

## Unirational 準楕円曲面

阪大 理 宮西正直

$k$  を標数  $p$  の代数的閉体とする。  $k$  上定義された非特異射影曲面  $X$  について、非特異射影曲線  $C$  上への写像  $f: X \rightarrow C$  が存在して  $f$  の殆んどすべてのファイバーは算術種数 1 の既約特異な有理曲線ならば、  $X$  を準楕円曲面と呼ぶ。このような曲面は  $k$  の標数  $p$  が 2 または 3 の場合にのみ存在し (Tate [10] 参照)、  $f$  の殆んどすべてのファイバーは唯一つの cusp を持つ。  $C$  の  $k$  上の代数函数体を  $k$  とおけば、  $f$  の生成ファイバー  $X_k$  から、その唯一つの特異点を取り去ったアフィン曲線は、アフィン直線  $A^1$  の楕円形式になる ([5], [8] 参照)。一方、  $X$  が  $k$  上 unirational である必要十分条件は  $C$  が  $k$  上有理曲線であることである。

他方、  $X_k$  の特異点の ( $X$  における) 閉包  $E$  は非特異既約曲線で、  $f_E: E \rightarrow C$  により  $E$  は  $C$  の次数  $p$  の純非分離的被覆になっている (Mumford [7])。本報告では以下、準楕円曲面

$f: X \rightarrow C$  は有理断面をもつていふと仮定する。即ち  $X_k$  は  $k$ -有理点をもつと仮定する。本報告の主要結果は次の二つの定理である。

定理 1.  $k$  を標数 3 の代数的閉体とする。有理断面をもつ unirational 準楕円曲面は  $\mathbb{A}^3$  の超曲面  $t^2 = x^3 + \varphi(y)$  に  $k$  上双有理である。但し  $\varphi(y) \in k[y]$  で  $\deg_y \varphi$  は 3 と互いに素。逆に  $K = k(t, x, y)$  と,  $t^2 = x^3 + \varphi(y)$  ( $\varphi(y) \in k[y]$ ,  $d = \deg_y \varphi$  は 3 と互いに素) という関係式を満たす元  $t, x, y$  で  $k$  上定義された 2 次元代数函数体とする。  $m$  と  $d$  の  $6$  による商として,  $K$  が  $k$  上有理的でなければ,  $\hat{H}$  を  $K$  の非特異極小射影モデルとする。更に  $d \geq 7$  ならば次の二条件が成立すると仮定する:

(1)  $\varphi'(y) = 0$  の各根  $\alpha$  について,  $v_\alpha(\varphi(y) - \varphi(\alpha)) \leq 5$ . 但し  $v_\alpha$  は  $v_\alpha(y - \alpha) = 1$  とするような  $k[y]$  の  $(y - \alpha)$ -進付値。

(2)  $\varphi'(y) = 0$  のある根  $\alpha$  について,  $\varphi(y) - \varphi(\alpha) = a(y - \alpha)^3 + (y - \alpha)$  の次数  $\geq 4$  の項) (但し  $a \in k^*$ ) とするならば,  $v_\alpha(\varphi(y) - \varphi(\alpha) - a(y - \alpha)^3) \leq 5$ .

すると次の結果が成立する:

1.  $m = 0$  (即ち  $d \leq 5$ ) ならば,  $K$  は  $k$  上有理的。  $d \geq 7$  ならば  $K$  は  $k$  上有理的ではない。従って  $K$  の極小モデル  $\hat{H}$  が存在する。

2.  $m = 1$  (即ち  $7 \leq d \leq 11$ ) ならば,  $\hat{H}$  は  $K^3$ -曲面。

3.  $m > 1$  (即ち  $d \geq 13$ ) ならば,  $p_a(\hat{H}) = p_g(\hat{H}) = m$ ,  
 $\dim H^1(\hat{H}, \mathcal{O}_{\hat{H}}) = 0$ ,  $\ell$ -種数  $P_\ell(\hat{H}) = \ell(m-1) + 1$ ,  $\hat{H}$  の標準次元 (= 小平次元)  $K(\hat{H}) = 1$ .

定理 2.  $k$  を標数 2 の代数的閉体とする. 有理断面をもつ unirational 準楕円曲面は  $A^3$  の超曲面  $t^2 = x^3 + \Psi(y)x + \Phi(y)$  (但し  $\Psi(y), \Phi(y) \in k[y]$ ) に  $k$  上双有理である. 逆に  $K = k(t, x, y)$  を  $k$  上 2 次元の代数函数体で,  $t^2 = x^3 + \Psi(y)$  ( $\Psi(y) = y\varphi(y)^2$ ,  $d = \deg_y \varphi$ ) という関係式をもつ 3 元  $t, x, y$  で生成されたものとする.  $m$  を  $d$  の 3 による商として,  $K$  が  $k$  上有理的でない場合は,  $K$  の  $k$  上の非特異極小モデルを  $\hat{H}$  とする. 更に次の条件が成立していると仮定する:  $k$  の任意の元  $\alpha$  について,  $\Psi(y + \alpha) = \sum_{i \geq 0} a_i y^i$  とかけば,  $a_1, a_3, a_5$  のどれか一つは零でない. すると次の結果が成立する:

1.  $m = 0$  (即ち  $0 \leq d \leq 2$ ) ならば,  $K$  は  $k$  上有理的.  $m > 0$  ならば  $K$  は  $k$  上有理的でない. 従って  $K$  の極小モデル  $\hat{H}$  が存在する.

2.  $m = 1$  (即ち  $3 \leq d \leq 5$ ) ならば,  $\hat{H}$  は  $K3$ -曲面.

3.  $m > 1$  (即ち  $d \geq 6$ ) ならば,  $p_a(\hat{H}) = p_g(\hat{H}) = m$ ,  $\dim H^1(\hat{H}, \mathcal{O}_{\hat{H}}) = 0$ ,  $\ell$ -種数  $P_\ell(\hat{H}) = \ell(m-1) + 1$ ,  $\hat{H}$  の標準次元  $K(\hat{H}) = 1$ .

### § 1. Unirational 準楕円曲面の一般論.

1.1.  $k$  を標数  $p > 0$  の代数的閉体,  $f: X \rightarrow C$  を  $k$  上定義された準楕円曲面とする.  $f$  の生成ファイバー  $X_{\mathcal{L}}$  は既約正規射影曲線で, その算術種数は 1, 幾何種数は 0 だから,  $X_{\mathcal{L}}$  は唯一の特異点を持ち, その重複度は 2.  $\mathcal{L}_0$  を  $\mathcal{L}$  の代数的分離閉包とすれば,  $X_{\mathcal{L}_0}$  も正規射影曲線で, その算術種数は 1 (Chevalley [3, Th.5, p.99] 参照). よって  $p = 2$  又は  $3$  で (Tate [10] 参照),  $X_{\mathcal{L}}$  の特異点は重複度 2 の one-place point. 故に  $f$  の一般ファイバーは唯一の cusp をもつ.

1.2.  $X_{\mathcal{L}}$  の唯一の特異点の閉包を  $E$  とし,  $f$  の  $E$  への制限を  $f_E: E \rightarrow C$  で表わす. 1.1 によれば  $f_E$  は 1-1 写像だから,  $\deg f_E = p^n$  ( $n \geq 0$ ) とかけた. しかし  $f$  の一般ファイバー  $f^{-1}(E)$  について  $f^{-1}(E) \cap E$  は  $f^{-1}(E)$  の cusp だから,  $(f^{-1}(E) \cdot E) = 2$  又は  $3$ . 故に  $n = 1$  で  $(f^{-1}(E) \cdot E) = p$ . 即ち  $E$  は  $f_E$  で  $C$  の次数  $p$  の純非分離的被覆になる. もし  $E$  が特異点  $Q$  をもてば,  $(f^{-1}(f(Q)) \cdot E) \geq 4$  となるから,  $E$  は非特異曲線.

