数理解析研究所講究録
第 273 巻 1976 年 98-110

有理曲面上のampleベクトル束

名大　理　　細尾敏男

Xを代数的閉体k上定義された非特異射影的多様体、EをX上のベクトル束。$d=\dim X$、$r=\operatorname{rank} E$ とおく。次の問題を考える。

問題　Eがampleとなるための良いnumericalな充分条件を求めよ。

これに関して以下の事実が知られている。

①(Nakai)　$r=1$つまり$E=L$；直線束のとき。
L：ample $\Leftrightarrow$ 任意のXのintegral closed subscheme Yに対して$(C_1(L)^s, Y)>0$ が成立。ここで$s=\dim Y$。

②(Atiyah)　$d=1$つまり$X=C$：曲線のとき。

Eが indecomposable ならば $\exists N = N(r, g)$, $\deg c_1(E) \geqq N$
$\Rightarrow$ E: ample。ここで g は C の種数。

定義　H を X の ample な因子とする。このとき E が H-stable であるとは、E の任意の部分連接層 F(≠0 ~~に対して~~ rank of F $< r$)に対して $\dfrac{(c_1(F), H^{d-1})}{\text{rank of } F} < \dfrac{(c_1(E), H^{d-1})}{r}$

が成立すること。

③ (Hartshorne)　$X = C$: 曲線, $k = \mathbb{C}$: 複素数体のとき。
E が stable ならば、E: ample $\Leftrightarrow$ $\deg E > 0$。

定義　X が曲面のとき $\Delta(E) = -c_2(\mathcal{E}nd\, E) = (r-1)c_1(E)^2 - 2r\, c_2(E)$ とおく。(任意の X 上の直線束 L に対して $\Delta(E \otimes L) = \Delta(E)$ である)

④ (Hosoh)　H が射影平面 $\mathbb{P}^2$ の超平面, E が rank 2 の H-stable ベクトル束のとき
$(c_1(E), H) \geqq -\frac{1}{2}\Delta(E) \Rightarrow$ E: ample。

ここでは④の事実を高い rank 及び有理織維曲面上に拡張し

た結果を述べ、以下の章でその証明を与える。

$\mathbb{P}^2$上のrank rのベクトル束Eに対して、直線束Lが存在して$c_1(E\otimes L)=aH$ $(-r+1\leqq a\leqq 0)$とできる。$a(E)=a$とおく。

定理1　Eが$\mathbb{P}^2$上のrank rのH-stableベクトル束のとき
$(c_1(E), H)\geqq -\frac{1}{2}\Delta(E)+\dfrac{(a+2r)(2-a-r)}{2}\Rightarrow E$: ample。
ここで$a=a(E)$。

非負整数nに対して、$\Sigma_n=\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$とおく。Mを$\Sigma_n$のminimal section（つまり$\Sigma_n$のsectionであって$M^2=-n$となるもの）。$N$を$\Sigma_n$のfibreとする。整数の組$(\alpha, \beta)$に対して、$\Sigma_n$上の因子$\alpha(M+nN)+\beta N$を$H_{\alpha,\beta}$と記す。（$(H_{\alpha,\beta}, M)=\beta$, $(H_{\alpha,\beta}, N)=\alpha$であり、$H_{\alpha,\beta}$; ample $\Leftrightarrow \alpha>0, \beta>0$, $|H_{\alpha,\beta}|$; base point free $\Leftrightarrow \alpha\geqq 0, \beta\geqq 0$である。）

Σ_n上のrank rのベクトル束Eに対して直線束Lが存在して$c_1(E\otimes L)=aM+bN$ $(-r+1\leqq a, b\leqq 0)$とできる。$a(E)=a$, $b(E)=b$とおく。

定理2　EがΣ_n上のrank rの$H_{\alpha,\beta}$-stableベクトル束のとき
$(c_1(E), N)\geqq -\frac{1}{2}\Delta(E)+c(a, b, r, n)+a$
$(c_1(E), M)\geqq -\frac{1}{2}\Delta(E)+c(a, b, r, n)+b-an$

$\Rightarrow E$: ample。ここで $a=a(E)$, $b=b(E)$, $c(a,b,r,n)=\frac{1}{2}an(a+r)-r(a+b+ab+r-2)$。

§1 定理1の証明。

補題(1,1) Eを$\mathbb{P}^2$上のrank rのH-stableベクトル束で、$c_1(E)=a(E)H$なるものとすると次の(1)−(4)が成立。

