epsilon = o_1, o_2, n_1, n_2, n_3, n_4$. $b \in \mathbb{Z}$ if $\epsilon = o_1, n_2$ $b \in \mathbb{Z}_2$ if $\epsilon = o_2, n_1, n_3, n_4$. (α_i, β_i) relatively prime integers with $\alpha_i > \beta_i > 0$.

1. genus g で $r+1$個の boundary を持つ surface (orientable or nonorientable) の上の S^1-bundle を考える。このとき必ず. cross-section が存在する。この cross-section の boundary を a_i と名づける。$(i=1, 2, \cdots, r)$

2. a_i の上の S^1-bundle は torus である。これを T_i とおくことにする。T_i の上の fiber の1つを b_i とおくと. (a_i, b_i) は. $H_1(T_i) \cong \pi_1(T_i)$ の generating system をなす。

3. 各 T_i $(i \neq 0)$ に対して meridian disk が $\alpha_i a_i + \beta_i b_i$ に homologous となるように. solid torus V_i をはりつける。V_i の中には. T_i の fibering を拡張しておく。(このとき V_i の center line は普通の意味では fiber ではない。これを

exceptional fiber と呼ぶ。) T_0 には、meridian disk が a_0+bb_0 となるように、solid torus V_0 をはりつける。

4. boundary のある Seifert fiber space は、boundary のない Seifert fiber space から、fiber にそった solid torus をのぞいたものと考えればよい。

最初に、Waldhausen の結果をまとめておく。以下 orientable case すなわち、type O_1 および n_2 の Seifert fiber space に制限しておく。

次の List にふくまれていない Seifert manifold を "large" Seifert manifold と呼ぶ。

$\partial M \neq \phi$ のとき。

(1). $S^1 \times S^1 \times I$, I; interval.

(2) base space が disk で 2 つの exceptional fiber type $(2,1)$ を持つ。

(3). Möbius band の上の fiber space.

$\partial M = \phi$ のとき

(1) $\epsilon = O_1$, $g = 0$, $r \leqq 3$

(2) $\epsilon = n_2$, $g = 1$, $r \leqq 1$

(3) $S^1 \times S^1 \times S^1$

(4) $\{0; (n_2, 2)\}$

(5) $\{-2; (o_1, 0); (2,1), (2,1), (2,1), (2,1)\}$

(6) $\{-1; (n_2, 1); (2,1), (2,1)\}$

"large" な Seifert fiber space は、sufficiently large である。[1] or [3]。

Waldhausen は large な Seifert manifold について次の定理を証明している。

<u>Theorem</u>　M, N を large Seifert manifold とする。$\phi: M \to N$ を homeomorphism とするならば、ϕ と isotopic な fiber preserving homeomorphism が存在する。

さらに、[1] で、isotopic to identity な fiber preserving homeomorphism は、fiber preserving isotopy によって isotopic to identity であることを注意している。ここでは、以上の2つの結果を使って考える。

$\Lambda(B, \{z_* \cdots z_*\} \cdots\cdots \{z_* \cdots z_*\})$, $z_i \in B$ を B の { } 内の点が set wise に fix されるような homeomorphism の全体の、{ }内の点を set wise に fix した B の isotopy によって isotopic to identity な homeomorphism の全体による剰余群とする。

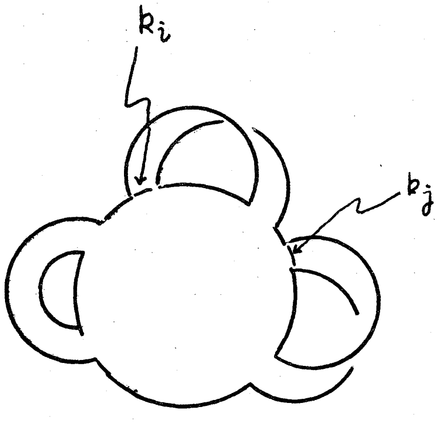
type (α_i, β_j) の exceptional fiber に genus g の surface B の点 z_i を対応させて、もし $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_j, \beta_j)$ ならば、z_i と z_j を1つの{ }内

にいれ、もしboundary のあるSeifert fiber spaceのときは、boundaryの各component に $z_i \in B$ を対応させ 1つの{ }にくくる。このようにしてつくった $\Lambda(B, \{z_* \cdots\} \cdots \{\cdots z_*\})$ を $\mathfrak{A}$ と書くことにする。すると、large な Seifert manifold M に対して、$\pi : \Lambda(M) \longrightarrow \mathfrak{A}$ という homomorphism が存在する。

<u>Lemma 1.</u>′ 次のような homomorphism Φ が存在する。 $\pi\Phi =$ identity.

