数理解析研究所講究録
第 273 巻 1976 年 151-163

複素射影空間上の有理微分形式のなす複体について

東大 理 寺尾宏明

§1.

Xをn次元複素非特異多様体、DをXの reduced divisor とする。そのとき、

記号(1.1): 非負整数k, qに対して、Xの各点xで、

$$\Omega^q(kD)_x = \{\omega \in \text{germs of rational } q\text{-forms at } x;\ Q^k\omega \text{ が正則}\},$$

$$\Omega^q(\log kD)_x = \{\omega \in \text{germs of rational } q\text{-forms at } x;\ Q^k\omega \text{ と } Q^k d\omega \text{ がともに正則}\}$$

が定義される。ただし、ここで、Qは点xの近傍でのDの定義方程式のひとつであり、上記の定義は、Qの選択に依らない。そして、k, qのどちらか少なくとも一方が負の整数のときは、$\Omega^q(kD)_x = \Omega^q(\log kD)_x = 0$と、定義する。

そして、X上の ~~解析~~ 解析的連接層

$$\Omega^q(kD) = \bigcup_{x \in X} \Omega^q(kD)_x$$

$$\Omega^q(\log kD) = \bigcup_{x \in X} \Omega^q(\log kD)_x$$

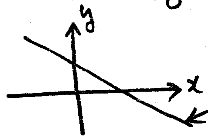
が、定義されて、各々、Dに沿って、高々k位の極をもつq-形式の芽のなす層とかDに沿って、高々対数的k位の極をもつq-形式の芽のなす層とかいう。

注意(1.2): この定義は、Dが正規交叉のときは、$k=1$のときのP. Deligneの定義と一致するが、Dが一般の因子のときは、斎藤恭司によって($k=1$)導入された。そして、$\Omega^1(\log D)_x$を考えると、これは、$\mathcal{O}_x$-加群だが、Dがxで正規交叉でない場合は、自由$\mathcal{O}_x$-加群になるかどうかはわからない。そして、斎藤は、$\Omega^1(\log D)_x$が$\mathcal{O}_x$-自由になることと、xのある近傍Uがあって、$U\cap(U\setminus D)$が$K(\pi,1)$になることとは、同値ではないかと予想した。この予想は、間違っていたともきくが、詳しいことは知らない。しかし、これはなかなか面白い予想だと思う。これに、関連して、次のことが成立する。

命題(1.3): $(D,0)$を$(\mathbb{C}^3,0)$に於ける、reduced divisorの芽とする。そのとき、

$\Omega^1(\log D)_0$が自由$\mathcal{O}_0$-加群 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ Dの特異点のなすスキームは、1次元Cohen-Macaulayスキーム

例えば、$\mathbb{C}^2 \setminus \{\text{lines}\}$ の $K(\pi,1)$ について考えたいときには、$\mathbb{P}^2 \setminus \{$無限の位置の line$\} \setminus \{$lines$\}$ としておいて、結局、$(\mathbb{C}^3, 0)$ 内の lines の germs の場合に持ちこめる。

例(1.4): $\mathbb{C}^2 \setminus \{$  $ax+by=-c\}$ というようなとき

(a, b, c のうち、ふたつはゼロでない)

は、$Q = xyz(ax+by+cz)$ としておいて、$D = \{Q=0\}$ の特異点のなすスキームに対応するイデヤル I は、

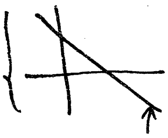
$$I = \{yz(2ax+by+cz),\ zx(ax+2by+cz),\ xy(ax+by+2cz)\}$$

であり、height $I = 2$ であって、$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}/I$ が Cohen-Macaulay になることと、I の素因子の高さがすべて2に等しいことは、同値だが、それは、$I:(x,y,z) = I$ と同値。

簡単な計算から、

$I:(x,y,z) = I \iff a, b, c$ のうち、どちらかひとつが 0.

がわかる。これは、

$\mathbb{C}^2 \setminus \{$  $ax+by=-c\}$ が $K(\pi,1) \iff$ a, b, c のうち、どれかひとつが 0.

