数理解析研究所講究録
第 275 巻 1976 年 99-120

乱れのモード分解と平衡統計分布

名大 工学部 桑原真二

§1. まえおき

今日の統計流体力学の主な対象は、縮まない粘性流体における乱流である. 古典統計力学は, 自由度 f のハミルトンの力学系に対して $q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f$（一般座標および一般運動量）の $2f$ 次元の相空間にはる確率分布を考えそれからマクロな物理的性質を引き出すことを目的としている。古典統計力学との対応でいえば, 統計流体力学は連続無限次元のナヴィエ・ストークス力学に対して, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ の関数空間にはる確率分布（汎関数）を考え, それから乱流マクロの物理的性質を引き出すことである。 この考えは, Hopf 方程式の基本的考え方であるが, 数学的に汎関数微分方程式をとりあつかうことになるので非常にむずかしくなる。

ここでは, モード分解の方法によって, 連続無限を可附番無限に, さらに有限項で近似することによって, 結局汎関数を多変数関数に落して考察することにする。

一般に3次元空間 Ω（時間によってもよい）におけるベクトル $\mathbb{v}(\mathbb{x})$ $(\mathbb{x}\in\Omega)$ を要素にもつ関数空間 $\{\mathbb{v}(\mathbb{x})\}$ を考える。 ここで $\{\mathbb{v}(\mathbb{x})\}$ に制限 たとえば $\operatorname{div}\mathbb{v}=0$ 等を課し、任意の $\mathbb{v}(\mathbb{x})$ が

$$\mathbb{v}(\mathbb{x},t)=\sum_{\ell} a_{\ell}(t)\,\mathbb{v}_{\ell}(\mathbb{x}) \tag{1.1}$$

と表わされたとき，$\{\mathbb{v}(\mathbb{x})\}$ はモード分解可能とよぶことにする。Ω が時間的に変化するばあいには $\mathbb{v}_{\ell}(\mathbb{x},t)$ となる。そして $\{\mathbb{v}_{\ell}(\mathbb{x})\}$ を基ベクトル，$\{a_{\ell}\}$ を座標とよぶことにする。

さて，モード分解の方法を2次元ポアズイユ乱流に適用してみる。 まず物理的状況としては，平均の圧力勾配は一定とする。 また，数学的簡単さのために，撹乱は2次元，流れの方向に周期性をもつと仮定する。 層流2次ポアズイユ流に微小な乱れを加えたものを初期条件とする初期値問題を考える。

溝 $0\leq y\leq a$ における2次元ポアズイユ流 u は

$$\left.\begin{aligned} u &= 4U(1-y/a)\,y/a,\\ U &= -a(d\bar{p}/dx)/8\mu \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

で与えられる。 $d\bar{p}/dx$ は圧力勾配，μ は粘性率である。そこで，時間 t，デカルト座標 $\mathbb{x}=(x,y,z)$，流速 $\mathbb{v}=(u,v,w)$ および圧力 p を a/U ，a，U，ρU^2（ρ は密度）で

無次元化したものをもちいると，連続およびナヴィエ・ストークスの方程式は

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\,\mathbf{v} = -\,\mathrm{grad}\,p + \frac{1}{R}\nabla^2\mathbf{v} \tag{1.4}$$

となる。　$R = \bar{U}a/\nu$.

ここで

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ p &= \bar{p} + \tilde{p}(\mathbf{x}, t), \\ \bar{\mathbf{u}} &= \{4(1-y)y,\ 0,\ 0\}, \\ \bar{p} &= -\,8x/R + \mathrm{const.} \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

とおけば，(1·3)，(1·4) から

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}}\cdot\mathrm{grad})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\,\bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\,\mathbf{u} = -\,\mathrm{grad}\,\tilde{p} + \frac{1}{R}\nabla^2\mathbf{u} \tag{1.7}$$

をうる。

§2. モード分解

2次元攪乱を仮定し，

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{lm}(t)\,\mathbf{u}_{lm}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

