数理解析研究所講究録
第 269 巻 1976 年 1-33

補間スプラインの算法、誤差

名大 大型センター　秦野和郎

問題　実軸上の分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ において
$f_i^{(\alpha)}=f^{(\alpha)}(x_i)$: $\alpha=0,1,\cdots,k-1$, $i=0,1,\cdots,n$ が与えられるとし
$f(x)\in C^{2m+1}[a,b]$ とする。

$S(x)$ は各区間 $x_i\leqq x\leqq x_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ において、たかだか $2m-1$ 次の多項式であって、$S(x)\in C^{2m-1-k}[a,b]$ とする。

[Type-I] $f_0^{(\beta)}, f_n^{(\beta)}$: $\beta=k,k+1,\cdots,m-1$ が与えられたとき、

$$S^{(\alpha)}(x_i)=f_i^{(\alpha)} \quad : \alpha=0,1,\cdots,k-1, \quad i=0,1,\cdots,n$$

$$\begin{cases} S^{(\beta)}(x_0)=f_0^{(\beta)} \\ S^{(\beta)}(x_n)=f_n^{(\beta)} \end{cases} \quad \beta=k,k+1,\cdots,m-1$$

をみたす $S(x)$ を得る算法及び $\|f^{(l)}(x)-S^{(l)}(x)\|_\infty$: $l=0,1,\cdots,2m-1$ の評価

[Type-II] $f_0^{(\beta)}, f_n^{(\beta)}$: $\beta=m,m+1,\cdots,2m-1-k$ が与えられたとき、$S^{(\alpha)}(x_i)=f_i^{(\alpha)}$: $\alpha=0,1,\cdots,k-1$, $i=0,1,\cdots,n$

$$\begin{cases} S^{(\beta)}(x_0)=f_0^{(\beta)} \\ S^{(\beta)}(x_n)=f_n^{(\beta)} \end{cases} : \beta=m,m+1,\cdots,2m-1-k$$

をみたす $S(x)$ を得る算法及び $\|f^{(l)}(x)-S^{(l)}(x)\|_\infty$; $l=0,1,\cdots,2m-1$ の評価

[Periodic] $f(x)$ が周期 $b-a$ の周期関数であるとき，即ち，$f_0^{(p)}=f_n^{(p)}$; $p=0,1,\cdots$ のとき，$S^{(\alpha)}(x_i)=f_i^{(\alpha)}$; $\alpha=0,1,\cdots,k-1$, $i=0,1,\cdots,n$ をみたし，$S^{(p)}(x_0)=S^{(p)}(x_n)$; $p=0,1,\cdots,2m-1-k$ をみたす $S(x)$ の算法及び，$\|f^{(l)}(x)-S^{(l)}(x)\|_\infty$; $l=0,1,\cdots,2m-1$ の評価

多くの文献では，$S(x)$ を deffiicient spline with deficiency k（多重度 k の多項式スプライン）と呼んでいるが，ここでは，単に「補間スプライン」と呼ぶことにする。多くの場合 $1\leq k\leq m$ とするが，ここでは $1\leq k\leq m-1$ とする。（$k=m$ のとき，$S(x)$ を defficiant spline with maximum defficiency と呼ぶが，この場合は §1 に述べる区分的エルミート補間に一致する。）

原理的には $S(x)$ を得る事は簡単に思える。$S(x)$ は多項式であるから，各区間毎に $S_i(x)=\sum_{j=0}^{2m-1}a_{ij}(x-x_i)^j$ とおいて与えられた条件を適用し，a_{ij} を未知数とする連立一次方程式を作ってそれを解けば，$S(x)$ が得られるように思われるが，この方法は多くの場合がそうであるように得られる連立一次方程式は，極めて悪条件であり，n, m が極めて小さい場合

を除き、実用的でない。

$m=2$, $k=1$ 即ち cubic spline の算法は早くから知られており、多くの分野で使用されている。

$m \geqq 3$, $k=1$ の場合の算法は、1968年頃に始めて文献にあらわれている。そこに与えられた算法は $S(x)$ を B-spline の線型結合で表現し、その係数を連立一次方程式を解いて得るという方法で、$m=6$ 程度まで適用しうるとされている。その後、これを改良した算法が2,3現われている。しかし B-spline が非常に理解しにくいものであり、又、次数の高いスプラインが3次スプラインに比較して、どの程度、有用であるかはっきりわからない事もあって、いまだ一般に普及するに至っていない。

$k>1$ に対するスプラインの算法はこれまでの所は知られていない。

ここでは $1 \leqq k \leqq m-1$ に対して $m=8$ 程度まで安定に計算できる算法を示す。

$\|f^{(l)}(x)-S^{(l)}(x)\|_\infty$ は $m=2$, $k=1$ の場合と $m=2$, $k=2$ の場合とは、C.A.Hall が十分実用的な評価をしている。しかし、それ以外の場合は、多くの解析が試みられているにかかわらず、収束率の評価も与えられていない。

ここでは分割 Δ が与えられたとき、いくぶん控え目ではあ

るが、十分に実用的な誤差評価を示す。

§1において $S(x)$ の算法、誤差評価に重要な役割りをはたす区分的エルミート補間について述べる。

§2で3次スプラインの標準的な算法を拡張した形の $S(x)$ の算法を示す。

§3で G.A. Hall が3次スプラインの誤差評価を得た方法と類似した方法で $S(x)$ の誤差評価を試みる。

§1. 区分的エルミート補間

$x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$ で定義される区分的エルミート補間を、

$$H_i(t_i)=\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha}\{f_i^{(\alpha)}p_\alpha(t_i)+f_{i+1}^{(\alpha)}q_\alpha(t_i)\} \qquad (2.1)$$

と表現する。$h_i=x_{i+1}-x_i$, $t_i=\frac{x-x_i}{h_i}$ $(0\leqq t_i\leqq 1)$ である。ここで $\delta_{\alpha,l}$ をクロネッカーのデルタとして

$$\begin{cases} p_\alpha^{(l)}(0)=\delta_{\alpha,l} \\ p_\alpha^{(l)}(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_\alpha^{(l)}(0)=0 \\ q_\alpha^{(l)}(1)=\delta_{\alpha,l} \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$\alpha=0,1,\cdots,m-1 \qquad l=0,1,\cdots,m-1$$

である。但し、たとえば $p_\alpha^{(l)}(0)=\left[\frac{d^l}{dt^l}p_\alpha(t)\right]_{t=0}$ である。

(2.2)式を使えば、$\left[\frac{d^l}{dx^l}H_i(t_i)\right]_{x=x_i}=f_i^{(l)}$, $\left[\frac{d^l}{dx^l}H_i(t_i)\right]_{x=x_{i+1}}=f_{i+1}^{(l)}$ である事が容易に確かめられる。(2.2)式をみたす多項式 $p_\alpha(t)$, $q_\alpha(t)$ は穂坂、Ahlberg, Nielson, Walsh が与えている。

Ahlberg, Nielson, Walsh によれば

$$\begin{cases} p_\alpha(t) = \dfrac{t^\alpha}{\alpha!} + \dfrac{1}{\alpha!}\displaystyle\sum_{j=m}^{2m-1}(-1)^{j-m-1}\binom{j-1-\alpha}{m-1-\alpha}\binom{2m-1-\alpha}{2m-1-j}t^j \\ q_\alpha(t) = \dfrac{1}{\alpha!}\displaystyle\sum_{j=m}^{2m-1}(-1)^{\alpha+j-m}\sum_{r=0}^{\alpha}\binom{j-r-1}{m-1}\binom{2m-1-\alpha}{j-r}\binom{\alpha}{r}t^j \\ \quad = \dfrac{1}{\alpha!}\displaystyle\sum_{j=m}^{2m-1}(-1)^{\alpha+j-m}\binom{j-1-\alpha}{m-1-\alpha}\binom{2m-1-\alpha}{2m-1-j} \\ \quad \times \displaystyle\sum_{r=0}^{\alpha}\frac{(j-\alpha)\binom{2m-1-j}{\alpha-r}\binom{j-m}{r}}{(j-r)\binom{m-1}{\alpha}}t^j \end{cases} \tag{2.3}$$

である。$p_\alpha(t)$, $q_\alpha(t)$ は次の恒等式をみたす。

$$q_\alpha(t) = (-1)^\alpha p_\alpha(1-t), \quad p_\alpha(t) = (-1)^\alpha q_\alpha(1-t) \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{t^\alpha}{\alpha!} - \left\{p_\alpha(t) + \displaystyle\sum_{r=0}^{\alpha}\frac{1}{(\alpha-r)!}q_r(t)\right\} = 0 \\ \dfrac{(t-1)^\alpha}{\alpha!} - \left\{q_\alpha(t) + \displaystyle\sum_{r=0}^{\alpha}\frac{(-1)^{\alpha-r}}{(\alpha-r)!}p_\alpha(t)\right\} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\frac{t^\beta}{\beta!} - \sum_{r=0}^{m-1}\frac{q_r(t)}{(\beta-r)!} = 0, \quad \frac{(t-1)^\beta}{\beta!} - \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-1)^{\beta-r}}{(\beta-r)!}p_r(t) = 0 \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{t^{2m}}{(2m)!} - \displaystyle\sum_{r=0}^{m-1}\frac{1}{(2m-r)!}q_r(t) = \frac{1}{(2m)!}\{t(t-1)\}^m \\ \dfrac{(t-1)^{2m}}{(2m)!} - \displaystyle\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-1)^r}{(2m-r)!}p_r(t) = \frac{1}{(2m)!}\{t(t-1)\}^m \end{cases} \tag{2.7}$$

$\alpha = 0, 1, \cdots, m-1 \quad ; \quad \beta = m, m+1, \cdots, 2m-1$

これらは (2.2) 式を使って証明できる。

次に (2.5)～(2.7) 式を使って区分的エルミート補間の誤差を算出する。

$F_H(f) \equiv f(x) - H_i(x_i)$ に積分剰余項をもつテーラー展開式

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2m-1}\frac{(x-x_i)^j}{j!}f^{(j)}(x_i) + \frac{1}{(2m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-y)^{2m-1}f^{(2m)}(y)\,dy$$

を代入すると、

$$F_H(f)=\sum_{\alpha=0}^{m-1}\left[\frac{t_i^{\alpha}}{\alpha!}-\left\{p_\alpha(t_i)+\sum_{r=0}^{\alpha}\frac{q_r(t_i)}{(\alpha-r)!}\right\}\right]h_i^{\alpha}f_i^{(\alpha)}$$
$$+\sum_{\beta=m}^{2m-1}\left[\frac{t_i^{\beta}}{\beta!}-\sum_{r=0}^{m-1}\frac{q_r(t_i)}{(\beta-r)!}\right]h_i^{\beta}f_i^{(\beta)}$$
$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{(x-y)_+^{2m-1}}{(2m-1)!}-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\frac{(x_{i+1}-y)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!}h_i^{\alpha}q_\alpha(t_i)\right]f^{(2m)}(y)\,dy$$

となる。右辺の第一項及び第二項は(2.5), (2.6)式から0になる。又、ここで、

$$(x-y)_+^{2m-1}=\begin{cases}(x-y)^{2m-1} & x\geqq y\\ 0 & x<y\end{cases}$$

である。$s_i=\dfrac{y-x_i}{h_i}$ とおくと、

$$F_H(f)=h_i^{2m}\int_0^1 g_H(t_i,s_i)f^{(2m)}(y)\,ds_i \qquad (2.8)$$

$$g_H(t,s)=\begin{cases}-\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{m-1}(-1)^{\alpha}\frac{s^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!}p_\alpha(t) & (0\leqq s\leqq t)\\ \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{m-1}(-1)^{\alpha}\frac{(s-1)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!}q_\alpha(t) & (t\leqq s\leqq 1)\end{cases}$$