1.3. こゝで楕円曲面又は準楕円曲面  $f: X \rightarrow C$  の標準因子公式を復習する ([2] 参照).  $f$  のファイバー  $f^{-1}(E)$  が 2 つ以上の既約成分をもつか, 唯一の既約成分をもつてその重複度  $\geq 2$  である場合,  $f^{-1}(E)$  を特異ファイバーという.  $f^{-1}(E) = \sum_{i=1}^r n_i C_i$  ( $C_i$  は既約成分で  $n_i > 0$ ) という特異ファイバーについて,  $\text{G.C.D.}(n_i) = m > 1$  となるとき,  $f^{-1}(E)$  を重複ファイバーといい,  $m$  をその

重複度という。このとき  $\sum_i (n_i/m) C_i$  は  $f^{-1}(P)$  の簡約型という。  $f$  のどのファイバーも (第一種) 例外曲線と含まない場合に,  $X$  (又は  $f: X \rightarrow C$ ) を相対極小楕円 (又は準楕円) 曲面という。  $f$  のファイバーに含まれるすべての例外曲線を縮小して (即ち縮小  $\sigma: X \rightarrow X_0$  によって), 相対極小楕円 (又は準楕円) 曲面  $f_0: X_0 \rightarrow C$  が得られて  $f = f_0 \circ \sigma$  となる。

補題 (標準因子公式).  $f: X \rightarrow C$  を相対極小楕円 (又は準楕円) 曲面,  $\{m_i Z_i; i \in I\}$  を  $f$  の重複ファイバーのすべてとする。但し,  $Z_i$  は簡約型で,  $m_i$  はその重複度。すると  $X$  の標準可逆層  $\omega_X$  は次のように与えられる:

$$\omega_X \cong f^*(S) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\sum_i a_i Z_i), \quad S \cong \omega_C \otimes L^{-1}.$$

但し, (i)  $0 \leq a_i \leq m_i - 1$ , (ii)  $L$  は  $C$  上の可逆層で,  $f_* \omega_X \cong \omega_C \otimes L^{-1}$  又は  $R^1 f_* \mathcal{O}_X \cong L \otimes T$  ( $T$  は  $C$  上のねじれ層) で与えられる。

$t = \text{length } T$  とおけば,

$$\deg S = \chi(\mathcal{O}_X) - 2\chi(\mathcal{O}_C) + t.$$

但し  $\chi(\mathcal{O}_X)$  は  $X$  の Euler-Poincaré 標数。  $C$  上の点  $P$  について,

$$T_P \neq 0 \iff H^0(f^{-1}(P), \mathcal{O}_X) \neq k \iff f^{-1}(P) \text{ は例外重複ファイバー.}$$

1.4.  $f: X \rightarrow C$  を準楕円曲面で, 有理断面  $D$  をもつものとする。実は  $D$  は正則断面である ([4, IV (2.8.5)] 参照)。  $f$  の生成ファイバー  $X_k$  ( $k = k(C)$ ) から唯一つの特異点を取り去ったアフィン曲線はアフィン直線  $A^1$  の楕円  $k$ -形式で,  $k$ -有理点を

もつ。そのような  $k$ -形式は次のアフィン平面曲線に  $k$  上双有理である: (i)  $p=3$  ならば  $t^2 = x^3 + \gamma$ ,  $\gamma \in k - k^3$ ; (ii)  $p=2$  ならば  $t^2 = x^3 + \beta x + \gamma$ ,  $\beta, \gamma \in k$  で  $\beta \notin k^2$  又は  $\gamma \notin k^2$ .  
 さらに,  $X$  が  $k$  上 unirational  $\iff C$  が  $k$  上有理的. 実際,  $\implies$  は Lüroth の定理から明らかであり,  $\impliedby$  についても  $p=3$  ならば  $k^{\frac{1}{3}} \otimes_k k(X)$  が,  $p=2$  ならば  $k^{\frac{1}{2}} \otimes_k k(X)$  が  $k$  上有理的になることからわかる. すなわち  $X$  は  $A^3$  の中の次の超曲面に双有理である:  $p=3$  ならば  $t^2 = x^3 + \varphi(y)$  ( $\varphi(y) \in k[y]$  で  $d = \deg_y \varphi$  は 3 と互いに素);  $p=2$  ならば  $t^2 = x^3 + \psi(y)x + \pi(y)$  ( $\psi(y), \pi(y) \in k[y]$ ).

1.5. 補題. 相対極小準楕円曲面  $f: X \rightarrow C$  について,  $X$  は  $k$  上 unirational で  $f$  は正則断面  $D$  をもつと仮定すれば, 次の結果が成立する:

- (i)  $f$  は重複ファイバーを持たない.
- (ii)  $\chi(\mathcal{O}_X) = -\langle D^2 \rangle$ .
- (iii)  $\chi(\mathcal{O}_X) \leq 1$  ならば  $X$  は  $k$  上有理的;  $\chi(\mathcal{O}_X) = 2$  ならば  $X$  は K3-曲面;  $\chi(\mathcal{O}_X) = 3$  ならば,  $p_a(X) = p_g(X) = 0$ ,  $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ,  $\rho$ -種数  $\rho_r(X) = r(\chi(\mathcal{O}_X) - 2) + 1$ ,  $X$  の標準次元  $\kappa(X) = 1$ .

証明. (i)  $f$  は正則断面  $D$  をもつから重複ファイバーを持たない.  
 (ii)  $f$  に重複ファイバーがないから, 1.3 の記号で,  $a_i = 0$  ( $\forall i \in I$ ) かつ  $t = 0$ .  $C$  は非特異有理曲線だから  $\omega_X \cong f^* \mathcal{O}_C(\chi(\mathcal{O}_X) - 2)$ .

所で、非特異有理曲線である正則断面  $D$  に算術種数公式を応用して、 $-2 = (D^2) + (D \cdot K_X) = (D^2) + \chi(\mathcal{O}_X) - 2$ . 故に  $\chi(\mathcal{O}_X) = -(D^2)$ .

(iii)  $X$  の  $n$ -種数  $P_n(X)$  は

$$P_n(X) = \dim H^0(X, \omega_X^{\otimes n}) = \dim H^0(C, \mathcal{O}_C(n(\chi(\mathcal{O}_X) - 2)))$$

で与えられる。  $\chi(\mathcal{O}_X) \leq 1$  ならば  $P_n(X) = 0$  ( $\forall n \geq 0$ ). 特に  $P_0(X) = P_2(X) = 0$ . よって Castelnuovo の定理により  $X$  は  $\mathbb{C}$  上有理的。

$\chi(\mathcal{O}_X) = 2$  ならば  $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$  となり、 $X$  は  $K3$ -曲面 ([2] 参照)。

$\chi(\mathcal{O}_X) \geq 3$  ならば  $P_n(X) = n(\chi(\mathcal{O}_X) - 2) + 1$ . 故に  $\kappa(X) = 1$ ,  $P_g(X) = \chi(\mathcal{O}_X) - 1 = p_g(X)$ . よって  $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ .

1.6. 系.  $f: X \rightarrow C$  は 1.5 と同じ。もし  $X$  が  $\mathbb{C}$  上有理的でなければ  $X$  は  $K = k(X)$  の極小 (非特異射影) モデルである。

証明.  $e = \chi(\mathcal{O}_X) - 2$  とおく。すると  $K_X \sim e f^{-1}(P)$  (但し  $P$  は  $C \cong \mathbb{P}_k^1$  の点)。  $X$  が  $\mathbb{C}$  上有理的でなければ  $e \geq 0$  (1.5). 故に  $|K_X|$  は固定成分を含まないから  $X$  は第一種例外曲線を持たない。即ち  $X$  は極小モデルである。

1.7. 補題.  $f: X \rightarrow C$  を相対極小楕円 (又は準楕円) 曲面,  $D = \sum_i n_i E_i$  を 2 つ以上の既約成分をもつ特異ファイバーとすると各既約成分  $E_i$  は  $\mathbb{P}_k^1$  に同型で,  $(E_i^2) = -2$ .

証明. まず,  $(E_i \cdot D) = n_i (E_i^2) + \sum_{j \neq i} n_j (E_j \cdot E_i) = 0$ .  $D$  は連結だから  $(E_i^2) < 0$ . 所以  $K_X \sim f^{-1}(S)$  ( $S$  は  $C$  上の因子) となるから,  $(E_i \cdot K_X) = 0$ . 故に  $p_g(E_i) = \frac{1}{2}(E_i^2) + 1 \geq 0$ . よって  $p_g(E_i) = 0$  である。

$$(E_i^2) = -2.$$

§ 2.  $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$  の 2 重被覆について.

この節では証明を最小限にとどめるが、興味のある読者は自分で証明を試みられることをおすすめる。

2.1.  $k$  を標数  $p \geq 0$  の代数的閉体,  $\varphi(y)$  を次数  $d > 2$  の  $k$ -係数一変数多項式で  $A(x, y) = x^3 + \varphi(y)$  が既約多項式になるものとする.  $\varphi(y)$  は,  $p=3$  ならば次数が 3 の倍数である単項式を,  $p=2$  ならば次数が 2 の倍数である単項式を, 含まないと仮定しても定理 1, 2 の証明のためには一般性を失われない.  $\mathbb{P}_k^3$  の超平面  $t^2 = A(x, y)$  は  $F_0 = \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$  の 2 重被覆と考えられる. ここで  $K = k(t, x, y)$  とおき,  $H_0$  を  $F_0$  の  $K$  における正規化,  $\rho_0: H_0 \rightarrow F_0$  を正規化写像とする.  $A(x, y) = 0$  で定義される  $F_0$  上の既約閉曲線を  $C$  とおけば, 次の補題が成立する.

2.1.1. 補題.  $H_0$  の点  $Q$  をとり  $P = \rho_0(Q)$  とおく.  $P$  が  $C$  の特異点でなければ  $Q$  は  $H_0$  の単純点である.

証明は  $H_0$  の定義方程式を局所的に書き上げて, 特異点の Jacobi 判定法を応用します. そのために,  $U_1 = \rho_0^{-1}(F_0 - (x=\infty) \cup (y=\infty))$ ,  $U_2 = \rho_0^{-1}(F_0 - (\xi=\infty) \cup (y=\infty))$ ,  $U_3 = \rho_0^{-1}(F_0 - (x=\infty) \cup (\eta=\infty))$ ,  $U_4 = \rho_0^{-1}(F_0 - (\xi=\infty) \cup (\eta=\infty))$  とおく. 但し  $\xi = 1/x$ ,  $\eta = 1/y$ .

2.1.2. 補題. ( $p \neq 2$  の場合). 各  $U_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) は  $\mathbb{A}_k^3$  の次の超平



面  $V_i$  に  $k$ -同型である. (1)  $V_1: t^2 = x^3 + \varphi(y)$ ; (2)  $V_2: t^2 = x + x^4\varphi(y)$ ; (3)  $V_3: t^2 = x^3y^d + \psi(y)$  ( $d \equiv 0 \pmod{2}$  の場合),  $t^2 = x^3y^{d+1} + y\psi(y)$  ( $d \equiv 1 \pmod{2}$  の場合); (4)  $V_4: t^2 = xy^d + x^4\psi(y)$  ( $d \equiv 0 \pmod{2}$  の場合),  $t^2 = xy^{d+1} + x^4y\psi(y)$  ( $d \equiv 1 \pmod{2}$  の場合).

但し  $\psi(y) = y^d\varphi(1/y)$  で  $\psi(0) \neq 0$ .

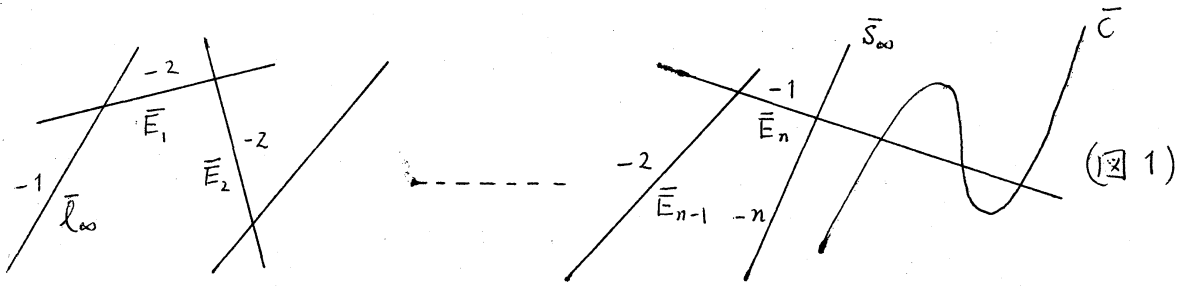
2.1.3.  $p=2$  の場合は仮定より  $\varphi(y) = y\varphi_1(y)^2$  ( $d_1 = \deg_y \varphi_1 > 0$ ) とかけたことに注意しよう.

補題. 各  $V_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) は  $A_k^3$  の次の超平面  $V_i$  に  $k$ -同型. (1)  $V_1: t^2 = x^3 + \varphi(y)$ ; (2)  $V_2: t^2 = x + x^4\varphi(y)$ ; (3)  $V_3: t^2 = x^3y^{d+1} + y\varphi_1(y)^2$ ; (4)  $V_4: t^2 = xy^{d+1} + x^4y\varphi_1(y)^2$ . 但し  $\varphi_1(y) = y^{d_1}\psi_1(1/y)$  で  $\psi_1(0) \neq 0$ .

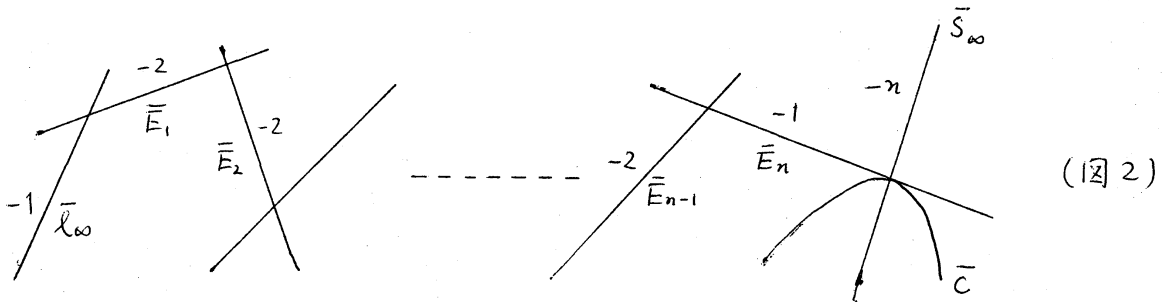
2.2. 既約閉曲線  $C$  の特異点は次の通り:  $F_0 = (x=\infty) \cup (y=\infty)$  上の特異点  $P = (x=\beta, y=\alpha)$ , 但し  $3\beta^2 = \varphi'(\alpha) = \beta^3 + \varphi(\alpha) = 0$ ;  $P_\infty = (\xi=0, \eta=0)$ , 但し  $\xi = 1/x, \eta = 1/y, \eta^d + \xi^3\psi(\eta) = 0, \psi(\eta) = \eta^d\varphi(1/\eta)$ . 特に  $P_\infty$  は  $d=3n+1$  のとき重複度  $(3, 3, \dots, 3, 1, \dots)$ ,  $d=3n+2$  のとき重複度  $(3, 3, \dots, 3, 2, 1, \dots)$  をもつ cuspidal 特異点であり,  $d=3n$  のとき  $n$  次無限小近傍に 3 つの単純分枝をもつ tacnodal 特異点である.