証明. $\mathfrak{A}$ の element は $\Lambda(B')$ の element と一対一対応している。但し、B' は、genus g の surface から、$r+1+\{$boundary の個数$\}$個の disk の interior をのぞいた surface。$\epsilon = O_1$ のとき、M' を M から exceptional fiber の neighbourhood をのぞいた manifold とすると、$M' \approx B' \times S^1$ である。B' の homeomorphism は、$B' \times S^1$ の homeomorphism に拡張できるので、この拡張された homeomorphism が、さらに、各 V_i に、拡張できることを示せば、十分である。a_i は、$\pm a_j$ に写され b_i は $\pm b_j$ に写されるのであるから、V_i の meridian curve は V_j の meridian curve に写される。故に、V_i から V_j の homeomorphism に拡張可能である。

$\epsilon = n_2$ のとき。 M'をB'の上のS^1-bundleと考えて、$p^{-1}(k_i)$ を、A_i とおく。($i=1,2,\cdots,g$).
但し、pは、M' を S^1-bundle と考えたときの bundle projection.
k_i は図のような、B'上の proper arc とする。$\tau(M' - \bigcup U(A_i))$ は、product bundle であるので、



$\tau(B' - \bigcup U(k_i))$ の homeomorphism は、$\tau(M' - \bigcup U(A_i))$に拡張可能である。そして、$M'$が orientableであることを使えば、$M'$ に拡張できることを証明できる。■

したがって、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\Pi \longrightarrow \Lambda(M) \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

は、split する。目標は、$\Lambda(M)$と$\mathcal{H}$ の関係を明らかにすることであるから、$\mathrm{Ker}\,\Pi$ を計算すれば良い。

<u>Lemma 2.</u> $p : N \longrightarrow S$ を surface S の上の、S^1-bundleとする。このとき、Sの isotopy $\{i_t \,;\, 0 \leqq t \leqq 1\}$と、$i_0 p = pF$ である N の autohomeomorphism Fが存在すると仮定する。このとき、N の isotopy $\{I_t \,;\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ で、$i_t p = pI_t$. $I_0 = F$ となるものが存在する。

上の lemmaは、trivialである。このことにより、Kerπは各 fiber が自分自身に map する homeomorphism を考えれば良いことになる。

<u>Lemma 3.</u>　fを、Mの fiber preserving homeo で fの isotopy class $[f]$が、Ker π にふくまれているとする。そして、さらに $f(B') = B'$ とするならば、fは isotopic to identity である。

これは、Mを$\cup T_j$ および B'で cut することにより、証明できる。この lemma によって、Kerπは、M'の cross-section B'の embedding を分類すればよい。まず、cross-section の boundary を考える。

<u>Lemma 4.</u>　fをMの fiber preserving homeomorphism で $[f] \in \mathrm{Ker}\,\pi$で、しかも各 fiber は、自分自身に map しているとする。

$\partial M = \phi$のとき、$M = \{b; (\epsilon, g); (2,1) \cdots (2,1)\}, r=2b$ とすれば、

1). $f(a_i) \sim \epsilon a_i$, $f(b_i) \sim \epsilon b_i$

2). $f(a_i) \sim \epsilon(a_i + b_i)$, $f(b_i) \sim -\epsilon b_i$

ここで，$\epsilon = \pm 1$，$\sim$ は homologous on T_i を示す。

$\partial M \neq \phi$ で，exceptional fiber がすべて type(2, 1) のときも，上と同じ。

上以外の Seifert manifold に対しては，$f_i(a_i) \sim \epsilon a_i$ $f(b_i) \sim \epsilon b_i$。

証明は略する。ここで，orientation preserving homeo. であれば，cross-section の boundary は，固定されているので，次のような exact sequence を考える。$\Lambda^+(M)$ を，{M の orientation preserving homeo. の全体}／{isotopic to identity な homeo. の全体} とすれば，

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi^+ \longrightarrow \Lambda^+(M) \xrightarrow{\pi^+} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

は split する。そして，上の lemma により $\Lambda^+(M)$ を決定すれば $\Lambda(M)$ がわかる。そして，

<u>Theorem</u> $\quad \mathrm{Ker}\,\pi^+ \cong H_1(B)$

という結果を得る。さらに $\mathcal{H}$ より $\mathrm{Ker}\,\pi^+$ の automorphism group への homomorphism は，

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda(B) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H_1(B)$$

という自然な homomorphism の合成である。

Example torus knot の complement $T_{p,q}$

$\mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Ker}\,\Pi^+ \cong H_1(B) \cong 0$

$\Lambda^+(T_{p,q}) \cong \Lambda(T_{p,q}) \cong \mathbb{Z}_2$

文献

(1) F. Waldhausen, "Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I," Invent. Math.3 (1967), 308 - 333; II, Invent. Math. 4 (1967), 87 - 117.

(2) F. Waldhausen, "On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large," Ann. Math. 87 (1968), 56 - 88.

(3) P. Orlik, "Seifert Manifolds," Lecture Notes in Math. 291, Springer-Verlag, (1972).