なる事実と対応していると思えるかもしれない。

また、

命題(1.5): $(D_1, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $(D_2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ を、divisors の germs とするとき、(ともに、quasi-homogeneous とする)

$(D = D_1 \times \mathbb{C}^m \cup \mathbb{C}^n \times D_2,\ 0 \times 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0)$ も divisor の germ になるが、$\Omega^1(\log D)_{0\times 0}$, $\Omega^1(\log D_1)_0$, $\Omega^1(\log D_2)_0$ のうちのふたつが free なら、他のひとつも free である。

この結果は、$K(\pi,1)$ の fibration type の判定法に対応していると思えるだろう。

いずれにせよ、少なくとも、$\mathbb{C}^2 - \{\text{lines}\}$ の場合に、$\Omega^1(\log D)$ が free になるのは、どのような configuration で起こりうるのかという問題は（スキーム的な意味は、(1.3) で云われているが…）、topology との関係がつくにせよつかないにせよ、多少は面白いかと思う。

記号(1.6): $A_k^q := \Gamma(X, \Omega^q(kD))$,

$B_k^q := \Gamma(X, \Omega^q(\log kD))$,

$A^q = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^q$.

すると、Grothendieck の algebraic de Rham theorem があって、

定理(1.7): $H^p(A^\cdot) \cong H^p(X - D; \mathbb{C})$.

但、$A^\cdot$ とは $\{\cdots \to A^{q-1} \xrightarrow{d} A^q \xrightarrow{d} A^{q+1} \to \cdots\}$ なる複体を表わす。

§2.

今、$A^{\cdot}$に、次のようにfiltrationをいれる。

定義(2.1):

$$A^{\cdot}_{q-k} := \{ \cdots \xrightarrow{d} A^{q}_{k} \xrightarrow{d} A^{q+1}_{k+1} \xrightarrow{d} \cdots \}$$

すると、$A^{\cdot} \supset \cdots \supset A^{\cdot}_{i} \supset A^{\cdot}_{i+1} \supset \cdots \supset A^{\cdot}_{n+1} = 0$。そして、これに付随したスペクトル列を考えて、以下、$\{E_r^{p,q}, E_\infty^{n}\}$で表わす。すると、P. Griffiths と P. Deligne による、次の結果がある。

定理(2.2): Dが非特異で、十分豊富($H^p(X, \Omega^q(kD)) = 0$ が、すべての正整数p, kについて成立)なら、

$$E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

が、すべてのp, qについて成立する。

実は、より強く、 $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q} = 0$ $(p+q < n = \dim X)$.

注意(2.3): この定理は、Hodge filtration との関係で、興味がある。詳しくは、Griffiths "On the periods of certain rational integrals I" (Annals of Math., 90 (1969), 460–495)にある。

(2.2)をDが、一般の特異点を許す因子で、$X=\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ の場合に、拡張することを考える。実は、次の定理が成立する。

<u>定理(2.4)</u>: $X=\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ のとき、

$E_1^{p,q}=E_\infty^{p,q}=0$ が、$1<p+q<s-1$ をみたすすべての p, q に対して、成立する。但、ここで、$s=\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^n}(\Sigma D)$ で、ΣD は、Dの特異点の集合を表わす。

この証明のための、道具を少し、準備する。

<u>定義(2.5)</u>: 非負整数 i, k に対して、

$H_k^i := \{\mathbb{C}^{n+1}$ 上の 同次有理 i-形式で、$\hat{D}$ に沿って、高々 k 位の極を有するもの$\}$

を定義する。但、$\hat{D}$とは、$\mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ なる射影によって、$D\subset\mathbb{P}^n$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の錐として、引き上げたものをいい、'同次'とは、$\mathbb{C}^{n+1}$ への $\mathbb{C}^*$-作用 ($(\xi_0,\cdots,\xi_n)\mapsto(c\xi_0,\cdots,c\xi_n)$, $c\in\mathbb{C}^*$) で、不変なものをいう。

また、i, k のいずれか少なくとも、一方が、負なら、$H_k^i=0$ と定義する。

すると、次のふたつの複体が得られる。

$$L^{\cdot}_{i-k} := \{\cdots \xrightarrow{d_L} H^i_k \xrightarrow{d_L} H^{i+1}_{k+1} \xrightarrow{d_L} \cdots\}$$

$$'L^{\cdot}_{i-k} := \{\cdots \xrightarrow{d'_L} H^i_k \xrightarrow{d'_L} H^{i+1}_{k+1} \xrightarrow{d'_L} \cdots\},$$