(1) $h^0(\mathbb{P}^2, E)=0$

(2) $h^2(\mathbb{P}^2, E(m))=0 \quad m\geqq 0$

(3) $h^1(\mathbb{P}^2, E(m))\leqq h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1)) \quad m\geqq 1$

(4) $m\geqq 1$に対して$h^1(\mathbb{P}^2, E(m))=h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$が成立すれば、$E(m)$はglobal sectionsで生成される。

(ここで $E(m)=E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(mH)$)

(証明) (1),(2)はEのstabilityとSerre dualityより明らか。 (3) F_mを$E(m)$の部分層で$H^0(\mathbb{P}^2, F_m)=H^0(\mathbb{P}^2, E(m))$と$E(m)/F_m$がtorsion freeが成立する最小のものとする。(F_mはgenericallyにglobal sectionsで生成されている。) 完備線型系$|H|$のgeneral member lで$F_m|_l$がlocally free, $0\to F_m(-1)\to F_m\to F_m|_l\to 0$が完全となるものを取る。$l$は射影直線に同型であるから、$F_m|_l$はglobal sectionsで生成され、$h^1(l, F_m|_l)=0$であるとしてよい。そこで次の完全列を考える。$\cdots\to H^1(\mathbb{P}^2, F_m(-1))\to H^1(\mathbb{P}^2, F_m)\to H^1(l, F_m|_l)$

$\to H^2(\mathbb{P}^2, F_m(-1)) \to H^2(\mathbb{P}^2, F_m) \to 0$。$h^1(\ell, F_m|_\ell)=0$ であるから $h^1(\mathbb{P}^2, F_m) \leqq h^1(\mathbb{P}^2, F_m(-1))$, $h^2(\mathbb{P}^2, F_m) = h^2(\mathbb{P}^2, F_m(-1))$。又、$h^2(\mathbb{P}^2, E(m)) = h^2(\mathbb{P}^2, E(m-1)) = 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
& h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) - h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1)) \\
&= h^0(\mathbb{P}^2, E(m)) - h^0(\mathbb{P}^2, E(m-1)) - (\chi(\mathbb{P}^2, E(m)) - \chi(\mathbb{P}^2, E(m-1))) \\
&= h^0(\mathbb{P}^2, F_m) - h^0(\mathbb{P}^2, F_m(-1)) - (r + (c_1(E(m)), H)) \\
&= h^1(\mathbb{P}^2, F_m) - h^1(\mathbb{P}^2, F_m(-1)) + (\chi(\mathbb{P}^2, F_m) - \chi(\mathbb{P}^2, F_m(-1))) \\
&\quad - (r + (c_1(E(m)), H)) \\
&\leqq (r' + (c_1(F_m), H)) - (r + (c_1(E(m)), H))
\end{aligned}
$$

($r' = $ rank of F_m) $r' \leqq r$, $(c_1(F_m), H) \leqq (c_1(E(m)), H)$ であるから $h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) \leqq h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ が出る。

(4) $h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) = h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ とすると、上の式から、$E(m) = F_m$。そこで $|H|$ の general member ℓ を取れば、$E(m)|_\ell$ は global sections で生成され $h^1(\ell, E(m)|_\ell) = 0$ となる。そこで次の完全列を考える。$\cdots \to H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \to H^0(\ell, E(m)|_\ell) \to H^1(\mathbb{P}^2, E(m-1)) \to H^1(\mathbb{P}^2, E(m)) \to H^1(\ell, E(m)|_\ell) \to \cdots$。$h^1(\ell, E(m)|_\ell) = 0$, $h^1(\mathbb{P}^2, E(m)) = h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ だから $H^1(\mathbb{P}^2, E(m-1)) \to H^1(\mathbb{P}^2, E(m))$ は同型、よって $H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \to H^0(\ell, E(m)|_\ell)$ は全射。$E(m)|_\ell$ は global sections で生成されているから ℓ の任意の closed point x に対して $H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \to E(m) \otimes k(x)$ も全射となる。そこで $\mathbb{P}^2 - \ell$ の任意の closed point y に対

して、yを通る$|H|$の member ℓ'を取り $\{x\}=\ell\cap\ell'$とする。次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathbb{P}^2, E(m)) \arrow[rr] \arrow[dr] & \circlearrowleft & E(m)\otimes k(x) \\ & H^0(\ell', E(m)|_{\ell'}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$H^0(\mathbb{P}^2, E(m))\to E(m)\otimes k(x)$ は全射であるから $H^0(\ell', E(m)|_{\ell'})\to E(m)\otimes k(x)$ も全射。よって$E(m)|_{\ell'}$は global sections で生成される。このことから、上と同様にして $H^0(\mathbb{P}^2, E(m))\to E(m)\otimes k(y)$ が全射がわかる。ゆえに中山の補題により$E(m)$は global sections で生成される。