となる。更に、

$$F_H^{(l)}(f)=\frac{d^l}{dx^l}F_H(f)=h_i^{2m-l}\int_0^1 g_H^{(l)}(t_i,s_i)f^{(2m)}(y)\,ds_i$$

$$g_H^{(l)}(t,s)=\frac{\partial^l}{\partial t^l}g_H(t,s) \qquad (2.9)$$

である。これにより、区分的エルミート補間の誤差の上限を求める事ができる。

ここで §2, §3 に必要な定数を導入しておく。(2.3)式をtについて微分し、$t=0$ とおくと、

$$\begin{cases}p_\alpha^{(l)}(0)=(-1)^{l-m-1}\dbinom{l-\alpha-1}{m-1-\alpha}\dbinom{2m-1-\alpha}{2m-1-l}\dbinom{l}{\alpha}(l-\alpha)!\\ q_\alpha^{(l)}(0)=(-1)^{\alpha+l-m}\displaystyle\sum_{r=0}^{\alpha}\dbinom{l-r-1}{m-1}\dbinom{2m-1-\alpha}{l-\alpha}\dbinom{\alpha}{r}\dbinom{l}{\alpha}(l-\alpha)!\end{cases} \qquad (2.10)$$
$$=(-1)^{\alpha-1}p_\alpha^{(l)}(0)\cdot\gamma_\alpha^{(l)}$$

$$r_\alpha(l) = \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{(l-\alpha)\binom{2m-1-l}{\alpha-r}\binom{l-m}{r}}{(l+1)\binom{m-1}{\alpha}}$$

$$l = m, m+1, \cdots, 2m-1 \qquad \alpha = 0, 1, \cdots, m-1$$

となる。

$$R_\alpha = \frac{p_0^{(2m-1)}(0)}{p_\alpha^{(2m-1)}(0)} \cdot \frac{(\alpha+1)(2m-1)}{(2m-1-\alpha)} = (\alpha+1)! \frac{\binom{2m-1}{\alpha}}{\binom{m-1}{\alpha}}$$

$$P_\alpha^{(\beta)} = \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{p_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \cdot \frac{p_0^{(2m-1)}(0)}{p_\alpha^{(2m-1)}(0)} \cdot \frac{(\alpha+1)(2m-1)}{(2m-1-\alpha)}$$

$$= \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2m-1-\alpha-\beta}$$

$$Q_\alpha^{(\beta)} = \frac{\beta+1}{(2m-1-\beta)} \cdot \frac{q_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \cdot \frac{p_0^{(2m-1)}(0)}{p_\alpha^{(2m-1)}(0)} \cdot \frac{(\alpha+1)(2m-1)}{2m-1-\alpha}$$

$$= (-1)^{\alpha-1} \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2m-1-\alpha-\beta} \cdot r_\alpha^{(2m-1-\beta)}$$

$$r_\alpha^{(2m-1-\beta)} = \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{(2m-1-\beta-\alpha)\binom{\beta}{\alpha-r}\binom{m-1-\beta}{r}}{(2m-1-\beta+1)\binom{m-1}{\alpha}}$$

$$U_\alpha^{(\beta)} = \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{q_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} = \frac{Q_\alpha^{(\beta)}}{R_\alpha}$$

$$V^{(\beta)} = \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{1}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} = (-1)^{m-\beta} \frac{(m-1)!\,(m-1-\beta)!}{(2m-1)!\,(2m-1-\beta)!}(\beta+1)!$$

それで、$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{U_\alpha^{(\beta)}}{(2m-\alpha)!}$ の値が必要になる。(2.7) の第一式を t について、$2m-1-\beta$ 回微分し、$t=0$ とおくと、

$$-\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{q_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)}{(2m-\alpha)!} = \frac{1}{(2m)!}\binom{m}{m-1-\beta}(-1)^{\beta+1}(2m-1-\beta)!$$

となる。従って、

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{U_\alpha^{(\beta)}}{(2m-\alpha)!} = (-1)^m \frac{(m-1)!\,m!}{(2m-1)!\,(2m)!} \qquad \text{となる。}$$

§2. 補間スプラインの算法.

$u_i^{(r)} = f_i^{(r)} = f^{(r)}(x_i)$: $i=0,1,\cdots,n$, $r=0,1,\cdots,k-1$ が

与えられたとして、補間スプラインを、

$$\begin{cases} s(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} s_i(t_i) \\ s_i(t_i) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha} \{ u_i^{(\alpha)} p_\alpha(t_i) + u_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha(t_i) \} \end{cases} \qquad (3.1)$$

と表現する。ここで $u_i^{(r)}$: $i=0,1,\cdots,n$, $r=k,k+1,\cdots,m-1$ は

未知のパラメータである。

(2.2) 式から、

$$s_{i-1}^{(l)}(1) = s_i^{(l)}(0) = u_i^{(l)} \qquad l=0,1,\cdots,m-1 , \quad i=1,2,\cdots,n-1$$

が容易に確認しうる。補間スプラインの仮定から、更に

$$s_{i-1}^{(l)}(1) = s_i^{(l)}(0) \quad : \quad l=m,m+1,\cdots,2m-1-k , \quad i=1,2,\cdots,n-1 \qquad (3.2)$$

が成立する必要がある。(3.1), (3.2) 式から

$$-\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{ u_{i-1}^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(1) + u_i^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(1) \} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{ u_i^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(0) + u_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(0) \} = 0 \qquad (3.3)$$

である。 $q_\alpha^{(l)}(1) = (-1)^{\alpha-l} p_\alpha^{(l)}(0)$, $p_\alpha^{(l)}(1) = (-1)^{\alpha-l} q_\alpha^{(l)}(0)$ を代入し、

$l = 2m-1-\beta$ $(\beta = k, k+1, \cdots, m-1)$ とおくと、

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \Big[(-1)^{\alpha+\beta} h_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} q_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)\, u_{i-1}^{(\alpha)} + \{ h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} + (-1)^{\alpha+\beta} h_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} \} p_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)\, u_i^{(\alpha)} + h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} q_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)\, u_{i+1}^{(\alpha)} \Big] = 0 \qquad (3.4)$$

である。ここで、

$$\eta = \frac{x_n - x_0}{n} , \quad \theta_i = \frac{h_i}{\eta} ,$$

$$u_i^{(\alpha)} = \frac{p_0^{(2m-1)}(0)}{p_\alpha^{(2m-1)}(0)} \cdot \frac{(\alpha+1)(2m-1)}{2m-1-\alpha} \cdot \eta^{-\alpha} \cdot v_i^{(\alpha)}$$
$$= R_\alpha \cdot \eta^{-\alpha} \cdot v_i^{(\alpha)}$$

とおき、両辺に $\dfrac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \dfrac{1}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \cdot \eta^{2m-1-\beta}$ をかけて、

$$\begin{cases} a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{i,i}^{\beta,\alpha} = \{ \theta_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} + (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} \} P_\alpha^{(\beta)} \\ a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} = \theta_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \end{cases} \tag{3.4}$$

とおくと、(3.4) 式は、

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} v_{i-1}^{(\alpha)} + a_{i,i}^{\beta,\alpha} v_i^{(\alpha)} + a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} v_{i+1}^{(\alpha)}] = \phi_i^{(\beta)} \tag{3.5}$$

$$\phi_i^{(\beta)} = -\sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} \{ a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} f_{i-1}^{(\alpha)} + a_{i,i}^{\beta,\alpha} f_i^{(\alpha)} + a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} f_{i+1}^{(\alpha)} \}$$

$$\beta = k, k+1, \cdots, m-1$$

となる。

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,j}^{k,k} & a_{i,j}^{k,k+1} & \cdots & a_{i,j}^{k,m-1} \\ a_{i,j}^{k+1,k} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ a_{i,j}^{m-1,k} & \cdots & & a_{i,j}^{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

$$v_i = (v_i^{(k)}, v_i^{(k+1)}, \cdots, v_i^{(m-1)})^T$$
$$\phi_i = (\phi_i^{(k)}, \phi_i^{(k+1)}, \cdots, \phi_i^{(m-1)})^T$$

とおけば、

$$A_{i,i-1} v_{i-1} + A_{i,i} v_i + A_{i,i+1} v_{i+1} = \phi_i \tag{3.6}$$

$i = 1, 2, \cdots, n-1$ 　　となる。

[Type-I]

仮定により $u_0^{(\gamma)} = f_0^{(\gamma)}$, $u_n^{(\gamma)} = f_n^{(\gamma)}$ $: \gamma = k, k+1, \dots, m-1$

である。これを (3.5) 式で、$i=1$, $i=n-1$ とした式に代入すると、

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} \left[a_{11}^{\beta,\alpha} v_1^{(\alpha)} + a_{12}^{\beta,\alpha} v_2^{(\alpha)} \right] = \phi_1^{(\beta)} - \sum_{\alpha=k}^{m-1} a_{10}^{\beta,\alpha} \cdot \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} f_0^{(\alpha)} = \tau_1^{(\beta)}$$

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} \left[a_{n-1,n-2}^{\beta,\alpha} v_{n-2}^{(\alpha)} + a_{n-1,n-1}^{\beta,\alpha} v_{n-1}^{(\alpha)} \right] = \phi_{n-1}^{(\beta)} - \sum_{\alpha=k}^{m-1} a_{n-1,n}^{\beta,\alpha} \cdot \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha} f_n^{(\alpha)} = \tau_{n-1}^{(\beta)}$$

である。

$$\boldsymbol{\tau}_1 = (\tau_1^{(k)}, \tau_1^{(k+1)}, \dots, \tau_1^{(m-1)})^T$$
$$\boldsymbol{\tau}_{n-1} = (\tau_{n-1}^{(k)}, \tau_{n-1}^{(k+1)}, \dots, \tau_{n-1}^{(m-1)})^T$$

とすると、

$$\begin{cases} A_{11} \boldsymbol{v}_1 + A_{12} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\tau}_1 \\ A_{i,i-1} \boldsymbol{v}_{i-1} + A_{i,i} \boldsymbol{v}_i + A_{i,i+1} \boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{\phi}_i \\ \qquad i = 2, 3, \dots, n-2 \\ A_{n-1,n-2} \boldsymbol{v}_{n-2} + A_{n-1,n-1} \boldsymbol{v}_{n-1} = \boldsymbol{\tau}_{n-1} \end{cases} \tag{3.7}$$

なる、ブロック3重対角の連立一次方程式が得られる。これを解いて $v_i^{(\alpha)}$ を得、$u_i^{(\alpha)}$ を得て、(3.1) 式に代入すれば、任意の点における補間値が求まる。

後で必要になるので次の行列を定義しておく。

$$A_I = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \cdots & & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & A_{n-2,n-2} & A_{n-2,n-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$B_I = A_I^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots\cdots & B_{1,n-1} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \cdots\cdots & B_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} b_{i,j}^{k,k} & b_{i,j}^{k,k+1} & \cdots\cdots & b_{i,j}^{k,m-1} \\ \vdots & & & \\ b_{i,j}^{m-1,k} & b_{i,j}^{m-1,k+1} & \cdots\cdots & b_{i,j}^{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

[Type-II]

仮定により $S_0^{(l)}(0)=f_0^{(l)}$, $S_{n-1}^{(l)}(1)=f_n^{(l)}$: $l=m, m-1, \cdots, 2m-1-k$