2.3. 射影  $p_2: F_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$  で定まる  $F_0$  上の線形束を  $\mathcal{F} = \{l_\alpha; l_\alpha \text{ は } y=\alpha \text{ で定まるファイバー}\}$  で,  $\mathcal{F}$  の一般ファイバーを  $l$  で表わす.  $p_2^{-1}(\infty)$  を  $l_\infty$  で,  $x=\infty$  に対応する  $p_2$  の断面を  $S_\infty$  で表わす.  $\bar{\sigma}: \bar{F}$

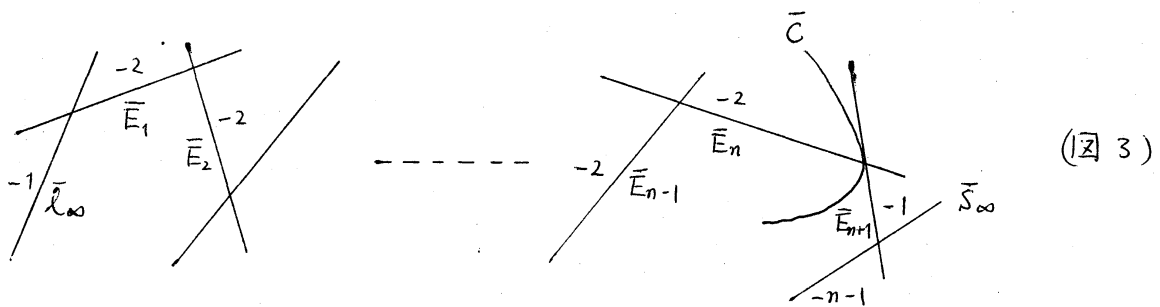
→  $F_0$  を  $C$  の特異点 (無限小特異点も含めて) を中心とするモノイダル変換で,  $C$  の固有変換  $\bar{C} = \sigma'(C)$  が非特異になるような, 最小のものとする.  $\bar{S}_\infty = \sigma'(S_\infty)$ ,  $\bar{l}_\infty = \sigma'(l_\infty)$  とおけば,  $\sigma^{-1}(\bar{l}_\infty \cup C \cup S_\infty)$  は次のような配図をもつ:



但し  $d = 3n$  ( $n > 0$ ) から  $p \neq 3$  ;



但し  $d = 3n + 1$  ( $n > 0$ ) で  $(\bar{C} \cdot \bar{E}_n) = 3$  ;



但し  $d = 3n + 2$  ( $n > 0$ ) で  $(\bar{C} \cdot \bar{E}_{n+1}) = 2$ .

2.4.  $(A)_\infty|_{F_0} = 3S_\infty + dl_\infty$  となったことに注意すれば,  $(\sigma^*A)$  が次のように表わされたことが確かめられた:

$$(\sigma^*A) = \bar{C} + (3\bar{E}_1 + 6\bar{E}_2 + \cdots + 3n\bar{E}_n) + \bar{D} - 3(\bar{S}_\infty + \bar{E}_1 + 2\bar{E}_2 + \cdots + n\bar{E}_n) \\ - d(\bar{L}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) = \bar{C} - 3\bar{S}_\infty - d(\bar{L}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) + \bar{D}$$

但し  $d = 3n$  又は  $d = 3n + 1$  ;

$$(\sigma^*A) = \bar{C} + (3\bar{E}_1 + 6\bar{E}_2 + \cdots + 3n\bar{E}_n + (3n+2)\bar{E}_{n+1}) + \bar{D} - 3(\bar{S}_\infty + \bar{E}_1 + 2\bar{E}_2 + \cdots + n\bar{E}_n + (n+1)\bar{E}_{n+1}) \\ - d(\bar{L}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_{n+1}) \\ = \bar{C} - 3\bar{S}_\infty - \bar{E}_{n+1} - d(\bar{L}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_{n+1}) + \bar{D}$$

但し  $d = 3n + 2$ . ここで  $\bar{D} (\geq 0)$  は,  $C$  の  $F_0 - (x=\infty) \cup (y=\infty)$  に含まれた特異点 (無限小特異点も含めて) を中心とするモノイダル変換  $\sigma$  から生じる例外曲線の和集合  $\bar{E}$  を台にもつ, 因子である.

2.5.  $(\sigma^*A)$  は唯一通りの方法で  $(\sigma^*A) = \bar{B} - 2\bar{Z}$  とかける: 但し  $\bar{B}$  は各既約成分の係数が1の因子である.  $p \neq 2$  ならば,  $\bar{H}$  を  $\bar{F}$  の  $K$  における正規化,  $\bar{p}: \bar{H} \rightarrow \bar{F}$  を正規化写像として,  $\bar{B}$  は2重被覆  $\bar{p}: \bar{H} \rightarrow \bar{F}$  の branch locus である.  $\bar{B}, \bar{Z}$  は次のように具体的にかける:

2.5.1.  $d = 6m$  (即ち  $n = 2m$  として  $d = 3n$ ) の場合.

$$\bar{B} = \bar{C} + \bar{S}_\infty + \bar{D}_1$$

$$\bar{Z} = 2\bar{S}_\infty + 3m(\bar{L}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) - \bar{D}_2$$

但し  $\bar{D}_1, \bar{D}_2$  は次の条件から一通りに定まる因子;  $\bar{D}_1$  の各既約成分の係数は1,  $\bar{D}_2 \geq 0$ ,  $\bar{D}_1 + 2\bar{D}_2 = \bar{D}$ ,  $\text{Supp}(\bar{D}_1) \cup \text{Supp}(\bar{D}_2) \subset E$ . 以下の場合でも同様.

2.5.2.  $d = 6m + 1$  (BPS  $n = 2m$  として  $d = 3n + 1$ ) の場合.

$$\bar{B} = \bar{C} + \bar{S}_\infty + (\bar{l}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) + \bar{D}_1$$

$$\bar{Z} = 2\bar{S}_\infty + (3m+1)(\bar{l}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) - \bar{D}_2.$$

2.5.3.  $d = 6m + 2$  (BPS  $n = 2m$  として  $d = 3n + 2$ ) の場合.

$$\bar{B} = \bar{C} + \bar{S}_\infty + \bar{E}_{n+1} + \bar{D}_1$$

$$\bar{Z} = 2\bar{S}_\infty + \bar{E}_{n+1} + (3m+1)(\bar{l}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_{n+1}) - \bar{D}_2.$$

2.5.4.  $d = 6m + 3$  (BPS  $n = 2m + 1$  として  $d = 3n$ ) の場合.

$$\bar{B} = \bar{C} + \bar{S}_\infty + (\bar{l}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) + \bar{D}_1$$

$$\bar{Z} = 2\bar{S}_\infty + (3m+2)(\bar{l}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) - \bar{D}_2.$$

2.5.5.  $d = 6m + 4$  (BPS  $n = 2m + 1$  として  $d = 3n + 1$ ) の場合.

$$\bar{B} = \bar{C} + \bar{S}_\infty + \bar{D}_1$$

$$\bar{Z} = 2\bar{S}_\infty + (3m+2)(\bar{l}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) - \bar{D}_2.$$