系(1.2) E を補題(1.1)のとうりとする。このとき $E(-\chi(\mathbb{P}^2, E)+2)$ は ample。

(証明) (1.1)の(1),(2)から $h^0(\mathbb{P}^2, E)=h^2(\mathbb{P}^2, E)=0$。よって $h^1(\mathbb{P}^2, E)=-\chi(\mathbb{P}^2, E)$、これをCとおく。(1.1)の(3)から $c=h^1(\mathbb{P}^2, E)\geq h^1(\mathbb{P}^2, E(1))\geqq\cdots\geqq h^1(\mathbb{P}^2, E(c))\geqq h^1(\mathbb{P}^2, E(c+1))\geq 0$。よって $1\leqq m\leqq c+1$ なる整数mが取れて $h^1(\mathbb{P}^2, E(m))=h^1(\mathbb{P}^2, E(m-1))$ となる。(1.1)の(4)により $E(m)$は global sections で生成される。$c+2>m$だから $E(c+2)$は ample。

(定理Iの証明) Eを定理Iのとうりとする。$\mathbb{P}^2$上の直

線束Lが取れて、$E'=E\otimes L$ に対して $c_1(E')=aH$ とできる。系(1.2)より、$E''=E'(-\chi(\mathbb{P}^2,E')+2)$ は ample。$\mathbb{P}^2$ 上の直線束 L' を取って $E=E''\otimes L'$ とすれば、簡単な計算により $(c_1(E''),H)=-\frac{1}{2}\Delta(E)+\frac{(a+2r)(2-a-r)}{2}$ となるから、定理Iの条件より、$(c_1(L'),H)\geqq 0$。よって L' は global sections で生成される。ゆえに E は ample。

§2 定理2の証明。

補題(2.1) Eを Σ_n 上の rank r の $H_{\alpha,\beta}$-stable ベクトル束で、$c_1(E)=a(E)M+b(E)N$ なるものとすると次の(1), (2)が成立。

(1) $h^0(\Sigma_n,E)=0$

(2) $h^2(\Sigma_n,E(D))=0$、Dは Σ_n 上の effective な因子。

(証明) Eの stability と Serre duality より明らか。

補題(2.2) Eを Σ_n 上の rank r の $H_{\alpha,\beta}$-stable ベクトル束で $c_1(E)=aM+bN$ ($a\geqq a(E)$, $b\geqq b(E)$) なるものとする。FをE($H_{1,1}$)の部分層で $H^0(\Sigma_n,F)=H^0(\Sigma_n,E(H_{1,1}))$ と $E(H_{1,1})/F$ が torsion free が成立する最小のものとすると次の(1), (2)が成立。

(1) $r'=\operatorname{rank}$ of $F<r$ ならば $h^1(\Sigma_n,E(H_{0,1}))<h^1(\Sigma_n,E)$ 又は $h^1(\Sigma_n,E(H_{1,0}))<h^1(\Sigma_n,E)$。

(2) $r'=r$ (つまり $E(H_{1,1})$ が generically に global sections で

生成される）ならば $h^1(\Sigma_n, E(H_{1,1}))\leqq h^1(\Sigma_n, E)$、さらに、$h^1(\Sigma_n, E(H_{1,1}))=h^1(\Sigma_n, E)$ ならば $E(H_{1,1})$ は global sections で生成される。

（証明）(I) $c_1(E(H_{1,1}))=uM+vN$, $c_1(F)=u'M+v'N$ とおくと、E の stability から $\beta u'+\alpha v'/r' < \beta u+\alpha v/r$。ところで $\alpha>0$, $\beta>0$, $u>0$, $v>0$, $r'<r$ だから $u'<u$ 又は $v'<v$ を得る。そこで次の (i)、(ii) を示したい。(i) $u'<u$ ならば、$h^1(\Sigma_n, E(H_{0,1}))<h^1(\Sigma_n, E)$、(ii) $v'<v$ ならば、$h^1(\Sigma_n, E(H_{1,0}))<h^1(\Sigma_n, E)$。(i) $u'<u$ とする。l を $|H_{0,1}|$ の general member で $F|_l$ が locally free, $0\to F(-H_{1,1})\to F(-H_{1,0})\to F(-H_{1,0})|_l\to 0$ が完全となるものとする。l は Σ_n の fibre であるから、射影直線に同型、又 F は generically に global sections で生成されているから、$F|_l$ は global sections で生成されるとしてよい。ところで、このとき $(-H_{1,0}, l)=-1$ だから、$h^1(l, F(-H_{1,0})|_l)=0$。そこで次の完全列を考える。$\cdots\to H^1(\Sigma_n, F(-H_{1,1}))\to H^1(\Sigma_n, F(-H_{1,0}))\to H^1(l, F(-H_{1,0})|_l)\to H^2(\Sigma_n, F(-H_{1,1}))\to H^2(\Sigma_n, F(-H_{1,0}))\to 0$。$h^1(l, F(-H_{1,0})|_l)=0$ であるから、$h^1(\Sigma_n, F(-H_{1,0}))\leqq h^1(\Sigma_n, F(-H_{1,1}))$, $h^2(\Sigma_n, F(-H_{1,0}))=h^2(\Sigma_n, F(-H_{1,1}))$。よって