とおくと．

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_0^{\alpha-l} \{ u_0^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(0) + u_1^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(0) \} = f_0^{(l)} \\ \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{n-1}^{\alpha-l} \{ u_{n-1}^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(1) + u_n^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(1) \} = f_n^{(\alpha)} \end{cases}$$

$$l = m, m+1, \cdots, 2m-1-k$$

である．

$$\begin{cases} a_{00}^{\beta,\alpha} = \theta_0^{\alpha+\beta-(2m-1)} P_\alpha^{(\beta)} \\ a_{01}^{\beta,\alpha} = \theta_0^{\alpha+\beta-(2m-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n,n-1}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{n-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{n,n}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{n-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} P_\alpha^{(\beta)} \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{00}^{\beta,\alpha} v_0^{(\alpha)} + a_{01}^{\beta,\alpha} v_1^{(\alpha)}] = \tau_0^{(\beta)} \\ \displaystyle\sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{n,n-1}^{\beta,\alpha} v_{n-1}^{(\alpha)} + a_{n,n}^{\beta,\alpha} v_n^{(\alpha)}] = \tau_n^{(\beta)} \end{cases}$$

$$\sigma_0^{(\beta)} = -\sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha}\{a_{00}^{\beta,\alpha} f_0^{(\alpha)} + a_{01}^{\beta,\alpha} f_1^{(\alpha)}\} + \nabla^{(\beta)} f_0^{(2m-1-\beta)} \cdot \eta^{2m-1-\beta}$$

$$\sigma_n^{(\beta)} = -\sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha}\{a_{n,n-1}^{\beta,\alpha} f_{n-1}^{(\alpha)} + a_{n,n} f_n^{(\alpha)}\} - \nabla^{(\beta)} f_n^{(2m-1-\beta)} \cdot \eta^{2m-1-\beta}$$

となる。Type-I の場合と同様、ブロック3重対角の連立一次方程式、

$$\begin{cases} A_{00} v_0 + A_{01} v_1 = \sigma_0 \\ A_{i,i-1} v_{i-1} + A_{i,i} v_i + A_{i,i+1} v_{i+1} = \phi_i \\ \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ A_{n,n-1} v_{n-1} + A_{n,n} v_n = \sigma_n \end{cases} \qquad (3.8)$$

を解き、$v_i^{(\alpha)}$ を得て、$u_i^{(\alpha)}$ を得、(3.1) 式に代入すれば、任意の点における補間値が求まる。

[Periodic]

仮定により、$u_0^{(\alpha)} = u_n^{(\alpha)}$: $\alpha = 0, 1, \cdots, 2m-1-k$ である

$$\begin{cases} a_{1,n}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta}\, \theta_0^{\alpha+\beta-(2m-1)}\, Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{n,1}^{\beta,\alpha} = \theta_\infty^{\alpha+\beta-(2m-1)}\, Q_\alpha^{(\beta)} \\ a_{n,n}^{\beta,\alpha} = \{\theta_0^{\alpha+\beta-(2m-1)} + (-1)^{\alpha+\beta}\theta_{n-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)}\} P_\alpha^{(\beta)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1^{(\beta)} = -\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha}\{a_{11}^{\beta,\alpha} v_1^{(\alpha)} + a_{12}^{\beta,\alpha} v_2^{(\alpha)} + a_{1,n}^{\beta,\alpha} v_n^{(\alpha)}\} \\ \sigma_n^{(\beta)} = -\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{\eta^\alpha}{R_\alpha}\{a_{n,1}^{\beta,\alpha} v_1^{(\alpha)} + a_{n,n-1}^{\beta,\alpha} v_{n-1}^{(\alpha)} + a_{n,n}^{\beta,\alpha} v_n^{(\alpha)}\} \end{cases}$$

とおくと、連立一次方程式、

$$\begin{cases} A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + A_{1,n} v_n = \sigma_1 \\ A_{i,i-1} v_{i-1} + A_{i,i} v_i + A_{i,i+1} v_{i+1} = \phi_i \\ \quad i = 2, 3, \cdots, n-1 \end{cases} \qquad (3.9)$$

$$\left\{ A_{n,1} v_1 + A_{n,n-1} v_{n-1} + A_{n,n} v_n = r_n \right.$$

が得られる。この場合はブロック３重対角ではなく，ただ行列は

$$A_p = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{1,n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & & A_{n-1,n} \\ A_{n,1} & 0 & \cdots & 0 & & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

の形になる。

§3. 補間スプラインの誤差

(2.9) 式から，

$$f^{(l)}(x_i+0) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{ f_i^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(0) + f_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(0) \} + h_i^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(0, s_i) f^{(2m)}(y)\, ds_i$$

$$f^{(l)}(x_i-0) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{ f_{i-1}^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(1) + f_i^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(1) \} + h_{i-1}^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(1, s_{i-1}) f^{(2m)}(y)\, ds_{i-1}$$

であるが，$f(x) \in C^{2m+1}[a, b]$ の仮定から，

$$f^{(l)}(x_i-0) = f^{(l)}(x_i+0) \qquad : l = m, m+1, \cdots, 2m-1-k$$

である。これから，

$$-\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{ f_{i-1}^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(1) + f_i^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(1) \} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{ f_i^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(0) + f_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(0) \}$$
$$= h_{i-1}^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(1, s_{i-1}) f^{(2m)}(y)\, ds_{i-1} - h_i^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(0, s_i) f^{(2m)}(y)\, ds_i$$

となる。この式と (3.3) 式から，

$$-\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-\ell}\{(f_{i-1}^{(\alpha)}-u_{i-1}^{(\alpha)})p_\alpha^{(\ell)}(1)+(f_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha)})g_\alpha^{(\ell)}(1)\}$$
$$+\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-\ell}\{(f_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha)})p_\alpha^{(\ell)}(0)+(f_{i+1}^{(\alpha)}-u_{i+1}^{(\alpha)})g_\alpha^{(\ell)}(0)\}$$
$$=h_{i-1}^{2m-\ell}\int_0^1 g_H^{(\ell)}(1,s_{i-1})f^{(2m)}(y)\,ds_{i-1}-h_i^{2m-\ell}\int_0^1 g_H^{(\ell)}(0,s_i)f^{(2m)}(y)\,ds_i \qquad \left(\cancel{7.10}\ 4.1\right)$$
$$\ell=m,m+1,\cdots,2m-1-k$$

となる。$g_\alpha^{(\ell)}(1)=(-1)^{\alpha-\ell}p_\alpha^{(\ell)}(0)$, $p_\alpha^{(\ell)}(1)=(-1)^{\alpha-\ell}g_\alpha^{(\ell)}(0)$ を代入し、$\ell=2m-1-\beta$ とおく。更に、$f_i^{(\alpha)}=u_i^{(\alpha)}$: $\alpha=0,1,\cdots,k-1$, $i=0,1,\cdots,n-1$ を代入すると、

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1}\Big[(-1)^{\alpha+\beta}h_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)}g_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)(f_{i-1}^{(\alpha)}-u_{i-1}^{(\alpha)})$$
$$+\{h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)}+(-1)^{\alpha+\beta}h_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)}\}p_\alpha^{(\ell)}(0)(f_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha)})$$
$$+h_i^{\alpha+\beta-(2m-1)}g_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)(f_{i+1}^{(\alpha)}-u_{i+1}^{(\alpha)})\Big]=\left(\cancel{7.10}\ 4.1\right)\text{の右辺}$$

が得られる。$f_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha)}=R_\alpha\eta^{-\alpha}e_i^{(\alpha)}$ とおき、両辺に $\dfrac{\beta+1}{2m-1-\beta}\cdot\dfrac{1}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)}\eta^{2m-1-\beta}$ をかけると上式は、

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1}\left[a_{i,i-1}^{\beta,\alpha}e_{i-1}^{(\alpha)}+a_{i,i}^{\beta,\alpha}e_i^{(\alpha)}+a_{i,i+1}^{\beta,\alpha}e_{i+1}^{(\alpha)}\right]=\varepsilon_i^{(\beta)} \qquad (4.2)$$

の形になる。

$$g_H^{(2m-1-\beta)}(1,s_{i-1})=-\sum_{\lambda=0}^{m-1}(-1)^\lambda\frac{s_{i-1}^{2m-1-\lambda}}{(2m-1-\lambda)!}p_\lambda^{(2m-1-\beta)}(1)$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{m-1}(-1)^\beta\frac{g_\lambda^{(2m-1-\beta)}(0)}{(2m-1-\lambda)!}s_{i-1}^{2m-1-\lambda}$$
$$g_H^{(2m-1-\beta)}(0,s_i)=\sum_{\lambda=0}^{m-1}(-1)^{\beta}\frac{g_\lambda^{(2m-1-\beta)}(0)}{(2m-1-\lambda)!}(s_i-1)^{2m-1-\lambda}$$

を使うと、

$$\varepsilon_i^{(\beta)} = \eta^{2m} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)}}{(2m-1-\lambda)!} \left\{ \int_0^1 (-1)^\beta \theta_{i-1}^{\beta+1} s_{i-1}^{2m-1-\lambda} f^{(2m)}(y)\, ds_{i-1} \right.$$
$$\left. - \int_0^1 (-1)^\lambda \theta_i^{\beta+1} (s_i - 1)^{2m-1-\lambda} f^{(2m)}(y)\, ds_i \right\}$$

となる。

$$\mathbf{e}_i = (e_i^{(k)}, e_i^{(k+1)}, \cdots, e_i^{(m-1)})^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i^{(k)}, \varepsilon_i^{(k+1)}, \cdots, \varepsilon_i^{(m-1)})^T$$

とおくと、(3.6)式と同じ形の式

$$A_{i,i-1}\mathbf{e}_{i-1} + A_{i,i}\mathbf{e}_i + A_{i,i+1}\mathbf{e}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \qquad (4.3)$$
$$i = 1, 2, \cdots, n-1$$

が得られる。

[Type-I]

(4.3)式で $i=1$ とした式及び $i=n-1$ とした式に $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ を代入すると

$$e_i^{(\alpha)} = \eta^{2m} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\beta=k}^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)} \theta_j^{\beta+1}}{(2m-1-\lambda)!}$$
$$\times \int_0^1 \left\{ (-1)^{\lambda+1} b_{i,j}^{\alpha,\beta} (s_j - 1)^{2m-1-\lambda} + (-1)^\beta b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} s_j^{2m-1-\lambda} \right\} f^{(2m)}(y)\, ds_j \qquad (4.4)$$
$$b_{i,0}^{\alpha,\beta} = b_{i,n}^{\alpha,\beta} = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

となる。一方、

$$f(x) - S_i(t_i) = \{f(x) - H_i(t_i)\} + \{H_i(t_i) - S_i(t_i)\}$$
$$= f(x) - H_i(t_i) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^\alpha \{(f_i^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)}) p_\alpha(t_i) + (f_{i+1}^{(\alpha)} - u_{i+1}^{(\alpha)}) q_\alpha(t_i)\}$$

である。この二つの式から、

$$f^{(l)}(x)-S_i^{(l)}(t_i)=\eta^{2m-l}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1\{g_j^{(l)}(t_i,s_j)+\delta_{i,j}\,g_H^{(l)}(t_i,s_j)\}f^{(2m)}(y)\,ds_j$$

$$g_j^{(l)}(t_i,s_j)=\sum_{\alpha=k}^{m-1}\sum_{\beta=k}^{m-1}\sum_{\lambda=0}^{m-1}\frac{R_\alpha\,\theta_i^{\alpha-l}\,U_\lambda^{(\beta)}}{(2m-1-\lambda)!}\,\theta_j^{\beta+1}$$

$$\times\Big[(-1)^{\lambda+1}\{b_{i,j}^{\alpha,\beta}\,p_\alpha^{(l)}(t_i)+b_{i+1,j}^{\alpha,\beta}\,q_\alpha^{(l)}(t_i)\}(s_j-1)^{2m-1-\lambda}$$

$$+(-1)^{\beta}\{b_{i,j+1}^{\alpha,\beta}\,p_\alpha^{(l)}(t_i)+b_{i+1,j+1}^{\alpha,\beta}\,q_\alpha^{(l)}(t_i)\}s_j^{2m-1-\lambda}\Big]$$

$$b_{0,j}^{\alpha,\beta}=b_{n,j}^{\alpha,\beta}=b_{i,0}^{\alpha,\beta}=b_{i,n}^{\alpha,\beta}=0 \qquad (4.5)$$

$$g_H^{(l)}(t_i,s_i)=\theta_j^{2m-l}\,g_H^{(l)}(t_i,s_i)$$

が得られる。これから

$$|f^{(l)}(x)-S_i^{(l)}(t_i)|\leqq\eta^{2m-l}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1|g_j^{(l)}(t_i,s_j)+\delta_{i,j}\,g_H^{(l)}(t_i,s_j)|\,ds_j \times\|f^{(2m)}(y)\|_\infty \qquad (4.6)$$