とモード分解可能と考える。 基ベクトルに

i) L_2 の意味で完備である。 すなわち任意の $\mathbf{u}$ に対して

$$\lim_{L,M\to\infty}\iint \left| \mathbf{u}(\mathbf{x},t)-\sum_{l=-L}^{L}\sum_{m=0}^{M} a_{lm}(t)\,\mathbf{u}_{lm}(\mathbf{x}) \right| dx\,dy = 0. \qquad (2.2)$$

ii) 正規直交性

$$(\mathbf{u}_{lm}, \mathbf{u}_{pq}) \equiv \iint_{\Omega} \mathbf{u}_{lm}^{*}(\mathbf{x})\cdot \mathbf{u}_{pq}(\mathbf{x})\,dx\,dy = \delta_{lp}\delta_{mq}. \qquad (2.3)$$

iii)
$$\operatorname{div} \mathbf{u}_{lm} = 0. \qquad (2.4)$$

iv)
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_{lm}(x, 0) &= \mathbf{u}_{lm}(x, 1) = 0, \\ \mathbf{u}_{lm}(x+L, y) &= \mathbf{u}_{lm}(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

という条件を課する。

(2·2)～(2·5)の条件を満足するベクトル関数系をつくるには次のようにすればよい。

$$\mathbf{u}_{lm} = (u_{lm}, v_{lm}) \quad 2\text{成分ベクトル}, \qquad (2.6)$$

$$u_{lm} = \partial\psi_{lm}/\partial y, \quad v_{lm} = -\partial\psi_{lm}/\partial x, \qquad (2.7)$$

$$\psi_{lm}(\mathbf{x}) = X_l(x)\, f_{lm}(y), \qquad (2.8)$$

$$X_l(x) = \sqrt{\frac{\hat{k}}{2\pi}}\, e^{i\hat{k}lx}, \qquad 2\pi\hat{k} = L \qquad (2.9)$$

とおくと，(2·2), (2·4)および(2·5)の後の条件は満足される。 (2·7)から，$y = 0, 1$ で

$$\left.\begin{aligned} f'_{0m} &= 0, & l &= 0, \\ f_{lm} = f'_{lm} &= 0, & l &\neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

を満足しなければならない。今

$$\left.\begin{aligned} \hat{f}_{0m}(y) &= -\cos m\pi y, \\ \hat{f}_{lm}(y) &= \cos m\pi y - \cos(m+2)\pi y, \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

とおけば*)，正規直交性(2·3)をのぞく(2·2)~(2·5)の条件を満足するベクトル関数系をつくることができる。そこでシュミットの直交化によって，すべての条件を満足する関数系がえられる。

このようにしてつくり上げた $\{u_{lm}\}$ を(2·7)に代入して

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\dot{a}_{sn}u_{sn}+a_{sn}\big\{(\bar{u}\cdot\mathrm{grad})u_{sn}+(u_{sn}\cdot\mathrm{grad})\bar{u} -\frac{1}{R}\nabla^2 u_{sn}\big\}\Big]+\sum_{s,n=-\infty}^{\infty}\sum_{r,p=0}^{\infty}a_{sr}a_{np}(u_{sr}\cdot\mathrm{grad})u_{np} = -\mathrm{grad}\,\tilde{p} \tag{2.12}$$

をうる。これと u_{lm} との内積をとると

$$\dot{a}_{lm}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{R}A_{lm}^{n}+iS_{lm}^{n}\Big)a_{ln}-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{p,r=0}^{\infty}A_{lm}^{npr}a_{l-nr}a_{np} \tag{2.13}$$

をうる。ここで

$$\left.\begin{aligned} A_{lm}^{n} &= -(u_{lm},\nabla^2 u_{ln}),\\ iA_{lm}^{npr} &= (u_{lm},(u_{l-nr}\cdot\mathrm{grad})u_{np}),\\ iS_{lm}^{n} &= -(u_{lm},(\bar{u}\cdot\mathrm{grad})u_{ln})-(u_{lm},(u_{ln}\cdot\mathrm{grad})\bar{u}) \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