2.5.6.  $d = 6m + 5$  (BPS  $n = 2m + 1$  として  $d = 3n + 2$ ) の場合.

$$\bar{B} = \bar{C} + \bar{S}_\infty + (\bar{l}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) + \bar{D}_1$$

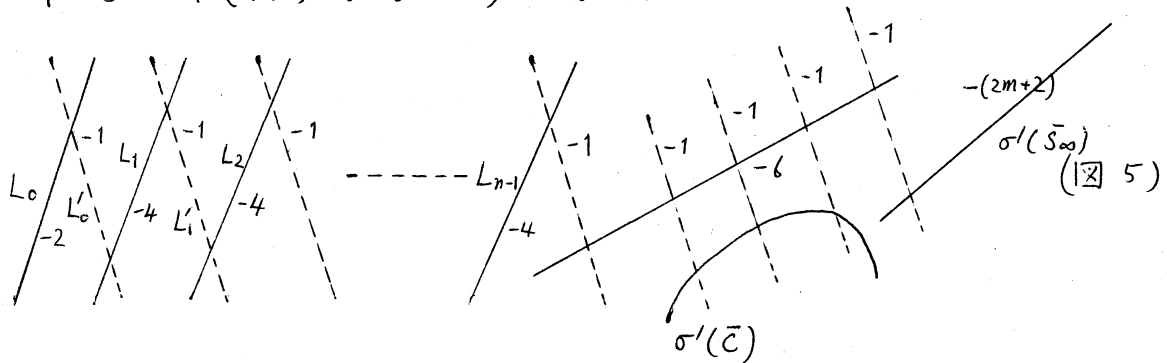
$$\bar{Z} = 2\bar{S}_\infty + (3m+3)(\bar{l}_\infty + \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_{n+1}) - \bar{D}_2.$$

2.6.  $\sigma: F \rightarrow \bar{F}$  を次の性質をもつモノイダル変換で最小のものとする: 2.5のように  $((\bar{\sigma}\sigma)^*A) = B - 2Z$  と書いたとき  $B$  の各既約成分は  $\text{Supp}(B)$  の連結成分である.  $H$  を  $F$  の  $K$  における正規化,  $\rho: H \rightarrow F$  を正規化写像とすれば, 次の可換図式が得られる. 但して,  $\tau$  は正規化写像と可換になるような自然な写像である:

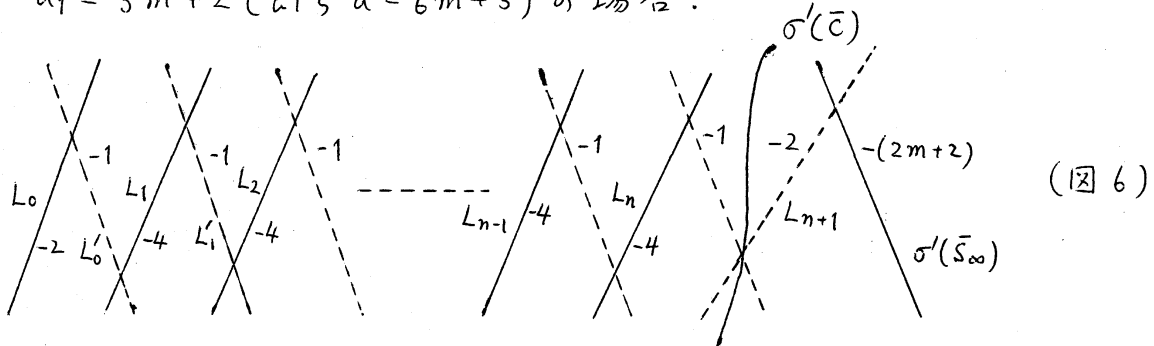


$(1 \leq i < n)$  等々 …… .

$d_1 = 3m + 1$  (RPS  $d = 6m + 3$ ) の場合.



$d_1 = 3m + 2$  (RPS  $d = 6m + 5$ ) の場合.



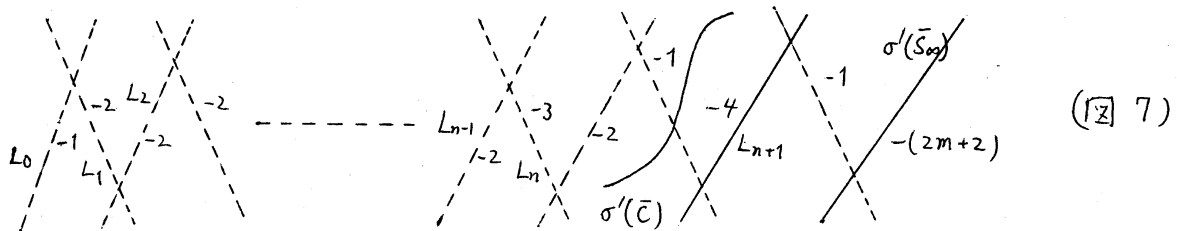
2.6.3. 4.4.2 以示すように,  $p=2$  の場合でも  $H$  は非特異射影曲面である.

2.6.4.  $p \neq 2$  の場合,  $(\sigma\sigma)^{-1}(l_\infty \cup C \cup S_\infty)$  の配図は次の通り.

$d = 6m$  ( $m > 0$ ) の場合. 図 1. 但し  $\bar{l}_\infty, \bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n$  を破線でおきかえよ.

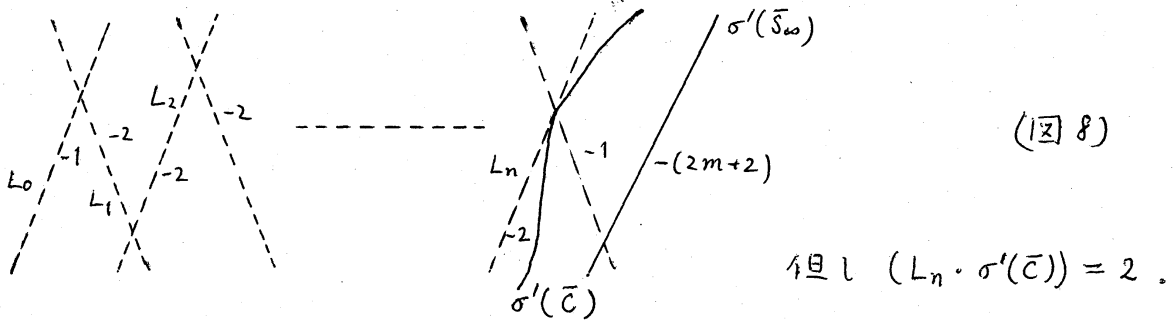
$d = 6m + 1$  ( $m > 0$ ) の場合. 図 4.

$d = 6m + 2$  ( $m > 0$ ) の場合. (但し  $n = 2m$ ).



$d = 6m + 3$  の場合. 図 5.

$d = 6m + 4$  の場合. (但し  $n = 2m + 1$ ).



$d = 6m + 5$  の場合. 図 6.

2.7. この分節では,  $p = 2$  ならば  $H$  は非特異であると仮定する.

2.7.1. 補題. (1)  $F$  上の因子  $D_1, D_2$  について  $(P^{-1}(D_1) \cdot P^{-1}(D_2)) = 2(D_1 \cdot D_2)$ .

(2)  $D$  が  $B$  の既約成分ならば  $P^{-1}(D) = 2\Delta$  となって,  $\Delta$  は非特異曲線. もし  $D \cong \mathbb{P}_k^1$  ならば  $\Delta \cong \mathbb{P}_k^1$ .