が得られ，

$$E_1^{(l)}=\max_x\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1|g_j^{(l)}(t_i,s_j)+\delta_{i,j}\,g_H^{(l)}(t_i,s_j)|\,ds_j$$

とおくと，

$$\|f^{(l)}(x)-S_i^{(l)}(t_i)\|_\infty\leqq E_1^{(l)}\,\eta^{2m-l}\,\|f^{(2m)}(x)\|_\infty \qquad (4.7)$$

が得られる。

ここで収束率について簡単にふれておく。$|b-a|\to 0$ のとき，$\eta\to 0$ であるが θ_i は一定である。(3.4) 式などからわかるように A_I には η を含んでいない。従って $E_1^{(l)}$ は η によらない定数である。このことから，Type-I スプラインの収束率は，Ahlberg, Nielson, Walsh の流儀で書いて，

$o(\|\Delta\|^{2m-l})$ であることが、はっきり言える。

[Type-II]

(2.9) 式から、

$$f^{(l)}(x_0+0)=\sum_{\alpha=0}^{m-1} h_0^{\alpha-l}\{f_0^{(\alpha)}p_\alpha^{(l)}(0)+f_1^{(\alpha)}q_\alpha^{(l)}(0)\}$$
$$+h_0^{2m-l}\int_0^1 g_H^{(l)}(0,s_0)f^{(2m)}(y)ds_0$$

である。これから

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1} h_0^{\alpha-l}\{(f_0^{(\alpha)}-u_0^{(\alpha)})p_\alpha^{(l)}(0)+(f_1^{(\alpha)}-u_1^{(\alpha)})q_\alpha^{(l)}(0)\}$$
$$=-h_0^{2m-l}\int_0^1 g_H^{(l)}(0,s_0)f^{(2m)}(y)ds_0$$

となるが、(4.3) 式を得たと同様な変形をすると、

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1}[a_{00}^{\beta,\alpha}e_0^{(\alpha)}+a_{01}^{\beta,\alpha}e_1^{(\alpha)}]=\varepsilon_0^{(\beta)} \tag{4.8}$$
$$\varepsilon_0^{(\beta)}=\eta^{2m}\sum_{\lambda=0}^{m-1}\frac{U_\lambda^{(\beta)}}{(2m-1-\lambda)!}\int_0^1(-1)^{\lambda+1}\theta_0^{\beta+1}(s_0-1)^{2m-1-\lambda}f^{(2m)}(y)ds_0$$

同じようにして

$$\sum_{\alpha=k}^{m-1}[a_{n,n-1}^{\beta,\alpha}e_{n-1}^{(\alpha)}+a_{n,n}^{\beta,\alpha}e_n^{(\alpha)}]=\varepsilon_n^{(\beta)} \tag{4.9}$$
$$\varepsilon_n^{(\beta)}=\eta^{2m}\sum_{\lambda=0}^{m-1}\frac{U_\lambda^{(\beta)}}{(2m-1-\lambda)!}\int_0^1(-1)^{\beta}\theta_{n-1}^{\beta+1}s_{n-1}^{2m-1-\lambda}f^{(2m)}(y)ds_{n-1}$$

が得られる。(4.3) 式で $i=1,2,\cdots,n-1$ とした式，(4.8)，(4.9) 式から

$$e_i^{(\alpha)}=\sum_{\beta=k}^{m-1}b_{i,0}^{\alpha,\beta}\varepsilon_0^{(\beta)}+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\beta=k}^{m-1}b_{i,j}^{\alpha,\beta}\varepsilon_j^{(\beta)}+\sum_{\beta=k}^{m-1}b_{i,n}^{\alpha,\beta}\varepsilon_n^{(\beta)}$$

となるが、この式は、(4.4) 式と同じ形になる。(4.4) 式と異なる点は $b_{i,0}^{\alpha,\beta}\neq0$, $b_{i,n}^{\alpha,\beta}\neq0$ となる事だけである。後の計算は Type-I の場合と同じようにして出来る。

$$\|f^{(l)}(x)-S_\Delta^{(l)}(x;\cdot)\|_\infty\leqq E_l^{(l)}\eta^{2m-l}\|f^{(2m)}(x)\|_\infty$$

となる。$E_1^{(\ell)}$ で Type-I と異なる点は $g_j^{(\ell)}(x_i, \lambda_j)$ にあらわれる $b_{0,j}^{\alpha,\beta}$, $b_{n,j}^{\alpha,\beta}$, $b_{i,0}^{\alpha,\beta}$, $b_{i,n}^{\alpha,\beta}$ が0にならない事だけである。

[Periodic]

$e_0 = e_n$ である事を使うと、

$$\begin{cases} A_{11} e_1 + A_{12} e_2 + A_{1n} e_n = \varepsilon_1 \\ A_{i,i-1} e_{i-1} + A_{i,i} e_i + A_{i,i+1} e_{i+1} = \varepsilon_i \\ \qquad i = 2, 3, \cdots, n-1 \\ A_{n,1} e_1 + A_{n,n-1} e_{n-1} + A_{n,n} e_n = \varepsilon_n \end{cases}$$

である。ε_n の要素は $\varepsilon_i^{(\beta)}$ を与える式で $i=n$ とし、θ_n の代わりに θ_0, λ_n の代わりに λ_0 とすれば得られる、他の要素は他と同じである。これを使って Type-I の場合と同じような計算をすると、

$$\| f^{(\ell)}(x) - S_i^{(\ell)}(x_i) \|_\infty \leq E_1^{(\ell)} h^{2m-\ell} \| f^{(2m)}(x) \|_\infty$$

となる。$E_1^{(\ell)}$ で Type-I と異なる点は $g_j^{(\ell)}(x_i, \lambda_j)$ にあらわれる $b_{0,j}^{\alpha,\beta}$ を $b_{n,j}^{\alpha,\beta}$, $b_{i,0}^{\alpha,\beta}$ を $b_{i,n}^{\alpha,\beta}$ でおきかえる事だけである。

それぞれの場合について、n, m, k, ℓ を与えて、$E_1^{(\ell)}$ を計算すれば、スプラインの誤差評価ができることになる。

しかし、実際にプログラムを作って $E_1^{(\ell)}$ を計算してみると、かなり控え目な誤差評価になるよれ、意外に時間がかかる。$m=3$, $k=1$, $n=32$ 程度でも FACOM-230-60 で数10

分程時間かかり、現在このままでの誤差評価はなかなか、断念している。

代わりに (4.4)式などから、

$$\|e_i^{(\alpha)}\|_\infty \leqq \eta^{2m} K^{(\alpha)} \|f^{(2m)}(x)\|_\infty$$

の形での $K^{(\alpha)}$ を計算し（この計算にもかなり時間がかかるが $E_1^{(l)}$ の計算程ではない。）

$$|f^{(l)}(x) - g_i^{(l)}(t_i)| \leqq |f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t_i)| + |\sum_{\alpha=k}^{m-1} R_\alpha \theta_i^{\alpha-l} \eta^{-l} \{e_i^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(t_i) + e_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(t_i)\}|$$

$$\leqq \eta^{2m-l} \|\int_0^1 |g_k^{(l)}(t_i, s_i)| ds_i\|_\infty \|f^{(2m)}(x)\|_\infty + \sum_{\alpha=k}^{m-1} R_\alpha \theta_i^{\alpha-l} \eta^{-l} \|e_i^{(\alpha)}\|_\infty \times \| |p_\alpha^{(l)}(t_i)| + |q_\alpha^{(l)}(t_i)| \|_\infty$$

$$= \eta^{2m-l} E_2^{(l)} \|f^{(2m)}(x)\|_\infty \tag{4.10}$$

の形にして $E_2^{(l)}$ を計算している。

この形での誤差評価もやはり、かなり控え目である。(4.4)式から部分積分により、

$$e_i^{(\alpha)} = \eta^{2m} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\beta=k}^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)} \theta_j^{\beta+1}}{(2m-1-\lambda)!} \{b_{i,j}^{\alpha,\beta} f_j^{(2m)} + (-1)^\beta b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} f_{j+1}^{(2m)}\}$$
$$- \eta^{2m+1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\beta=k}^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)} \theta_j^{\beta+2}}{(2m-\lambda)!}$$
$$\times \int_0^1 \{(-1)^{\lambda+1} b_{i,j}^{\alpha,\beta} (s_j - 1)^{2m-\lambda} + (-1)^\beta b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} s_j^{2m-\lambda}\} f^{(2m+1)}(y) ds_j$$

となるが第1項は、

$$\eta^{2m} (-1)^m \frac{(m-1)!\, m!}{(2m-1)!\,(2m)!} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\beta=k}^{m-1} \{\theta_j^{\beta+1} + (-1)^\beta \theta_{j-1}^{\beta+1}\} b_{i,j}^{\alpha,\beta} f_j^{(2m)}$$

となる。これから

$$\|e_i^{(\alpha)}\|_\infty \leqq h^{2m} K_1^{(\alpha)} \|f^{(2m)}(x)\|_\infty + h^{2m+1} K_2^{(\alpha)} \|f^{(2m+1)}(x)\|_\infty$$

の形の $K_1^{(\alpha)}$, $K_2^{(\alpha)}$ を計算し、(4.10) 式を得るのと同じようにして、

$$\|f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(x_i)\|_\infty \leqq h^{2m-l} E_3^{(l)} \|f^{(2m)}\|_\infty + h^{2m+1-l} E_4^{(l)} \|f^{(2m+1)}\|_\infty$$

の形にし $E_3^{(l)}$, $E_4^{(l)}$ を計算する。

この形の誤差評価は、まだいくぶん控え目であると思われるが、適当な例で計算した実際の誤差にわりに近い結果が得られる。

（参考文献）

1). Ahlberg, Nielson, Walsh : The Theory of Splines and Their Applications, (284 pp) New York and London : Academic Press 1967

2) 穂坂衛：曲線、曲面の合成および平滑化理論，情報処理，Vol 10, 121–131 (1969)

3) C.A. Hall : On Error Bounds for Spline Interpolation, Journal of Approximation Theory 1, 209–218 (1968)

4) M.H. Schultz and R.S. Varga : L-Splines, Numerische Mathematik 10, 345–369 (1967)

付録

本文で述べた誤差解析の結果を使って、いくつかの場合について誤差の大きさを数値的に計算した。その結果を以下に示す。

Fig. 1　分割Δが等間隔即ち、$x_i = hi$ で $i=0,1,\cdots,32$ $(n=32)$ のとき、与えられた関数 $f(x)$ に対する Type-I スプラインの各区間 $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$ の誤差の最大絶対値 $(R_1^{(l)})_i$ を

$$
\begin{aligned}
(R_1^{(l)})_i &= \| f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(t_i) \|_\infty \\
&\leqq \max_{x_i \leqq x \leqq x_{i+1}} \int_{x_0}^{x_n} | G_i^{(l)}(x,y) | \, dy \cdot \| f^{(2m)} \|_\infty \\
&= h^{2m-l} (E_1^{(l)})_i \| f^{(2m)} \|_\infty
\end{aligned}
$$

とする。$G_i^{(l)}(x,y)$ は式 (4.6) の右辺で、$t_i = (x-x_i)/h_i$, $s_j = (y-y_j)/h_j$ （ここでは $h_i = h$ である。）とおけば得られる。

Fig. 1 に

(1) $\max_{x_i \leqq x \leqq x_{i+1}} \int_{x_0}^{x_n} | G_i^{(l)}(x,y) | \, dy \Big/ h^{2m-l}$ を実線で、

(2) $\max_{x_i \leqq x \leqq x_{i+1}} \left| \int_{x_0}^{x_n} G_i^{(l)}(x, y)\, dy \right| / \eta^{2m-l}$ を一点鎖線で.

