

乱流における小さな乱れのくり込み

中央大 工学部 物理 中野 徹

Reynolds 数 R が十分大きな乱流では慣性領域が発達し、その領域は波数空間ではほぼ $1/L$ から $(1/L)(R/R_c)^{3/4}$ まで広がり、時間空間では L より $L(R/R_c)^{-1/2}$ まで広がり、こゝで L は容器の代表的長さであり、 L はスケールが L の乱れの代表的時間、 R_c は臨界 Reynolds 数である)。 $R \gg R_c$ では慣性領域の波数、代表的時間はオーターの異なった値ととり得る。慣性領域のある波数 k の乱れを考えると、その乱れの時間スケール $\tau(k)$ は $\tau \sim k^{-3/2}$ である(これは単位時間あたり単位質量あたりのエネルギー散逸の量である)。波数 k の乱れの相互作用の相手の波数 q の乱れは $q \sim k$ によつてその寿命、空間的広がりとは全く異なる。 $q > k$ の乱れは波数 k の乱れにとり、これは空間的に局在してあり、時間的には早く変動する。ゆゑにこゝで力と見做せぬ。他方 $q < k$ の乱れはゆゑ、くりと変動しているから定常的な力と見做せる。このように考えれば全ての波数のゆらぎと同じように取り扱うことは余り適当でないと考えられる。以下

に波数の違いにより働きが違ふことを強調するのによりと筆者が考へる方法について述べる。

波数空間の揺がりからくる自由度の数は $(R/R_c)^{3/4}$ のオーダーであり、 $R \gg R_c$ でこの自由度の数のモードを全く同等に取り扱うことはほぼ不可能に見える。このため自由度の数を減らす方法も考へる。先に述べたように、波数 k の乱れにとつて、波数 $q (> k)$ の乱れは時間的にも空間的にも“局在”してゐるのでこれをとくり込んでしまふ。言い換へれば波数 k の乱れの運動を考へる時、空間的には k' より小さなゆらぎの効果をとくり込み、時間的には $\tau(k)$ より短い寿命のゆらぎをとくり込むことによつて空間的・時間的な粗視化を行う。幸いなことに $\tau \sim q^{-2}$ なるので空間、時間の粗視化は矛盾なく同時に行へる。

まず Vertex への補正を無視して、自己エネルギーへの補正だけを考へれば、Navier-Stokes の方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \omega(k) \right] u_\alpha(\vec{k}, t) = \nu_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) \sum_{\vec{q}, |\vec{k}-\vec{q}| \leq k} u_\beta(\vec{k}-\vec{q}, t) u_\gamma(\vec{q}, t) \quad (1)$$

$$\nu_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) = -\frac{i}{2} (k_\beta \delta_{\alpha\gamma} + k_\gamma \delta_{\alpha\beta} - 2 \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{k^2})$$

$$\omega(k) = (\nu + \nu_{\text{tur}}(k)) k^2$$

$$\nu_{\text{tur}}(k) \sim \int_{mk}^{\infty} dq \frac{E(q)}{q^2}$$

となる。この式の意味は明らかで、 $u_\alpha(\vec{k}, t)$ は乱流粘性を受けながら大きなスケールの乱れと相互作用している。乱流粘性は k より波数の大きな乱れの強さにより決定され、 $E(q)$ はエネルギースペクトラム、 m は 2 ぐらいもと、としている。この式を導くにあたり、 $\vec{u}(\vec{q})$ はガウス分布をしていると仮定している。上の reduced Navier-Stokes 方程式において $u_\alpha(\vec{k}, t)$ の源は右辺の大きな乱れの項である。source term としては上記のもの以外に小さなスケールの乱れからもあるはずであるが、乱流においてはその項は小さい。小さなスケールの乱れが積み重なるといく相転移とは乱流はこの点で異なる。