である。A_{lm}^{n} は粘性項，S_{lm}^{n} は $\bar{u}$ とモードとの相互作用

---

*) 半区間フーリエ級数によって $\{\hat{f}_{lm}\}$ はつくられているから，フーリエ級数の完備性によって，$\{\hat{f}_{lm}\}$ は(0,1)の区間で完備である。

の項で，乱れへのエネルギーの供給をあらわし，$A_{\ell m}^{npr}$ はモードの間の非線形相互作用をあらわしている。（2·12）の右辺と $u_{\ell m}$ との内積は

$$
\begin{aligned}
(u_{\ell m},\ \mathrm{grad}\ \tilde{p}) &= \iint u_{\ell m}^{*}\cdot \mathrm{grad}\ \tilde{p}\ dS \\
&= \oint (u_{\ell m}^{*}\tilde{p})\cdot n\ dS \\
&= \int_0^1 u_{\ell m}^{*}\tilde{p}\Big|_{x=L/2} dy - \int_0^1 u_{\ell m}^{*}\tilde{p}\Big|_{x=-L/2} dy = 0.
\end{aligned}
$$

結局，周期性によって落ちる。このようにして連続無限次元の相空間 $\{u(x)\}$ は可附番無限の相空間 $\{a_{\ell m}\}$ となる。

§3. 縮小相空間

さて $a_{\ell m}$ を適当な方法で1列にならべ無限次元のベクトル a とする。そうすると（2·13）はシンボリックに

$$\dot{a} = \mathbb{L}(a) + \mathbb{N}(a, a) \tag{3.1}$$

とかける。ここで $\mathbb{L}$, $\mathbb{N}$ は（2·13）における右辺の1次（線形），2次（非線形）の項である。a のはる空間を $\{a\}$ であらわし，$\{a\}$ を直和で分解する：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\{a\} = \{a'\} + \{a''\}, \\
&a' = (a_1, \cdots, a_N, 0, 0, \cdots) \\
&a'' = (0, \cdots, 0, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots).
\end{aligned}
\right\} \tag{3.2}
$$

ここで，われわれが必要とする乱流の情報はほとんど$\{a'\}$にふくまれていると仮定すれば，a'の力学だけを考えればよい。$\{a'\}$を縮小相空間とよぶことにしよう。そこで(3・1)から

$$\dot{a}' = \mathbb{L}_1(a') + \mathbb{L}_2(a'') + \mathbb{N}_1(a', a') + \mathbb{N}_2(a', a'') + \mathbb{N}_3(a'', a'') \tag{3.3}$$

をうる。(3・3)では$\{a''\}$の情報を必要とするが，$\{a'\}$だけによって閉じた力学系として

$$\dot{a}' = \mathbb{L}_1(a') + \mathbb{N}_1(a', a'), \tag{3.4}$$

$$\dot{a}' = \tilde{\mathbb{L}}(a') + \tilde{\mathbb{N}}(a', a'), \tag{3.5}$$

$$\dot{a}' = \mathbb{L}_1(a') + \mathbb{N}_1(a', a') + \mathbb{F} \tag{3.6}$$

が考えられる。(3・4)はa''による項を完全に落し(cut off)，(3・5)では，a''の効果を$\tilde{\mathbb{L}}$，$\tilde{\mathbb{N}}$にくりこみ，(3.6)では，ランダムな力$\mathbb{F}$に入れたものである。ただし，$\tilde{\mathbb{L}}$，$\tilde{\mathbb{N}}$，$\mathbb{F}$の形は，別に物理的に考えなければならない。(3・4)，(3・5)は決定論的，(3・6)は確率論的方程式である。縮小相空間において，確率密度$P(a', t)$を導入すれば，確率保存の式は，(3・4)または(3・5)にもとずいて，

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a'}(\dot{a}' P) = 0 \tag{3.7}$$