(3) $x_i = \frac{2\pi}{32} i \quad (i=0, 1, \cdots, 32)$ で $\sin^{(r)} x_i \quad (r=0, 1, \cdots, k-1)$ 及び. $x=0,\ 2\pi$ で. $\sin^{(r)} x \quad (r=k, k+1, \cdots, m-1)$ を与えて Type-I スプラインで補間したとき.

$\max_{x_i \leqq x \leqq x_{i+1}} \left| \sin^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(x) \right| / \eta^{2m-l}$ を点線

で示す。

Fig. 1-1 に. $m=3,\ k=1,\ l=0$

1-2 に $m=3,\ k=1,\ l=1$

1-3 に $m=3,\ k=2,\ l=0$

1-4 に $m=3,\ k=2,\ l=1$

の場合を示す。

$k=1$ 即ち関数値のみを与えて補間したときは.

$\max_{x_i \leqq x \leqq x_{i+1}} \int_{x_0}^{x_n} \left| G_i^{(l)}(x, y) \right| dy / \eta^{2m-l}$ と.

$\max_{x_i \leqq x \leqq x_{i+1}} \left| \int_{x_0}^{x_n} G_i^{(l)}(x, y)\, dy \right| / \eta^{2m-l}$ とは $l=0, 1$ の場合

共に $10^{1.3}$ 位、大きさが異なるが、$k=2$ 即ち関数値及び一次微係数を与えた場合は.

$$\max_{x_i \leqq x \leqq x_{i+1}} \int_{x_0}^{x_n} \left| G_i^{(l)}(x, y) \right| dy / \eta^{2m-l} = \max_{x_i \leqq x \leqq x_{i+1}} \left| \int_{x_0}^{x_n} G_i^{(l)}(x, y)\, dy \right| / \eta^{2m-l}$$

ひある。このことは、$\int_{x_0}^{x_n}|G_i^{(l)}(x,y)|\,dy$ を最大にする x に対して、$k=1$ の場合は $G_i^{(l)}(x,y)$ が y の変化に対して符号が変化するが、$k=2$ の場合は符号が変化しないことを意味している。

Fig. 2　Fig. 1 に示した結果は $f(x)\in C^{2m-1}[x_0,x_n]$, $f^{(2m)}(x)\in L^2[x_0,x_n]$ をみたす $f(x)$ に対しての optimum error bound を与えるが、それを計算するにはかなり時間がかかるので、$m=3$（5次）の場合についてのみ示している。

$x_i\leqq x\leqq x_{i+1}$ における $f(x)$ に対する区分的エルミート補間を $H_i(t_i)$ とする。$f^{(l)}(x)$ に対する $S_i^{(l)}(t_i)$ の誤差を、

$$|f^{(l)}(x)-S_i^{(l)}(t_i)|\leqq|f^{(l)}(x)-H_i^{(l)}(t_i)|+|H_i^{(l)}(t_i)-S_i^{(l)}(t_i)|$$

の形に2つに分けると誤差の計算が比較的容易になる。（式(4.10)）

Fig. 2 に

$$\begin{aligned}\|f^{(l)}(x)-S_i^{(l)}(t_i)\|_\infty &\leqq \|f^{(l)}(x)-H_i^{(l)}(t_i)\|_\infty\\ &\quad+\|H_i^{(l)}(t_i)-S_i^{(l)}(t_i)\|_\infty\\ &=h^{2m-l}(E_2^{(l)})_i\|f^{(2m)}\|_\infty\end{aligned}$$

の形での、$(E_2^{(l)})_i$ をいくつかの場合について示す。

$k=1$, $l=0$　の場合について

$n=8, 16, 32$ で.

Type-I （棄端）
Type-II （一点鏡端） } スプラインに対して
Periodic （点端）

$m=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

の場合について示している。図中、たとえば II(32) とあるのは Type-II で $n=32$ の場合、I(16) とあるのは、Type-I で $n=16$、P(8) とあるのは Periodic で $n=8$ の場合である。

この図から一般に $(E_2^{(l)})_i$ の大きさは Type-II が最も大きく、Type-I が最も小さい。又、端付近を除けば、n が増大するにつれて、どのスプラインの場合も $(E_2^{(l)})_i$ の大きさは次第に一定値に近づくことがわかる。

Fig. 3　Fig. 2 では i の変化に対する $(E_2^{(l)})_i$ の大きさを、$k=1$, $l=0$ の場合についてのみ示している。

Fig. 3 に k, l, m の変化に対する $\max(E_2^{(l)})_i = E_2^{(l)}$ を Type-I スプラインの $n=32$ の場合について示す。