但、d_L は外微分作用素、d'_L は、

$d'_L\omega = \dfrac{1}{\deg Q}\dfrac{dQ}{Q}\wedge\omega$, $\omega\in H^i_k$（Qは、$\hat{D}$の定義方程式）。

そして、

$$L^{\cdot} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} L_i \supset\cdots\supset L_i \supset L_{i+1}\supset\cdots\supset L_{n+2}=0,$$

$$'L^{\cdot} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} {'L_i} \supset\cdots\supset {'L_i} \supset {'L_{i+1}}\supset\cdots\supset {'L_{n+2}}=0.$$

なるふたつのフィルターづけられた複体が得られる。

さて、$A^{\cdot}$と$L^{\cdot}$, $'L^{\cdot}$との間の射をつくるのに、次の図式を考える。

$$\begin{array}{l}
\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}\supset E\cong\mathbb{P}^n\\
f\downarrow\\
\mathbb{C}^{n+1}\supset\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}\xrightarrow{\pi}\mathbb{P}^n
\end{array}$$

但、fは$\mathbb{C}^{n+1}$の原点中心のblowing up、πは標準射影、Eはfから決まる例外因子である。

$p: H^i_k \longrightarrow A^{i-1}_k$ なる準同型を、

$$p(\omega)=\mathrm{res}\circ f^*\omega \quad (\omega\in H^i_k)$$

で、定義する。ここで、resとは、$(\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}, E)$ について

の留数をとることとする。

$$\begin{array}{ccccc}
H^i_k & \xrightarrow{p} & A^{i-1}_k & \xrightarrow{\pi^*} & H^{i-1}_k \\
d_L \downarrow\downarrow d'_L & & \downarrow d & & d_L \downarrow\downarrow d'_L \\
H^{i+1}_{k+1} & \xrightarrow[p]{} & A^i_{k+1} & \xrightarrow[\pi^*]{} & H^i_{k+1}
\end{array}$$

なる図式に於て、次の補題が成立つ.

補題 (2.6):

(i) $d\circ d=0$, $d_L\cdot d_L=d'_L\cdot d'_L=0$,

(ii) $d_L\cdot\pi^*=\pi^*\cdot d$,

(iii) $d_L\cdot d'_L+d'_L\cdot d_L=0$,

(iv) $d\circ p=p\circ d_L$

(v) $p\circ\pi^*\circ p=0$

(vi) $d'_L\circ\pi^*\circ p+\pi^*\circ p\cdot d'_L : H^i_k\longrightarrow H^i_{k+1}$ は包含写像に他ならない.

(vii) p は全射である $(i>1)$

また、次の補題は斎藤恭司による.

補題(2.7): (一般化された de Rham の補題)

$H^q(\mathcal{L}_i)=0$ が $q<s-1$ に対して成立する.

補題(2.8):

$H^p(Gr^q L^\cdot) \xrightarrow[\sim]{\alpha} H^p(Gr^{q\prime} L^\cdot)$ がすべての p, q について同型になる。但、α は $H^i_k \longrightarrow H^i_k$ なる恒等写像から induce された写像とする。

これらを使って、(2.4) を証明する。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
H^{q+1}(Gr^{p+1\prime}L^\cdot) & \xleftarrow{\delta} & H^q(Gr^{p\prime}_r L^\cdot) \\
\alpha^{-1}\downarrow\wr & & \uparrow\wr\,\alpha \\
H^{q+1}(Gr^{p+1}_r L^\cdot) & & H^q(Gr^p_r L^\cdot) \\
 & {\scriptstyle p^*}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \bar{\pi}^*} & \\
 & H^q(Gr^p_r A^\cdot) &
\end{array} \qquad (q>1)$$

ここで、$\bar{\pi}^*$ は $\pi^*: A^q_k \longrightarrow H^q_k$ から induce されたもの、p^* は $p: H^{q+1}_k \longrightarrow A^q_k$ から induce されたものとする。

また、δ は、

$$0 \to Gr^{p+1\prime}_r L^\cdot \longrightarrow {}'L_p / {}'L_{p+2} \longrightarrow Gr^{p\prime}_r L^\cdot \to 0$$