とかかれる。

(3・4)はエネルギー供給の項をもっているからある臨界

レイノルズ数以上では，ある初期条件で初期値問題を解けば，十分大きい時間に対して，十分発達した乱流に対応する統計的平衡状態に達するであろう。そして，その統計的性質は初期条件によらないと思われる。このような状態で，長時間の解をみつければ，それから $P(a', t)$ の定常解としての近似がえられるであろう。そのような観点から（3·4）の統計的定常解と（3·7）の定常解は同値である。そこでわれわれは（3·4）の初期値問題を考えることにする。

第1図では $L=2$ $(\hat{k}=\pi)$ すなわち，x の周期が2のばあいのモードの流れ模様が示してある。u_{lm} は一般に複素数で表わされるが，その実数部または虚数部を表わしていると考えてよい。実数部と虚数部は半周期 $1/2l$ だけずれた流れ模様をもっている。そして $a_{-lm}u_{-lm}+a_{lm}u_{lm}$ が実数になるように作ってあり，u_{-lm} と u_{lm}，または $\mathrm{Re}\, u_{lm}$ と $\mathrm{Im}\, u_{lm}$ が独立な成分で，相似な流れ模様をもっている。ただし $l=0$ のばあいは，u_{0m} は実数であり各1個の独立な成分をもつだけである。また $l=m=0$ は対応する流れはない。以下（2·3）の意味で正規直交化された u_{lm}，または $\mathrm{Re}\, u_{lm}$，$\mathrm{Im}\, u_{lm}$ を（独立）成分とよび，同じ流れ模様をもつ2つの独立な成分をまとめてモードとよぶことにする。

数値計算は独立成分数 20（モード数11）と 35（モード数19）の2つのばあいについて，共にレイノルズ数 20,000 について行った。オ2図はモード数11のばあいで，$a_{11}=0.01/\sqrt{2}$，$a_{12}=0.01/\sqrt{2}$，それ以外は 0 ととった初期条件から始めたときの，振幅 a_{lm} の時間的消長を示し，実線は実数部，破線は虚数部をあらわす。オ3図はモード数19のばあいで (a)〜(e) は各モードのエネルギーの消長を，(f) は乱れの全エネルギー $\sum_{l=-3}^{3}\sum_{m=0}^{3}\frac{1}{2}|\tilde{a}_{lm}|^2$ の時間的消長を示している。ここで $\tilde{a}_{lm}=a_{lm}-\bar{a}_{lm}$，$\bar{a}_{lm}$ は a_{lm} の時間的平均値で，基本流へのフィード・バックをあらわす。初期条件はオ1のばあいと同じであるが，時間は 300 〜 350 である。オ3図 (6) の (2·1) モードにえがかれた実線と破線は、対応する振幅の実数部と虚数部をあらわしている。

オ2，3図からわかるように，ある臨界レイノルズ数（このばあい，層流安定論から計算されるものは約 10,000 である）以上では，簡単な初期条件から始めても，各モードにエネルギーがゆきわたり，$t\to\infty$ ではある統計的平衡状態に達すると考えられる。u_{0m} は x 依存性のないモードであるが，$m=$奇数のモード（$y=\frac{1}{2}$ に対して対称な流速をもつ）は，$t\to\infty$ で 0 でない平均値に達し，

基本流へのはねかえりがあることがわかる。才3図(ナ)は乱れのエネルギーがある一定値に到達することを示しているように思われる。

§4. "乱流温度"についての考察

乱流を平均流と乱れに分離して考察することが一般に行われている。原子論にもとずく現象論の説明でのミクロ(原子的局面)とマクロ(連続体的局面)に対応して，平均流および乱れに対応する状態をおのおの"乱流マクロ"，"乱流ミクロ"とよぶことにする。

乱流ミクロと乱流マクロの間には力学的相互作用がある。たとえば，レイノルズ応力は乱流マクロの運動方程式に対する乱流ミクロの効果と考えられる。そして通常の応力と変形速度に比例し，その比例係数として渦粘性を導入しよう。この仮定では，渦粘性には乱流ミクロの効果をとり入れなければならない。分子粘性では，ミクロの効果は，温度の依存性としてとり入れられている。温度はミクロの運動のはげしさに対応する量である。乱流においても，渦粘性のような，乱流ミクロと乱流マクロを結びつける量を考えるときには"乱流温度"のような概念を導入するのが便利のように思われる。