Fig. 1-1

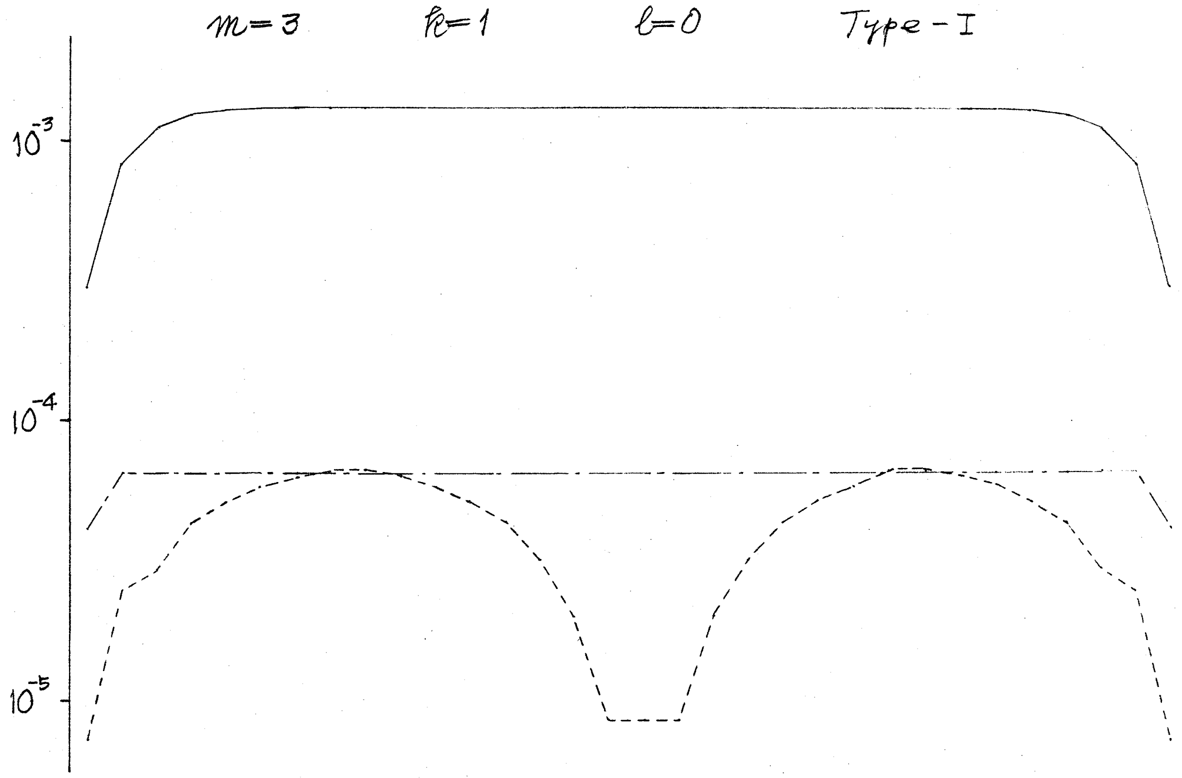


Fig. 1-2

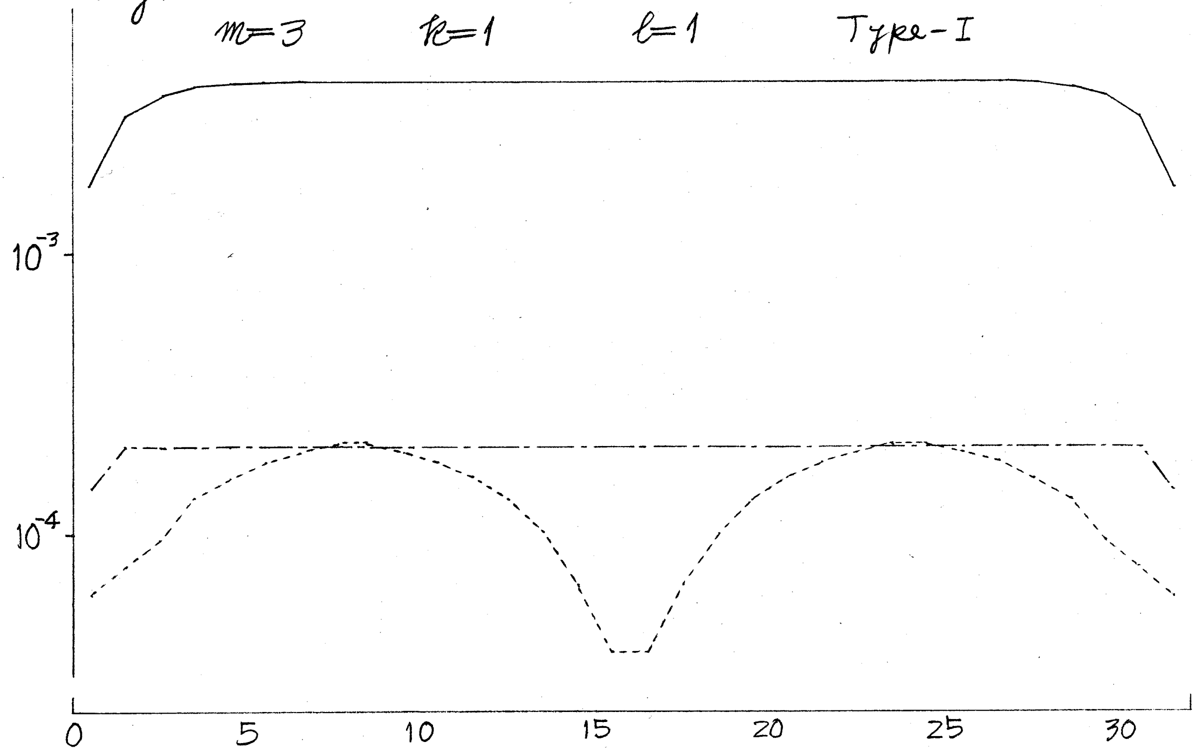


Fig. 1-3

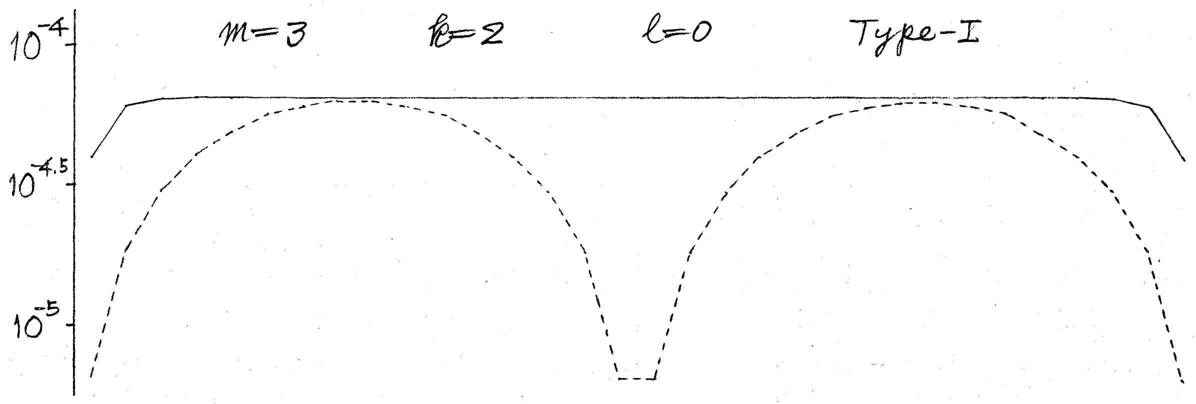

10^{-4}
$m=3$
$k=2$
$l=0$
Type-I
$10^{-4.5}$
10^{-5}

Fig. 1-4

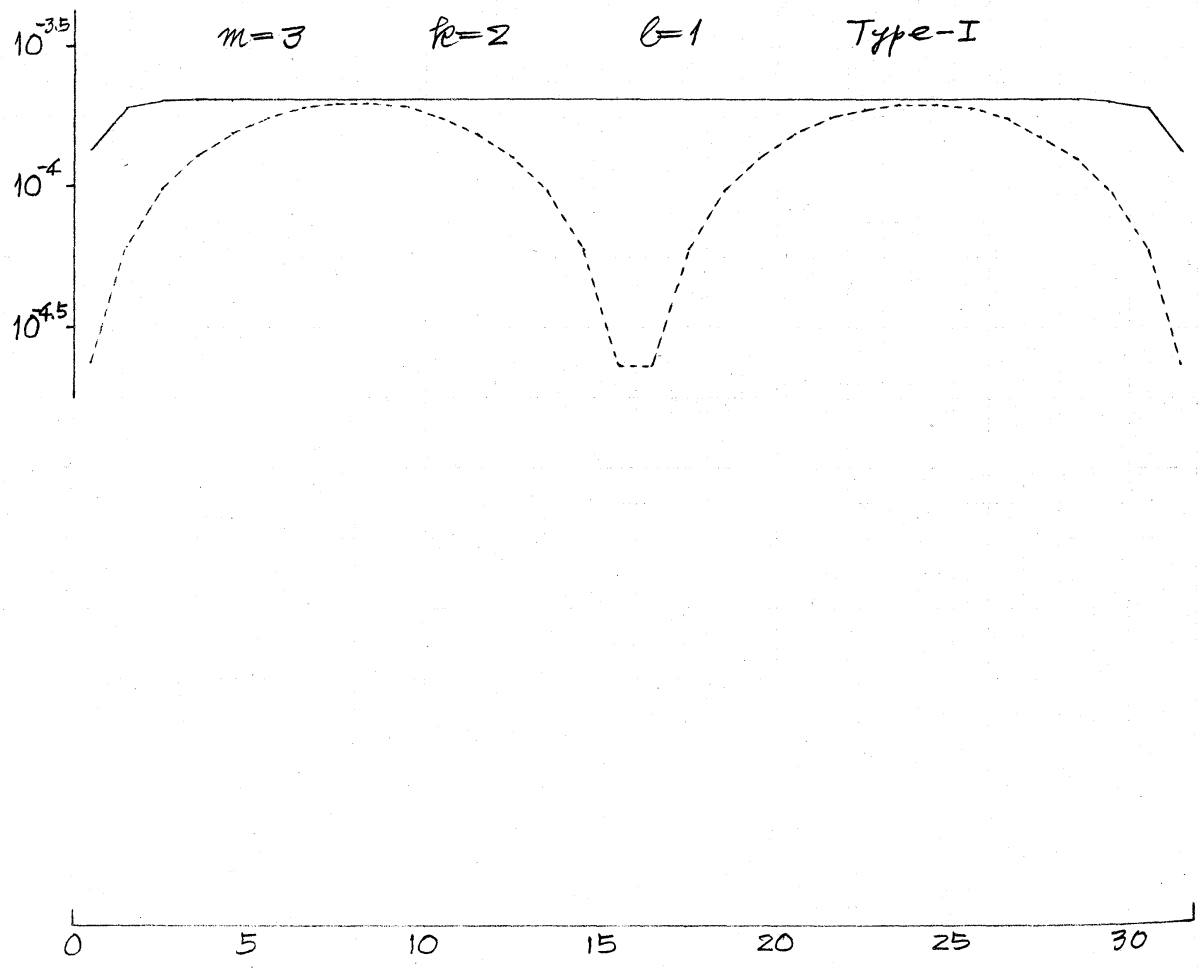
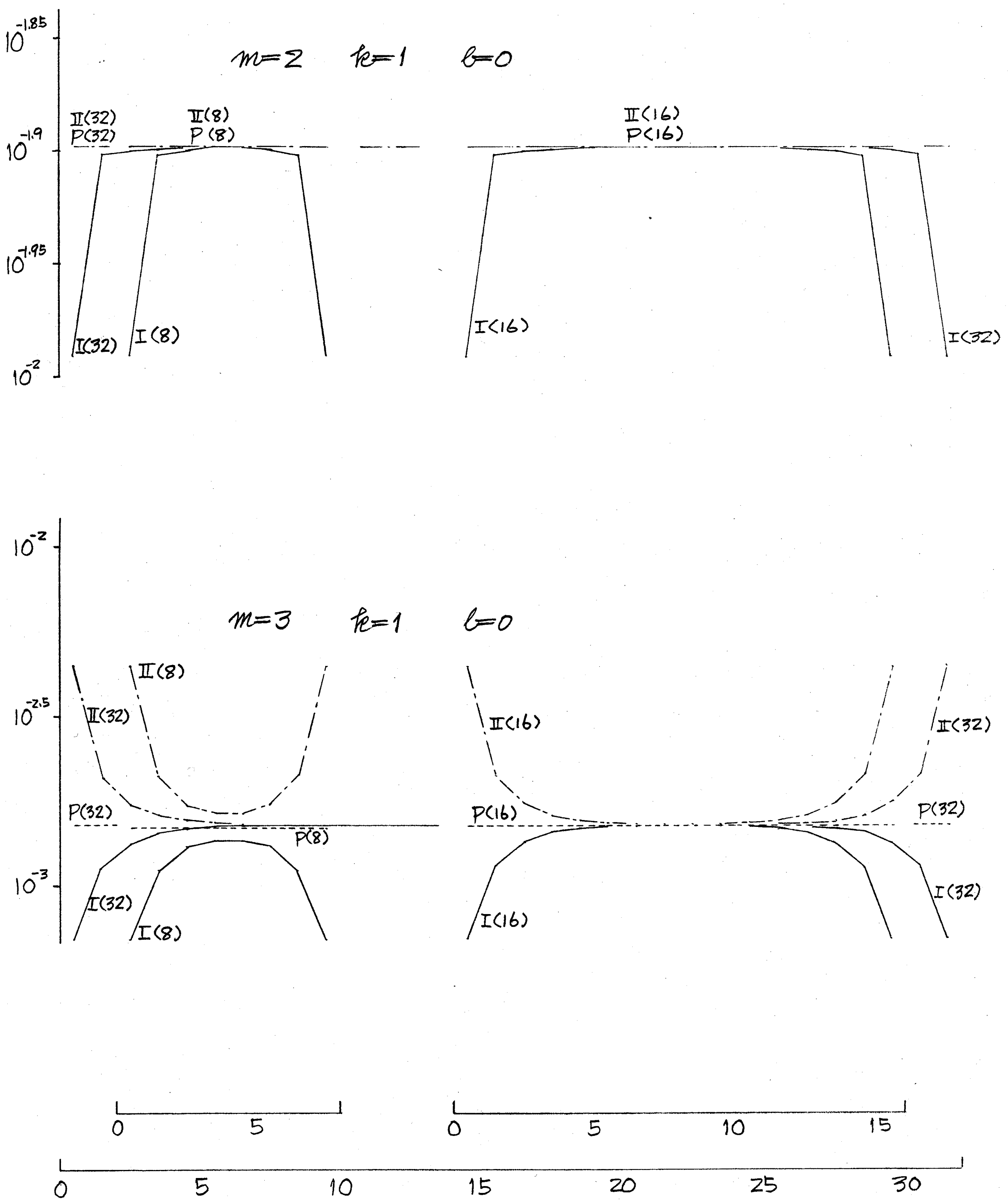

$10^{-3.5}$
$m=3$
$k=2$
$l=1$
Type-I
10^{-4}
$10^{-4.5}$
0
5
10
15
20
25
30

Fig. 2-1



m=2 k=1 b=0
II(32)
P(32)
II(8)
P(8)
II(16)
P(16)
I(32)
I(8)
I(16)
I(32)
m=3 k=1 b=0
II(8)
II(32)
II(16)
II(32)
P(32)
P(8)
P(16)
P(32)
I(32)
I(8)
I(16)
I(32)

Fig. 2-2

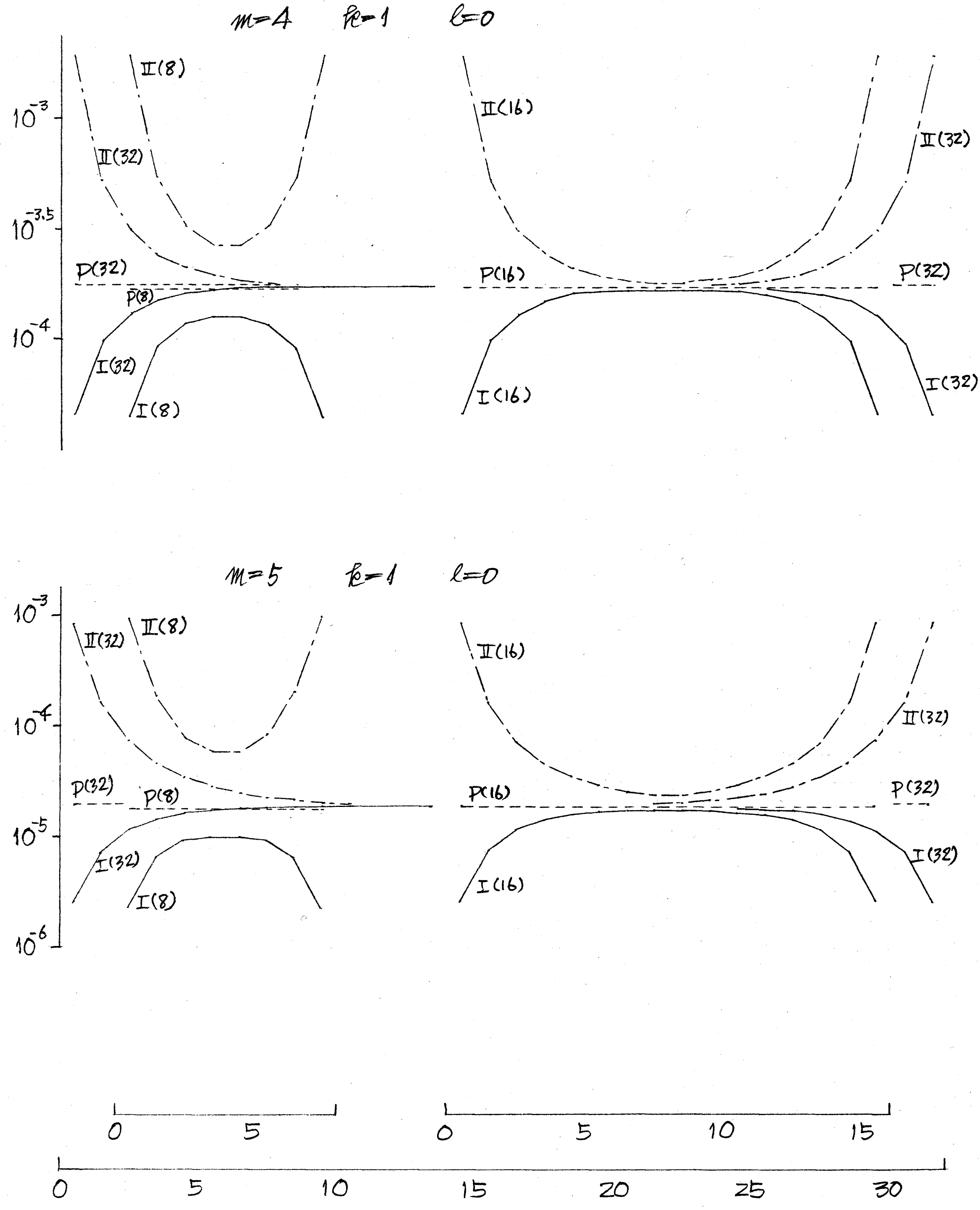
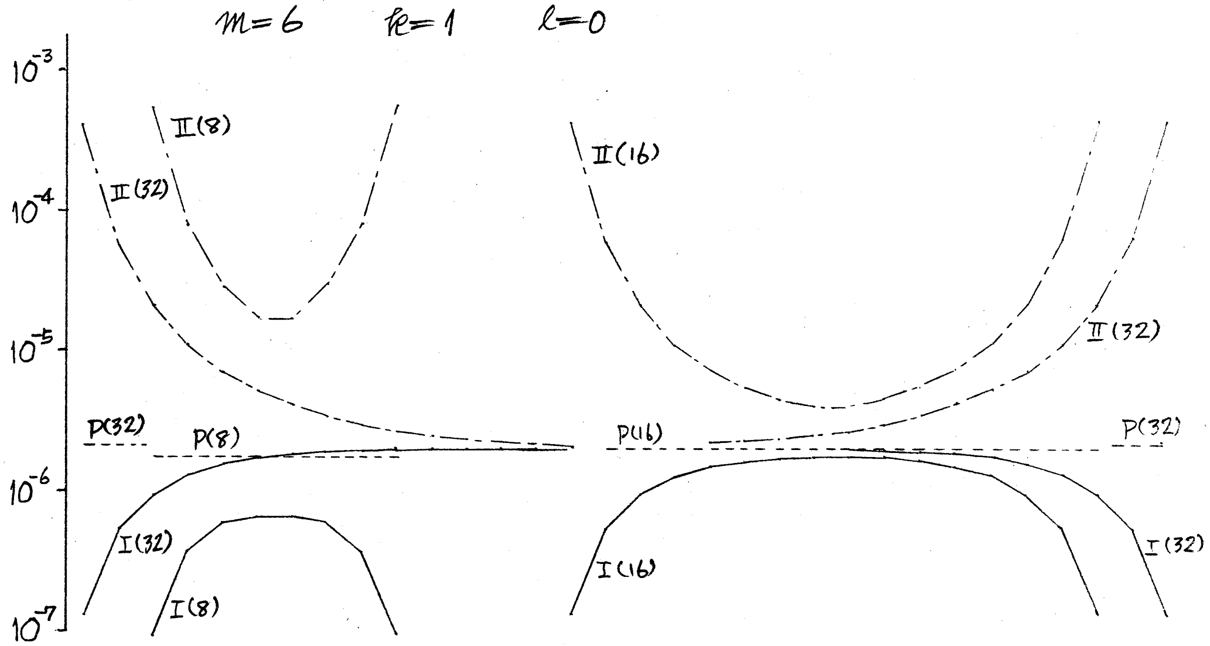