$$
\begin{aligned}
& h^1(\Sigma_n, E(H_{0,1}))-h^1(\Sigma_n, E)\\
&= h^0(\Sigma_n, E(H_{0,1}))-h^0(\Sigma_n, E)-(\chi(\Sigma_n, E(H_{0,1}))-\chi(\Sigma_n, E))
\end{aligned}
$$

$= h^0(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) - h^0(\Sigma_n, F(-H_{1,1})) - (r + (c_1(E(H_{0,1})), H_{0,1}))$
$= h^1(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) - h^1(\Sigma_n, F(-H_{1,1})) + (\chi(\Sigma_n, F(-H_{1,0})) - \chi(\Sigma_n, F(-H_{1,1})))$
$- u \leqq u' - u < 0$。 (ii) $v' < v$ とする。ℓ を $|H_{1,0}|$ の general member とすると、ℓ は Σ_n の section したがって射影直線に同型、$\chi(-H_{0,1}, \ell) = -1$ であるから $h^1(\Sigma_n, E(H_{1,0})) <$ $h^1(\Sigma_n, E)$ は (i) とほとんど同様にして得られる。

(2) (1.1) の (3), (4) とほとんど同様。

系 (2.3) E を (2.1) のとうりとする。このとき $E((-\chi(\Sigma_n, E) + 2) H_{1,1})$ は ample。

(証明) (2.1) から $h^1(\Sigma_n, E) = -\chi(\Sigma_n, E)$。これを c とおく。(2.2) の (1) から整数 $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ が存在して $E' = E(H_{p,q})$ に対して、$h^1(\Sigma_n, E') \leqq c - (p+q)$, $E'(H_{1,1})$ は generically に global sections で生成される。$c' = h^1(\Sigma_n, E')$ とおく。(2.2) の (2) から、

$$c' = h^1(\Sigma_n, E') \geqq h^1(\Sigma_n, E'(H_{1,1})) \geqq \cdots \geqq h^1(\Sigma_n, E'(c' H_{1,1}))$$
$$\geqq h^1(\Sigma_n, E'((c'+1) H_{1,1})) \geqq 0.$$

よって $1 \leqq m \leqq c'+1$ なる整数 m が取れて $h^1(\Sigma_n, E'(m H_{1,1})) = h^1(\Sigma_n, E'((m-1) H_{1,1}))$ となる。(2.2) の (2) より $E'(m H_{1,1}))$ は global sections で生成される。よって $E'((c'+2) H_{1,1})$ は ample 。ところで $E((c+2) H_{1,1}) = E'((c'+2) H_{1,1}) \otimes \mathcal{O}_{\Sigma_n}(H_{q,p} + (c-(p+q)-c') H_{1,1})$ であり $c - (p+q) - c' \geqq 0$ であるから、$E((c+2) H_{1,1})$ は ample。

(定理2の証明)　Eを定理2のとうりとする。Σ_n上の直線束Lが取れて、$E'=E\otimes L$ に対して $c_1(E')=aM+bN$ とできる。(2.3) より $E''=E'(-\chi(\Sigma_n,E')+2)H_{1,1})$ は ample。整数 p, q を取って $E=E''(H_{p,q})$ とすれば、簡単な計算により $(c_1(E''),N)=-\frac{1}{2}\Delta(E)+c(a,b,r,n)+a$、$(c_1(E''),M)=-\frac{1}{2}\Delta(E)+c(a,b,r,n)-an+b$ となるから、定理2の条件より、$p\geq 0$, $q\geq 0$。よって $\mathcal{O}_{\Sigma_n}(H_{p,q})$ は global sections で生成される。ゆえに E は ample。