reduced Navier-Stokes 方程式の右辺を source term として取り扱う時注意をせねばならぬことがある。すなわち $q \sim 0$ と $q \sim k$ の項は単に $u_\alpha(\vec{k}, t)$ がゆが、くると変化する大きなスケールの流れ $\sum_{q < k} \vec{u}(\vec{q}, t)$ に乗っている効果を表わし、それは $u_\alpha(\vec{k}, t)$ を作り出すことではない。 $u_\alpha(\vec{k}, t)$ の源は次の展開項 $-\vec{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}} u_\beta(\vec{k}, t)$ により与えられる。勿論高次の項も源たがうが、最初の項のみを残せば、 $\langle |u_\alpha(\vec{k}, t)|^2 \rangle$ に対する方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\omega(k) \right] \langle |u_\alpha(\vec{k}, t)|^2 \rangle = -8 \nu_{\alpha\beta\gamma}^l(\vec{k}) \nu_{\alpha\delta\epsilon}^l(\vec{k}) \int_{-\infty}^t ds e^{-\omega(k)(t-s)} \\ \times \sum_{\vec{q}} \langle q_i q_j u_\gamma(\vec{q}, t) u_\epsilon^*(\vec{q}, s) \rangle \left\langle \frac{\partial u_\beta(\vec{k}, t)}{\partial k_i} \frac{\partial u_\delta(-\vec{k}, s)}{\partial k_j} \right\rangle \quad (2)$$

を得る。すなわち大きなスケールの乱れの数密度が $\langle |u_\alpha(\vec{k}, t)|^2 \rangle$ を作り出していることを示している。 Σ 記号のプライムは q は nk より小さいことを意味する (n は何程度)。

$\langle |u_\alpha(\vec{k}, t)|^2 \rangle$ に対する方程式 (2) は、 k より大きな波数からの寄与は $\int_{mk}^{\infty} dq E(q)/q^2$ の形で、 k より小さな波数からの寄与は $\int_0^{nk} dq E(q) q^2$ で表わされることを示している。したがって $E(q) \sim q^{-\alpha}$ と表わせば $3 > \alpha > -1$ の範囲では k の近傍の寄与が主であることになる。エネルギースペクトラム $E(k)$ は、3次元乱流ではエネルギーが保存されることより、(2) の右辺に k を乗じたものが ε/k のオーダーでなければならぬことより、 $\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ のように表わされる。

空間の粗視化によ、(1) の $\mathcal{U}_{\alpha\beta}(k)$ は当然小さなスケールの乱れがくり込まれた vertex でなければならぬ。くり込まれた vertex $\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(\vec{k})$ は自己エネルギーの計算と同じ手続きによ、て計算される。最低次の補正は3種のダイアグラムで与えられるが、計算結果は $\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(\vec{k})$ の k 依存性は $\mathcal{U}_{\alpha\beta}(\vec{k})$ のそれと同じであることを示す。高次の補正が $\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(\vec{k})$ の k 依存性を変える可能性はないことはなはなしいが、運動量輸送を表わす方程式の形が空間の粗視化によ、て変化を受けることはむしろないのではないかと考えられる。

最後に intermittency (間欠性) について述べた。1941年の

Kolmogorovの理論によれば、縦方向の速度差 $\Delta u(r) \equiv u(r) - u(0)$ の n 次の相関関数は $\langle (\Delta u(r))^n \rangle \sim \epsilon^{n/3} r^{n/3}$ となるが、実際は Landau と Lifshitz の指摘のように ϵ は変らっている。Van Atta と Park によれば測定された $\Delta u(r)$ の分布関数は r が減少するに従って、Gauss 分布から離れてきて、計算された n 次のモーメントは r の広い範囲にわたって $\langle (\Delta u(r))^n \rangle \sim r^{n/3} (L/r)^{5n}$ を満足する。 n が小さい時は r は 0 に近いが、 n が大きくなるにつれて増加する。言い換之れば、低次のモーメントは 1941 年の Kolmogorov の理論でよく近似されるが、高次のモーメントに関してはそれは正しく記述しているとは言えない。

3次元の Navier-Stokes 方程式において $\nu=0$ でエネルギーが保存されることはきわめて重要である。エネルギーとかエネルギーフラックスのような低次のモーメントはエネルギーの保存の要請に大きく支配されるが、他方高次のモーメントはそうではない。したがって低次のモーメントと高次のモーメントは全く異質のものであるがもしも、実用的には低次のモーメントが大切であることには議論の余地がないが、高次のモーメントも乱流それ自体の重要な部分である。乱流の不完全性が(1)からどのように得られるかは未だ明らかではないが、(1)の右辺の source term のゆらぎと結びついていることは正しいであろう。