m=4 k=1 l=0
10^{-3}
$10^{-3.5}$
10^{-4}
II(8)
II(32)
P(32)
P(8)
I(32)
I(8)
II(16)
P(16)
I(16)
II(32)
P(32)
I(32)
m=5 k=1 l=0
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
II(32)
II(8)
P(32)
P(8)
I(32)
I(8)
II(16)
P(16)
I(16)
II(32)
P(32)
I(32)
0 5
0 5 10 15
0 5 10 15 20 25 30

Fig. 2-3


m=6 k=1 l=0
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
10^-7
II(8)
II(32)
II(16)
II(32)
P(32)
P(8)
P(16)
P(32)
I(32)
I(8)
I(16)
I(32)

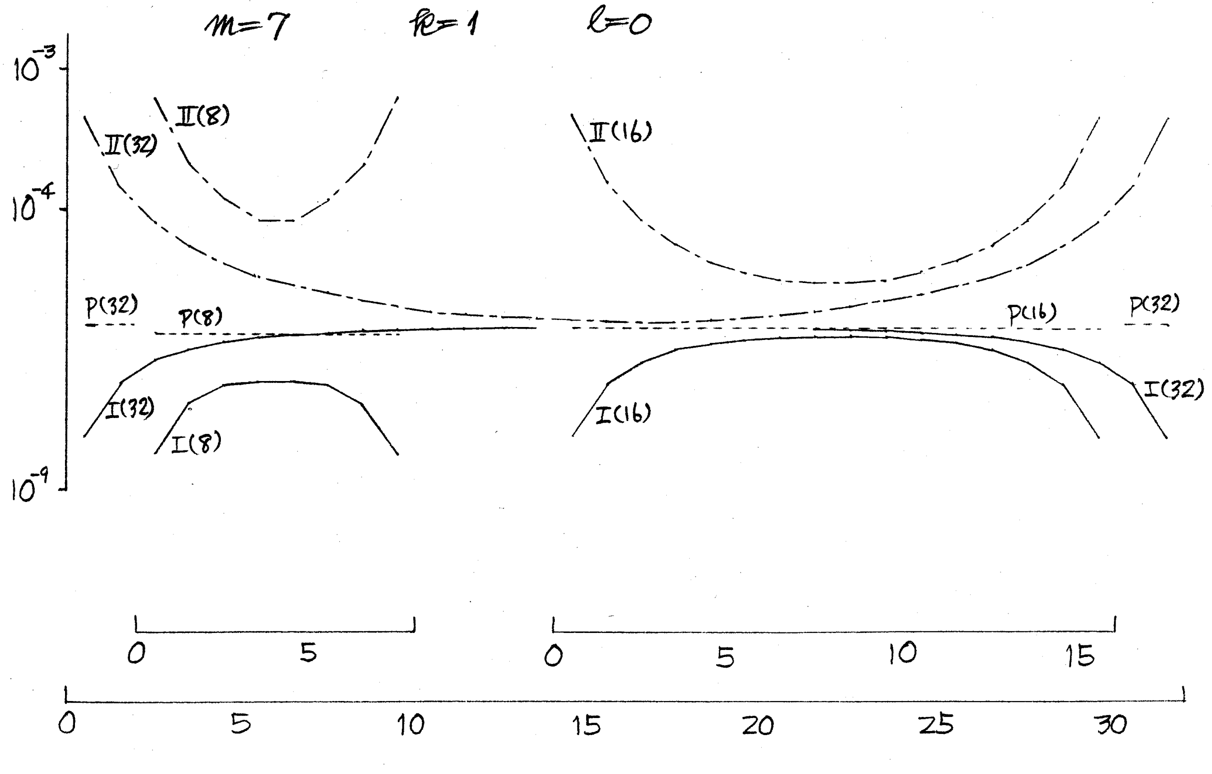

m=7 k=1 l=0
10^-3
10^-4
10^-9
II(8)
II(32)
II(16)
P(32)
P(8)
P(16)
P(32)
I(32)
I(8)
I(16)
I(32)
0
5
0
5
10
15
0
5
10
15
20
25
30

Fig. 2-4

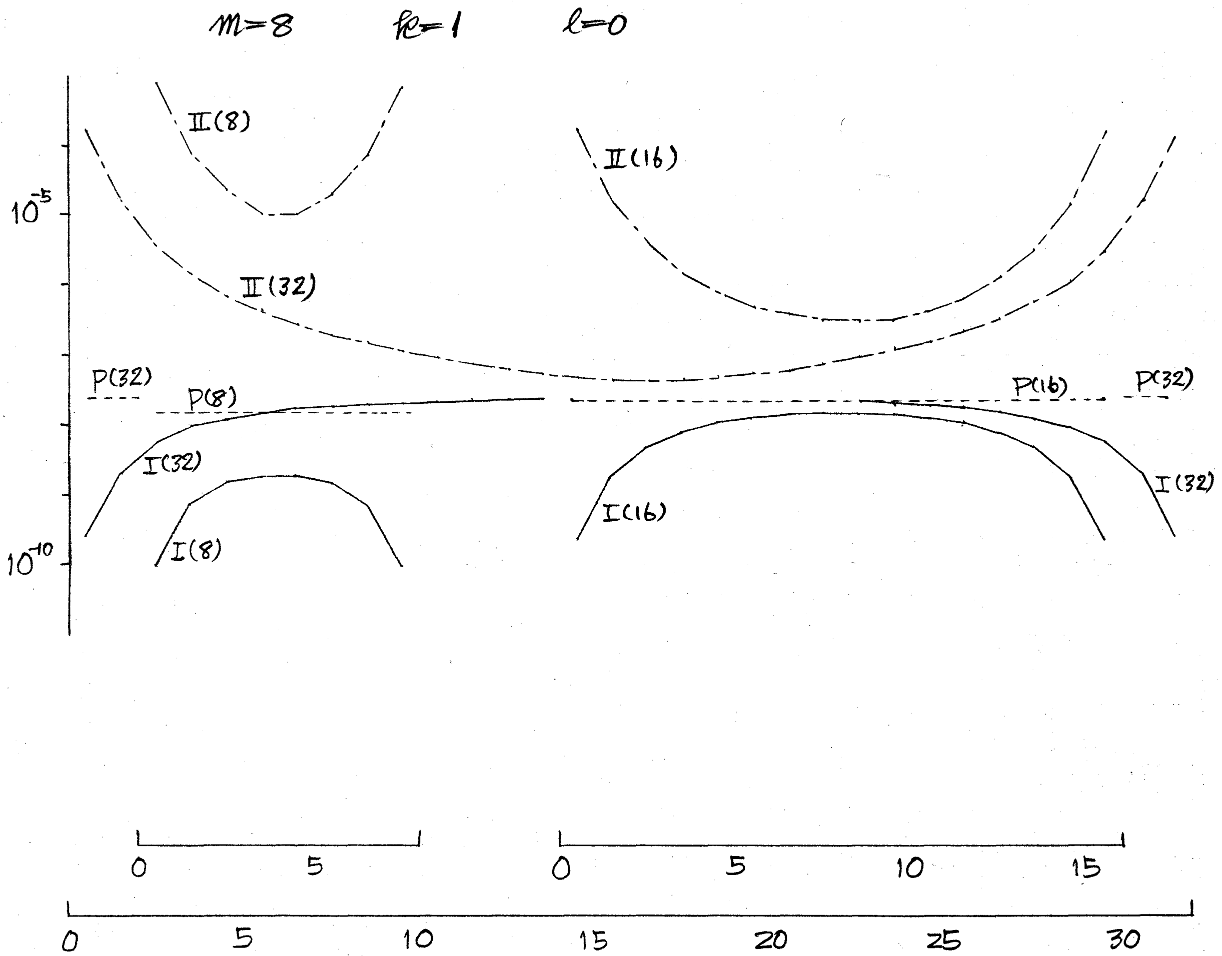

m=8 k=1 l=0
II(8)
II(16)
II(32)
10^{-5}
10^{-10}
P(32)
P(8)
P(16)
P(32)
I(32)
I(8)
I(16)
I(32)
0
5
0
5
10
15
0
5
10
15
20
25
30