(3) ( $p \neq 2$  の場合)  $D \in F$  上の曲線で  $D \cong \mathbb{P}_k^1, D \notin \text{Supp}(B)$  とするものとする. (i)  $D \cap \text{Supp}(B) = \emptyset$  ならば,  $P^{-1}(D) = D_1 + D_2$  で,  $D_1 \cong D_2 \cong \mathbb{P}_k^1, D_1 \cap D_2 = \emptyset$  から  $(D_1^2) = (D_2^2) = (D^2)$ . (ii)  $D$  が  $B$  の丁度 2 つの既約成分  $B_1, B_2$  と重複度 1 で交叉し,  $D \cap B_1 \neq D \cap B_2$  ならば,  $P^{-1}(D)$  は既約で  $\mathbb{P}_k^1$  に同型. (iii)  $D \in$  図 8 の  $L_n$  とすれば,  $P^{-1}(D) = D_1 + D_2$  で,  $D_1 \cong D_2 \cong \mathbb{P}_k^1, (D_1^2) = (D_2^2) = -3$  から  $(D_1 \cdot D_2) = 1$ .

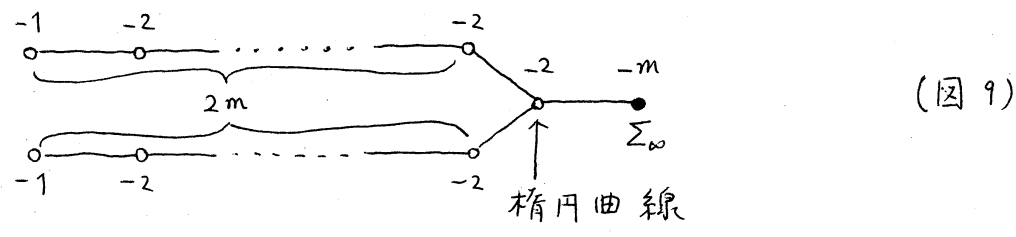
2.7.2.  $q = (p_2 \sigma \circ p_1): H \rightarrow P^1, \tilde{C} = \sigma'(C), \tilde{S}_\infty = \sigma'(S_\infty)$  とおけば  $\tilde{C}, \tilde{S}_\infty \subset \text{Supp}(\tilde{B})$  故に  $\tilde{C}, \tilde{S}_\infty \subset \text{Supp}(B)$ . よって 2.7.1 (2) より,  $P^{-1}(C) =$

$2I, p^{-1}(\tilde{S}_\infty) = 2\Sigma_\infty$  とかけて  $I, \Sigma_\infty$  は  $H$  上の非特異曲線.

補題.  $f: H \rightarrow \mathbb{P}^1$  は  $p \geq 5$  な  $s$  は楕円曲面で,  $p=2$  又は  $3$  な  $s$  は準楕円曲面である;  $\Sigma_\infty$  は  $f$  の正則断面である;  $p=3$  な  $s$  は  $I$  は  $f$  の (ファイバーの) 可動特異点の軌跡である;  $p=2$  な  $s$  は  $\Delta = p^{-1}((\sigma\sigma)S_0)$  は  $f$  の可動特異点の軌跡である. 但し  $S_0$  は  $x=0$  で定まる  $f$  の正則断面.

2.7.3.  $y=\infty$  に対応する  $f$  のファイバーを  $f^{-1}(\infty)$  で表わし,  $f^{-1}(\infty) \cup \Sigma_\infty$  を次のような重みつきグラフで表示しよう:  $f^{-1}(\infty) \cup \Sigma_\infty$  の各既約成分  $Z$  に 1 つの頂点と対応させ,  $p(Z) \notin \text{Supp}(B)$  な  $s$  は  $\circ$  で  $p(Z) \in \text{Supp}(B)$  な  $s$  は  $\bullet$  で表わす;  $Z$  の重みは自己交叉数  $(Z^2)$  である; 二つの既約成分が重複度 1 で交叉する場合に対応する頂点を辺  $\circ - \circ$  で結び, 丁度 1 点で重複度 2 をもって交叉する場合辺  $\circ = \circ$  で結ぶ.  $p \neq 2$  な  $s$  は 2.6.4, 2.7.1 から,  $f^{-1}(\infty) \cup \Sigma_\infty$  が次のような重みつきグラフをもつことがわかる:

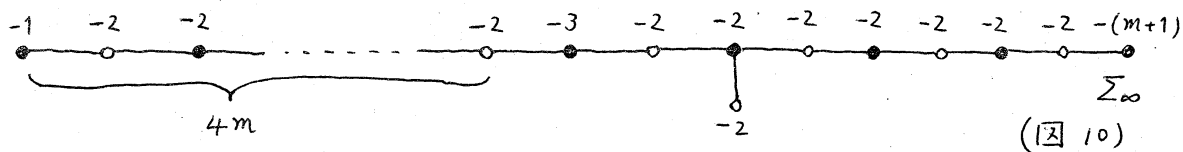
$d = 6m (m > 0)$  で  $p \neq 3$  の場合.



ここで  $f^{-1}(\infty) \cup \Sigma_\infty$  は唯一つの楕円曲線である既約成分を含む. その他の成分及び以下の場合のすべての成分は非特異射影有理曲線である.

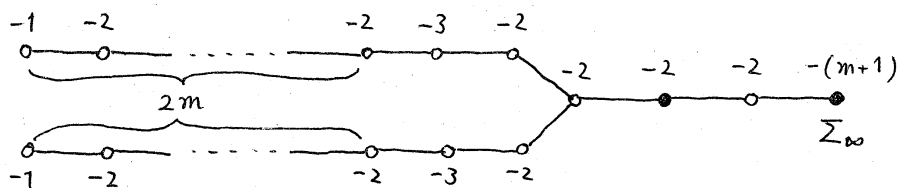


$d = 6m + 1 (m > 0)$  の場合.



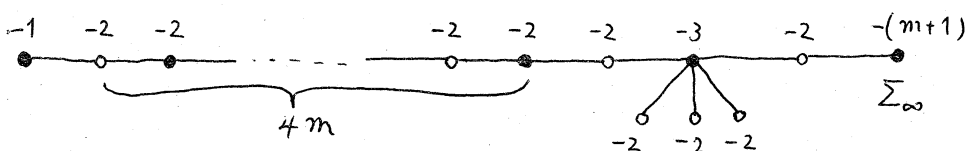
(図 10)

$d = 6m + 2 (m > 0)$  の場合.



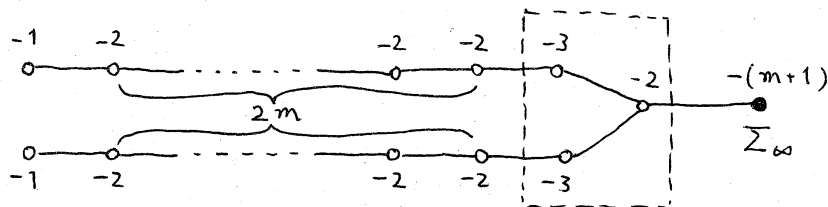
(図 11)

$d = 6m + 3 (m \geq 0)$  で  $p \neq 3$  の場合.



(図 12)

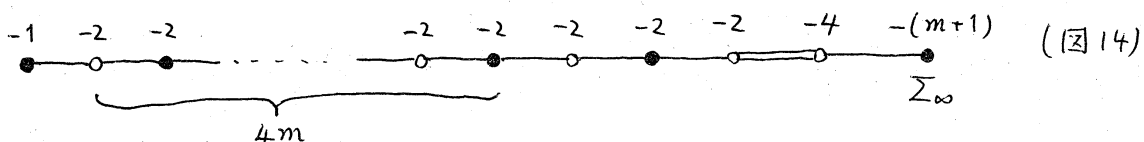
$d = 6m + 4 (m \geq 0)$  の場合.