の Bockstein 写像とする。

$\psi \in A^q_{k+2}$ に対して、$p \circ d'_L \circ \pi^* \psi$ なる元を考えると、(2.6)の (vii) から、$\psi = p(\zeta)$ なる $\zeta \in H^{q+1}_{k+2}$ があるから、

$$\begin{aligned}
& p \circ d'_L \circ \pi^* \psi \\
&= p \circ d'_L \circ \pi^* \circ p(\zeta) \\
&= p(\zeta - \pi^* \circ p \circ d'_L \zeta) \qquad ((4.3) の (vi))
\end{aligned}$$

$= \varphi\zeta$ ((4.3)の(V))

$= \psi$

これは、前頁の図式に於て、$p^{*}\circ\alpha^{-1}\circ\delta\circ\alpha\circ\pi^{*}$ が恒等写像であることを示す。一方、一般に、δは、

$$
\begin{tikzcd}
H^{q}(Gr_r^{p}{}'L^{\cdot}) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & H^{q+1}(Gr_r^{p+1}{}'L^{\cdot}) \\
& H^{q+1}({}'L^{\cdot}_{p+1}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

と分解するから、(2.7)と組み合わせて、(2.4)が示される。

(2.4)の系として、次のことがわかる。

系(2.9): $H^{r}(\mathbb{P}^{n}-D;\mathbb{C})=0$ が $1<r<s-1$ に対して、成立する。

注(2.10): このことは、topologicalには、加藤十吉の 'partial Poincaré duality' に対応している。

系(2.11): $B_1^{i}=\Gamma(\mathbb{P}^{n},\Omega^{i}(\log D))=0$ が $1<i<s-1$ に対して、成立する。

§3.

$\{E_r^{p,q}, E_\infty^{n}\}$ の E_2-terms の意味とその必要性を explicit

に考える。

定理(3.1)： 次の列は完全である，

$$\cdots \to E_2^{q-k-1,k} \to H^q(B_{k-1}^{\cdot}) \to H^q(B_k^{\cdot}) \to E_2^{q-k,k} \to H^{q+1}(B_{k-1}^{\cdot}) \to H^{q+1}(B_k^{\cdot}) \to \cdots,$$

但，$B_k^{\cdot}$とは，$\{\cdots B_k^{q-1} \xrightarrow{d} B_k^q \xrightarrow{d} B_k^{q+1} \cdots\}$
なる複体のことをいう．

~~証明~~

この定理は，$E_2^{p,q}$が，対数的極をもつ微分形式からなる複体のコホモロジーと深い関係にあることを示している．
もし，$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$がすべての$p,q$について成立するような$(X, D)$に関しては，(この例は，次の§で示す)

$$H^q(B_k^{\cdot}) = \bigoplus_{i=0}^{k} E_2^{q-i,i} = \bigoplus_{i=0}^{k} E_\infty^{q-i,i} \hookrightarrow H^q(X-D; \mathbb{C})$$

が成立することがわかる．いいかえれば，$H^q(X-D; \mathbb{C})$の元が，$B_k^{\cdot}$のコホモロジー類で表わされている．

1次元のコホモロジーについては，

定理(3.2)： $X = \mathbb{P}^n$のとき，
$E_2^{0,1} = E_\infty^{1}$，いいかえれば，
$H^1(B_1^{\cdot}) \cong H^1(\mathbb{P}^n - D; \mathbb{C})$が成立する．

注(3.3)： 一般に，$E_1^{0,1} \neq E_2^{0,1}$，即ち，閉形式でないB_1^1

の元が存在することがある．例えば，$Q = x^3 + y^2 z$ を $\mathbb{P}^2$ 内の因子の定義式とすると．

$$\omega = \frac{3yz\,dx - 2zx\,dy - xy\,dz}{x^3 + y^2 z}$$

は．B_1^1 の元だが，閉形式でない。こういうことは．D が正規交叉のときには．起こりえない（Deligne："Théorie de Hodge II"）

§4．

ある種の D に対しては，$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ が．計算で示せる。

定義 (4.1)：Q が同次多項式のとき．Q が分離型とは．Q が共通変数をもたない単項式たちの和で書けるときを云う．

$x^3 + y^2 z$，$x^m + y^m + z^m$，xyz などが．その例である．

そのとき，そのような Q で定義された $\mathbb{P}^n$ 内の因子を D とすると，

定理 (4.2)：$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ が．$p+q = n$ のとき．成立する．

よって，(2.4) と組み合わせると．

系 (4.3)：D が (4.2) の如きもので，しかも，孤立特異

点を有するとすれば，

$$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}.$$

が，すべての p，q について成立する．