Fig. 3-1

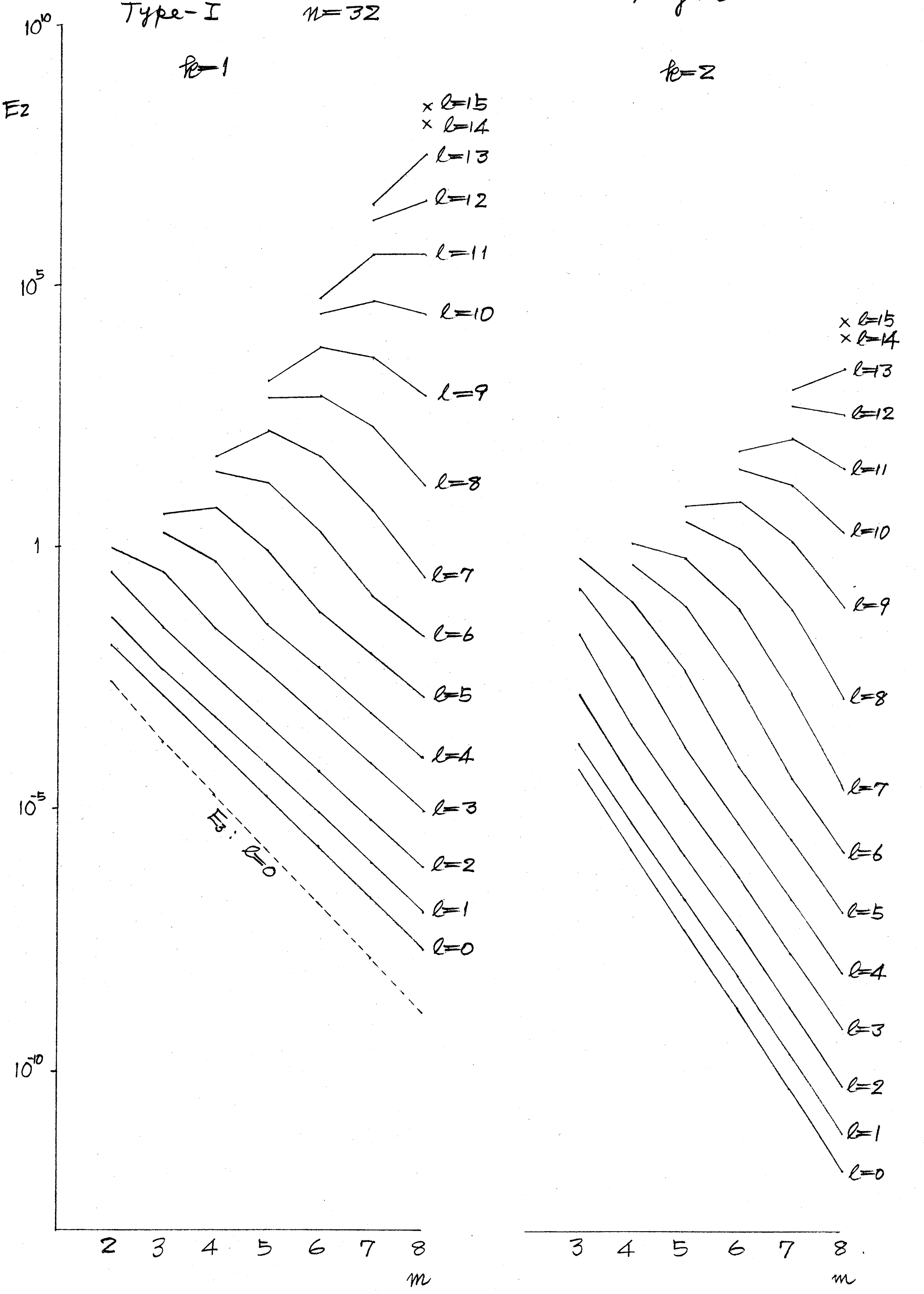
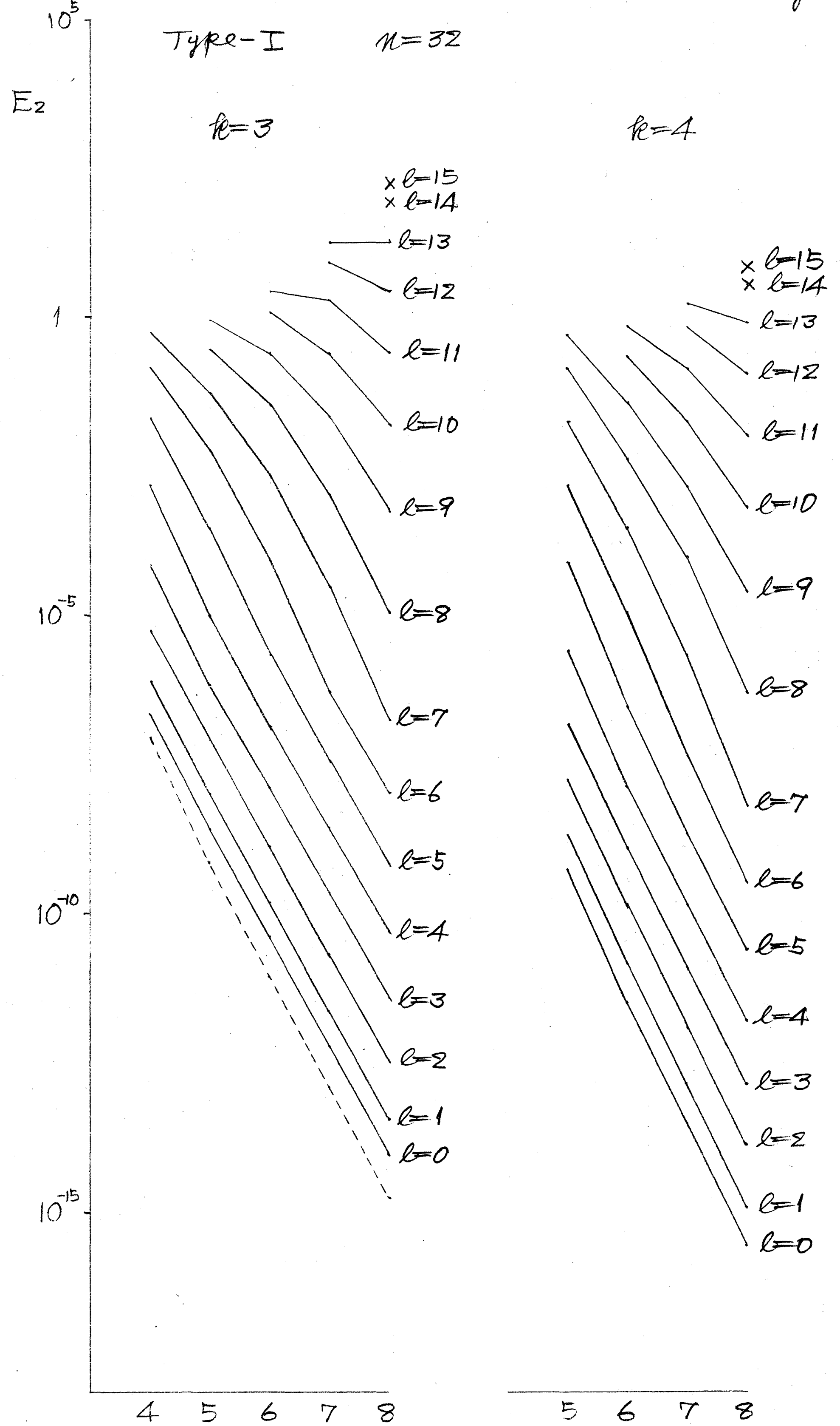
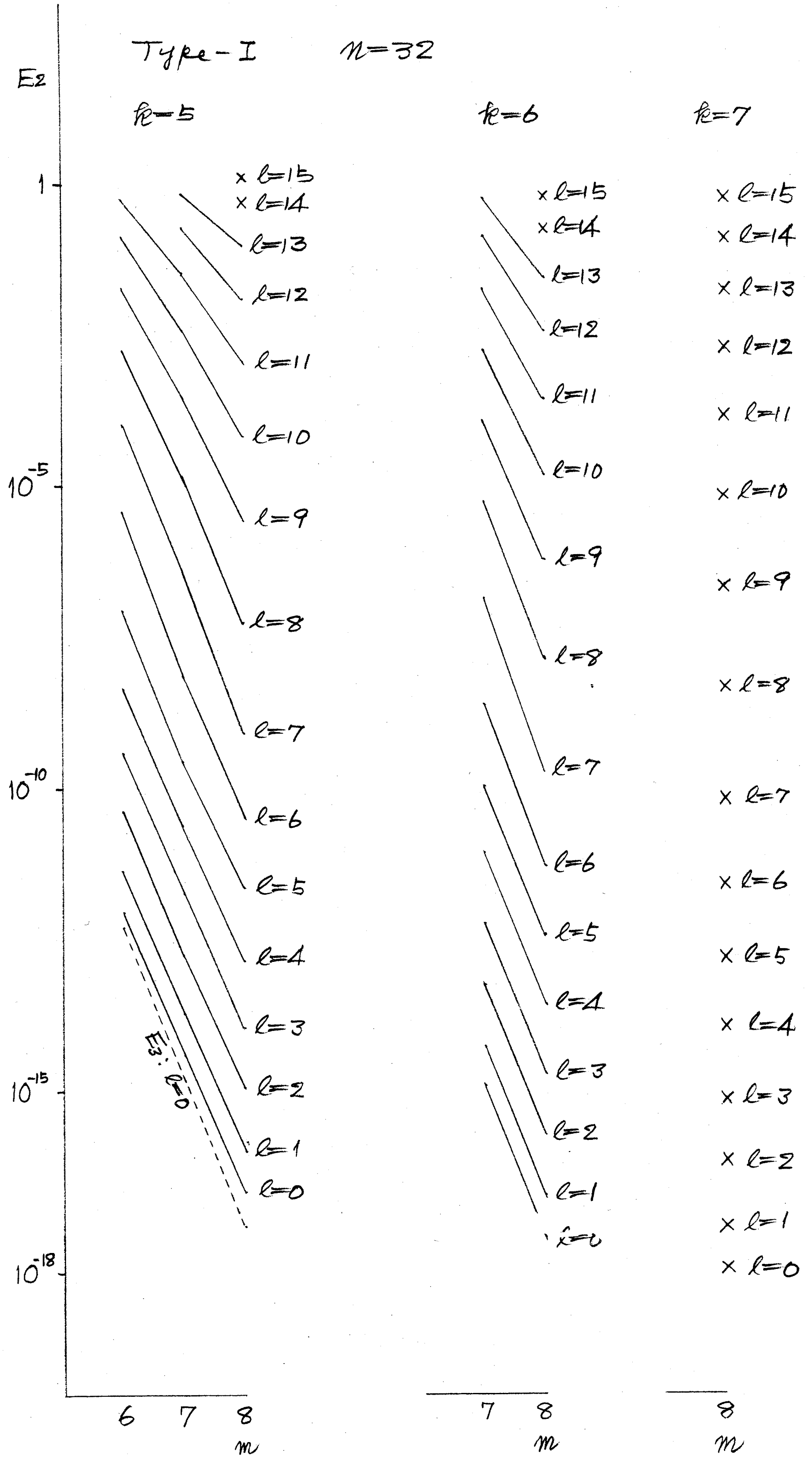

Type-I
n=32
k=1
k=2
Ez
10^{10}
10^{5}
1
10^{-5}
10^{-10}
l=15
l=14
l=13
l=12
l=11
l=10
l=9
l=8
l=7
l=6
l=5
l=4
l=3
l=2
l=1
l=0
E3 : l=0
2 3 4 5 6 7 8
3 4 5 6 7 8
m
m

Fig. 3-2



10^5
E_2
1
10^{-5}
10^{-10}
10^{-15}
Type-I
n=32
k=3
k=4
l=15
l=14
l=13
l=12
l=11
l=10
l=9
l=8
l=7
l=6
l=5
l=4
l=3
l=2
l=1
l=0
4
5
6
7
8
m

Fig. 3-3


Type-I
$n=32$
E_2
$k=5$
$k=6$
$k=7$
1
10^{-5}
10^{-10}
10^{-15}
10^{-18}
× $l=15$
× $l=14$
$l=13$
$l=12$
$l=11$
$l=10$
$l=9$
$l=8$
$l=7$
$l=6$
$l=5$
$l=4$
$l=3$
$l=2$
$l=1$
$l=0$
E_3 : $l=0$
6
7
8
m