(図 13)

3つの既約成分が1点で重複度1で交又する

$d = 6m + 5 (m \geq 0)$  の場合.



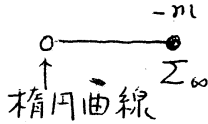
(図 14)

2.7.4. 補題.  $p=2$  の場合  $\mathcal{G}^1(\infty) \cup \Sigma_\infty$  の重みつきグラフは次の通り:  $d = 6m + 1 (m > 0)$  の場合, 図 10;  $d = 6m + 3 (m \geq 0)$  の場合, 図 12;  $d = 6m + 5 (m \geq 0)$  の場合, 図 14.

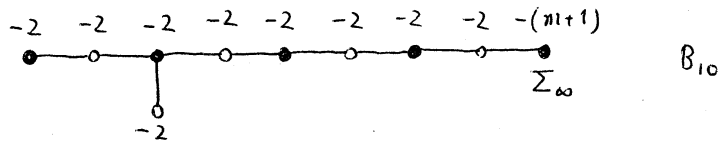
証明には 1.7 と 2.7.2 を使う.

2.7.5.  $q^{-1}(\infty)$  に含まれる例外曲線をすべて縮小すると, 次の重みつきグラフ (又は配図) が得られる:

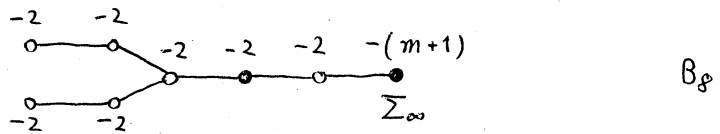
$d = 6m$  の場合.



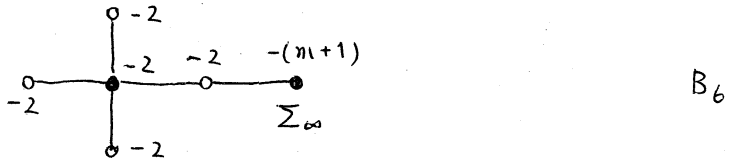
$d = 6m+1$  の場合.



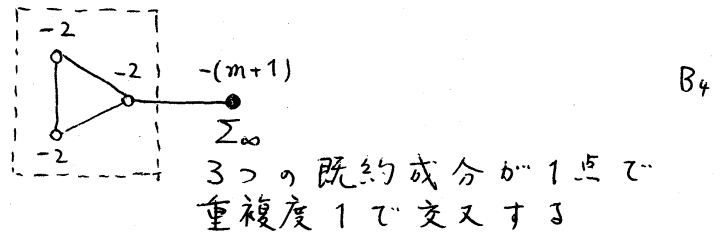
$d = 6m+2$  の場合.



$d = 6m+3$  の場合.



$d = 6m+4$  の場合.



$d = 6m+5$  の場合



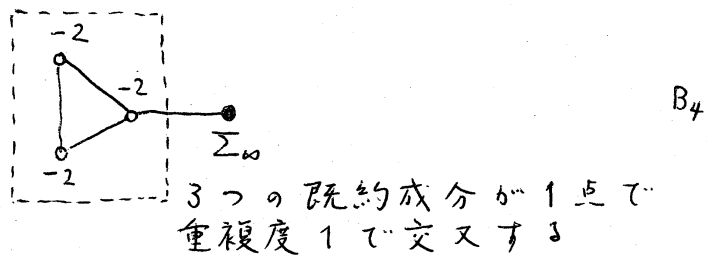
但し  $B_{10}, B_8, \dots$  等は Šafarevič [9] による特異ファイバーの分類型.

§ 3. 定理 1 の証明.

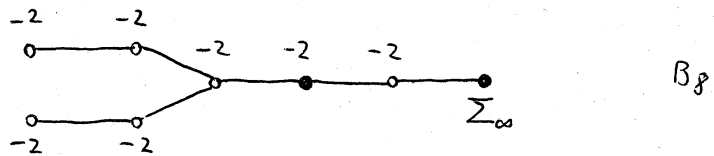
3.1.  $d = 0, 1$  又は  $2$  ならば  $K$  が長上有理的になることは明  
 特異  
 しかたから,  $d > 3$  と仮定しよう.  $q: H \rightarrow \mathbb{P}^1$  の  $q^{-1}(\infty)$  以外のファイバー

を考える. そのような特異ファイバー  $f^{-1}(\alpha) = (\sigma \circ f)^{-1}(\alpha)$  は 2つ以上の既約成分をもち,  $\ell_\alpha \cap C$  は  $C$  の特異点である. よって  $\varphi'(\alpha) = 0$ . 逆に,  $\varphi'(y) = 0$  の根  $\alpha$  について  $f^{-1}(\alpha)$  は  $f$  の特異ファイバーになる (2.3 参照).  $\alpha$  を  $\varphi'(y) = 0$  の根,  $P = (x = -\varphi(\alpha)^{1/3}, y = \alpha)$  を  $C$  の特異点,  $e = v_\alpha(\varphi(y) - \varphi(\alpha))$  とおけば, 定理 1 の条件 (1) から  $e = 2, 3, 4$  又は  $5$ . 条件 (2) によれば  $e = 3$  の場合は,  $P$  で双正則な双有理写像  $(t, x, y) \mapsto (t, x + \alpha^{1/3}(y - \alpha), y)$  によって  $e = 4$  又は  $5$  の場合に戻着できる. すなわち,  $P$  は  $e = 2$  のとき重複度  $(2, 1, \dots)$  の,  $e = 4$  のとき重複度  $(3, 1, \dots)$  の,  $e = 5$  のとき重複度  $(3, 2, 1, \dots)$  の cuspidal 特異点である. 2.3, 2.4, 2.5 と同様の議論をして  $f^{-1}(\alpha) \cup \Sigma_\infty$  の重みつきグラフを求めると次のようになる:

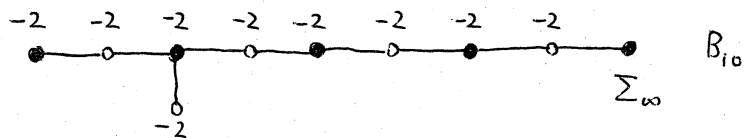
$e = 2$  の場合.



$e = 4$  の場合.



$e = 5$  の場合.



3.2. 3.1 によって,  $f$  のファイバーのうち例外曲線を含んでいるものは  $f^{-1}(\omega)$  だけであることがわかる.  $\hat{c}: H \rightarrow \hat{H}$  と

$q^{-1}(\infty)$  に含まれるすべての例外曲線の縮小とすれば、相対極小準楕円曲面  $\hat{q}: \hat{H} \rightarrow \mathbb{P}^1$  が得られて  $\hat{q} \hat{c} = q$ ;  $\hat{\Sigma}_\infty = \hat{c}(\Sigma_\infty)$  は  $\hat{q}$  の正則断面で、 $(\hat{\Sigma}_\infty^2) = -(m+1)$ . ( $p=3$  のため、 $d=6m+1, d=6m+2, d=6m+4, d=6m+5$  の4つの場合だけを考えればよい.) 定理1は1.4, 1.5, 1.6を直接応用して得られる.

#### §4. 定理2の証明.

4.1. 定理2の最初の主張は1.4から従うので、残りの主張を証明する. §2の記号と合致させるため、 $t^2 = x^3 + \varphi(y)$  という  $K$  の定義式から出発し、 $\varphi(y) = y\varphi_1(y)^2$ ,  $d = \deg_y \varphi$ ,  $d_1 = \deg_y \varphi_1$  (よって  $d = 2d_1 + 1$ ) とおく.  $p=2$  のため  $d = 6m+1, d = 6m+3, d = 6m+5$  の3つの場合だけ考えれば十分である.  $d=1$  ならば  $K$  は長上有理的だから  $d \geq 3$  と仮定しておく.