§3 最後に、$\mathbb{P}^2$上の H-stable ベクトル束の例を挙げて、定理1が best possible であることを示そう。

補題(3.1)　Eを$\mathbb{P}^2$上の rank r の H-stable ベクトル束とする。$c_1(E)=H$ 又は $-H$ ならば $c_2(E)\geq r-1$。

(証明)　$c_1(E^*)=-c_1(E)$, $c_2(E^*)=c_2(E)$ だから $c_1(E)=-H$ としてよい。(1.1) の (1), (2) から $h^0(\mathbb{P}^2,E)=0$, $h^2(\mathbb{P}^2,E)=0$、よって Riemann-Roch の定理により $-h^1(\mathbb{P}^2,E)=\chi(\mathbb{P}^2,E)=r+(c_1(E),3H)/2+(c_1(E)^2-2c_2(E))/2=r-1-c_2(E)$。ゆえに $c_2(E)\geq r-1$。

Maruyama により$\mathbb{P}^2$上の rank 2 の H-stable ベクトル束について次の事が知られている。

"整数 $n \geqq 1$ と $\mathbb{P}^2$ の直線 l に対して $\mathbb{P}^2$ 上の rank 2 の H-stable ベクトル束 E が存在して、$c_1(E)=H$, $c_2(E)=n$ であり さらに $E|_l \cong \mathcal{O}_l(-n+1) \oplus \mathcal{O}_l(n)$" ($\mathcal{O}_l(n)$ は l 上の直線束で次数 n のもの)

この事実とあとで示す補題を使うと次の定理が容易に証明できる。

定理3　$n \geqq r-1 \geqq 1$ を満たす整数 n, r と $\mathbb{P}^2$ の直線 l に対して $\mathbb{P}^2$ 上の rank r の H-stable ベクトル束 E が存在して $c_1(E)=H$, $c_2(E)=n$ であり、さらに $E|_l \cong \mathcal{O}_l(-n+1) \oplus \mathcal{O}_l(n-r+2) \oplus \sum^{r-2} \mathcal{O}_l(1)$ 。

上で得られた E に関して、(1) $E(t)$ は ample $\Leftrightarrow$ $(c_1(E(t)), H) \geqq -\frac{1}{2}\Delta(E) + \frac{1+r}{2}$ (2) $E^*(t)$ は ample $\Leftrightarrow$ $(c_1(E^*(t)), H) \geqq -\frac{1}{2}\Delta(E) + \frac{(-1+2r)(3-r)}{2}$ が成立する。($\Leftarrow$) は定理 I により、($\Rightarrow$) は $E(t)|_l$ 及び $E^*(t)|_l$ を見ることで容易にわかる。

補題(3.2)　E を $\mathbb{P}^2$ 上の rank r の H-stable ベクトル束で $c_1(E)=H$ なるものとする。次のベクトル束の完全列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to E' \to E \to 0 \qquad (*)$$

が分解しなければ、E' は H-stable ベクトル束である。

(証明)　$F \neq 0$ を E' の部分層で rank of $F < r+1$、E'/F が

torsion freeなるものとする。$c_1(E')=H$ だから $(c_1(F),H)\leqq 0$ を示せばよい。$L=F\cap \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$、$F'$ をFのEにおける像とすると $0\to L\to F\to F'\to 0$ は完全列。ところで $(c_1(L),H)\leqq 0$、$(c_1(F'),H)\leqq 1$ だから $(c_1(F),H)\leqq 1$。よって $(c_1(F),H)\neq 1$ を示せばよい。そこで $(c_1(F),H)=1$ としてみる。すると、$L=(0)$、$\dim \operatorname{supp}(E/F')\leqq 0$ でなければならない。(*)は分解していないのだから $E/F'\neq(0)$。そこで完全列 $0\to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\to E'/F\to E/F'\to 0$ を考える。任意の整数mに対して $H^0(\mathbb{P}^2,(E/F')(m))\neq(0)$ であり、$H^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m))=(0)$ である。ところで E'/F は torsion free だから充分小さな整数mに対しては $H^0(\mathbb{P}^2,(E'/F)(m))=(0)$ である。これは矛盾。

参考文献

Nakai, Y., A criterion of an ample sheaf on a projective scheme, Amer. J. Math., 85 (1963) 14-26.

Atiyah, M.F., Vector bundles over an elliptic curve, Proc. Lond. Math. Soc. (3), 7 (1957) 414-452.

Hartshorne, R., Ample vector bundles on curves, Nagoya Math. J., 43 (1971) 73-89.

Hosoh, T., Ample vector bundles on a rational surface, Nagoy Math. J. 59 (1975) 135-148.

Maruyama, M., *On a family of algebraic vector bundles*, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, (1973) 95–146.