4.2.  $\varphi_1(y)$  を互いに相異なる一次因子の積に分解して

$$\varphi_1(y) = a(y - \alpha_1)^{r_1} \cdots (y - \alpha_s)^{r_s}$$

とかけば、定理2の仮定から  $r_i \leq 2$  ( $1 \leq i \leq s$ ) となる. (実際  $r_i \geq 3$  ならば  $\varphi(y + \alpha_i)$  は次数  $\geq 6$  の項から始まる.)  $F_0 = (x = \infty) \cup (y = \infty)$  上にある  $C$  の特異点は  $(x = 0, y = \alpha_i)$  ( $1 \leq i \leq s$ ) だけである.  $\varphi_1(y) = 0$  の根  $\alpha$  をとって、 $Q = (t = 0, x = 0, y = \alpha)$  とおく.  $Q$  上双正則な双有理写像  $(t, x, y) \mapsto (t, x, y + \alpha)$  によって、 $Q$  の近傍で  $H_0$  は次の超平面に同型になる:

(i)  $\alpha \neq 0$  か  $r = 1$  ならば  $t^2 = x^3 + y^2 \delta(y)$ .

(ii)  $\alpha = 0$  か  $r = 1$  ならば  $t^2 = x^3 + y^3 \delta(y)$ .

(iii)  $\alpha \neq 0$  か  $r = 2$  ならば  $t^2 = x^3 + y^4 \delta(y)$ .

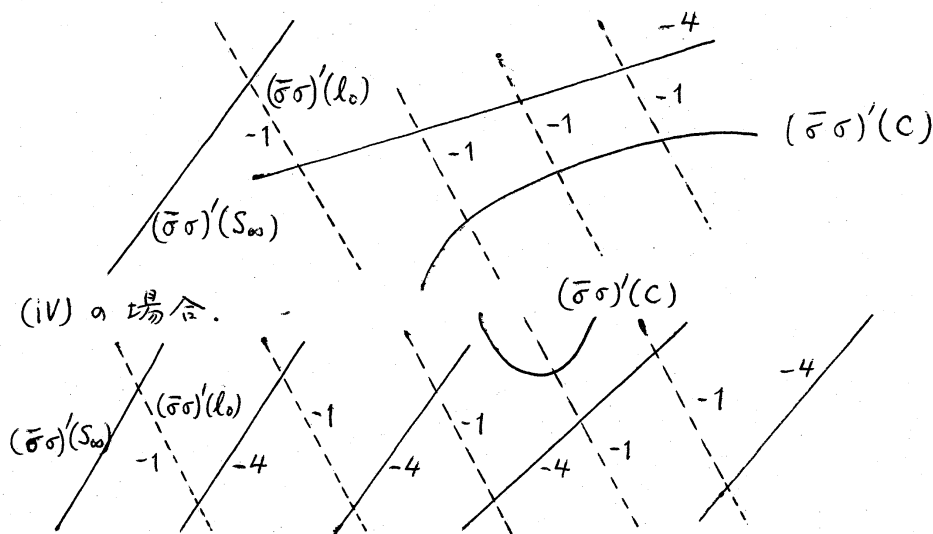
(iv)  $\alpha = 0$  か  $r = 2$  ならば  $t^2 = x^3 + y^5 \delta(y)$ .

ここで  $\delta(y) \in k[y]$ ,  $\delta(0) \neq 0$  か  $\delta(y+\alpha)(y+\alpha)^r = \varphi_1(y)$ .

4.3. 上記(i)の場合は(ii)又は(iv)の場合に帰着できることを示そう。実際,  $\delta(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots$  ( $a_0 \neq 0$ ) とかいて,  $\mathbb{Q}$  で双正則な双有理写像  $(t, x, y) \mapsto (t + a_0^{\frac{1}{2}} y + a_2^{\frac{1}{2}} y^2, x, y)$  をほどこせば,  $a_1 \neq 1$  ならば(ii)の場合に,  $a_1 = 0$  か  $a_3 \neq 0$  ならば(iv)の場合に帰着される。(仮定から  $a_1 = a_3 = 0$  は起らない。) 同様に(iii)の場合は(iv)に帰着される。

4.4.  $(x=0, y=\alpha)$  を通る予のファイバーを  $l_0$  とすれば,  $(\bar{\sigma}\sigma)^{-1}(l_0 \cup C \cup S_\infty)$  の配図は次のようになる:

4.4.1. 補題. (ii)の場合.

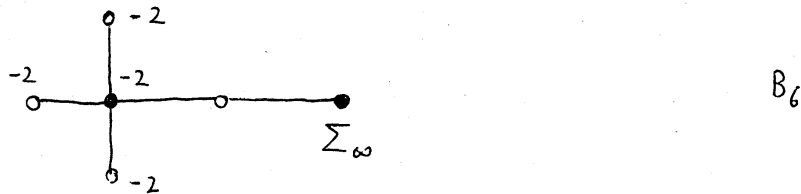


4.4.2. 補題.  $(\bar{\sigma}\sigma p)(Q) = (x=0, y=\alpha)$  となる  $H$  の点  $Q$  は単  
純点である. よって  $H$  は非特異射影曲面.

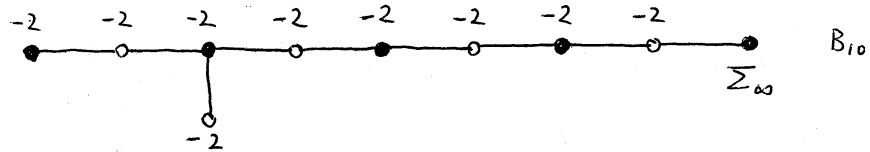
2.6.2 と同じ議論で証明できる.

4.5.  $q^{-1}(\alpha) = p^{-1}((\bar{\sigma}\sigma)'(l_0))$  とおけば,  $q^{-1}(\alpha) \cup \Sigma_\infty$  の重み  
つきグラフは次の通り.

(ii) の場合.



(iv) の場合.



よって  $q^{-1}(\alpha)$  は例外曲線を含まない. 定理 2 の証明は 3.2 と  
同様にすればできる.

#### References

- [1] M. Artin : On Enriques' surfaces. Thesis. (Unpublished).
- [2] E. Bombieri and D. Husemoller: Classification and embeddings of surfaces. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 29 (1975).
- [3] C. Chevalley: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable. Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys 6. New York 1951.
- [4] A. Grothendieck and J. Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique (EGA). Publ. Math. I.H.E.S. 24.
- [5] T. Kambayashi, M. Miyanishi and M. Takeuchi: Unipotent Algebraic Groups. Lecture Notes in Mathematics 414. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974.

- [6] M. Miyanishi: Unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 3. To be published in Osaka J. Math.
- [7] D. Mumford: Enriques' classification of surfaces in char  $p$ : I. Global Analysis. Papers in honor of K. Kodaira. Tokyo University Press 1969.
- [8] C. Queen: Non-conservative function fields of genus one, **I**. Arch. Math. (Basel) 2, 612-623 (1971).
- [9] I. Šafarevič and others: Algebraic Surfaces. Proc. of Steklov Inst. of Math. Moskōw 1965, or Amer. Math. Soc. 1967.
- [10] J. Tate: Genus change in inseparable extensions of function fields. Proc. Amer. Math. Soc. 3, 400 - 406 (1952).