温度の概念は，ミクロスコピックには，各自由度の平均の運動エネルギーと関係づけて定義される：

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}k_B T. \tag{4.1}$$

しかし，乱流では自由度が無限大であり，各自由度がエネルギー的に等分配にない。最も素朴には，熱接触により温度の高低が定義される。このような考えにもとずけば，ある種の力学的，幾何学的に相似な力学系同志の間には乱流温度の高低が定義できる。たとえば，ふとさのことなる，長さの等しい2本の管の両端に同じ圧力をかけたハーゲン・ポアズイユ乱流を考える。端の効果を無視すれば，対応する位置では，平均圧力は等しいであろう。そこで，対応する位置を細い管でむすび，圧力的に接触させる。平均圧力が等しいから，平均的に流れはないが，小さい流れの変動があり，そのため乱れのエネルギーが一方から他方へ移動するであろう。そうすれば，乱れのエネルギーがへった系が乱流温度が"高い"とし，乱れのエネルギーがふえた系を"低い"と定義することができる。

混合距離理論において，カルマンは渦粘性として

$$\epsilon_T = k^2\left((dU/dy)/(d^2U/dy^2)\right)^2|dU/dy| \tag{4.2}$$

を仮定した。kは定数，$U=U(y)$は流速である。また，一様等方性乱流のハイゼンベルグの理論では渦粘性は

$$\eta(k) = A\int_k^\infty k^{-3/2}E(k)^{1/2}\,dk \qquad (4.3)$$

と仮定されている。 ここでAは定数，E(k)はスペクトルである。

(4·2)では混合距離 l は $l \sim (d\bar{U}/dy)/(d^2\bar{U}/dy^2)$ と仮定されており，乱流ミクロについての考察はなされていない。 また(4·3)では，乱流ミクロとして $k^{-\frac{3}{2}}E(k)^{\frac{1}{2}}$ の物理的意味が判然としない。 われわれは，乱流ミクロの構造を有機的に反映した渦粘性の理論を必要としている。このような観点から，乱流温度のような概念が役に立つかもしれない。

§5. むすび

われわれの目的は決定論的ナヴィエ・ストークス方程式にもとずく乱流において，統計法則を見出すことにある。 一様等方性乱流における，流れの場のフーリエ分解に対応して，もっと一般の流れの場について，モード分解によって乱れの場を表すことを考え，例として2次元ポアズイユ乱流について数値的に解いて次の結果をえた。

(1) どのような初期値よりはじめても，レイノルズ数が十分小さければ，減衰し，十分大きければある統計的平衡状態(定常乱流)にむかう。

(2) 定常乱流では，乱れから基本流へのフィード・バックがあり，基本流の変形がおこる。

(3) 定常乱流では，乱れのエネルギーは，ほぼ一定にたもたれる。

乱流の構造，とくに渦粘性を考えるばあい，乱流温度という概念を導入して，乱流ミクロの効果をとり入れる指針を与えた。

参考文献：

桑原真二：　可附番自由度の力学系の統計流体力学，数理研講究録 171(1973/1) 95-107.

桑原真二：　ブラウン運動と乱流中に浮遊する大きい粒子の運動，数理研講究録 185(1973/9) 126-136.

桑原真二：　非等方，非一様な乱流はいかにしてとりあつかいえるか ― 平面ポアズイユ乱流の数値実験に関連して，才6回乱流シンポジウム論文集(東大，宇宙研) 151-156.

桑原真二：　非等な乱流の非線形力学，東大工学部紀要 A No. 12(1974) 42-43.

桑原真二 ： 一般化 Burgess 方程式と平面 Poiseuille 乱流の数値実験，数理研講究録 218(1974/8) 129-145.

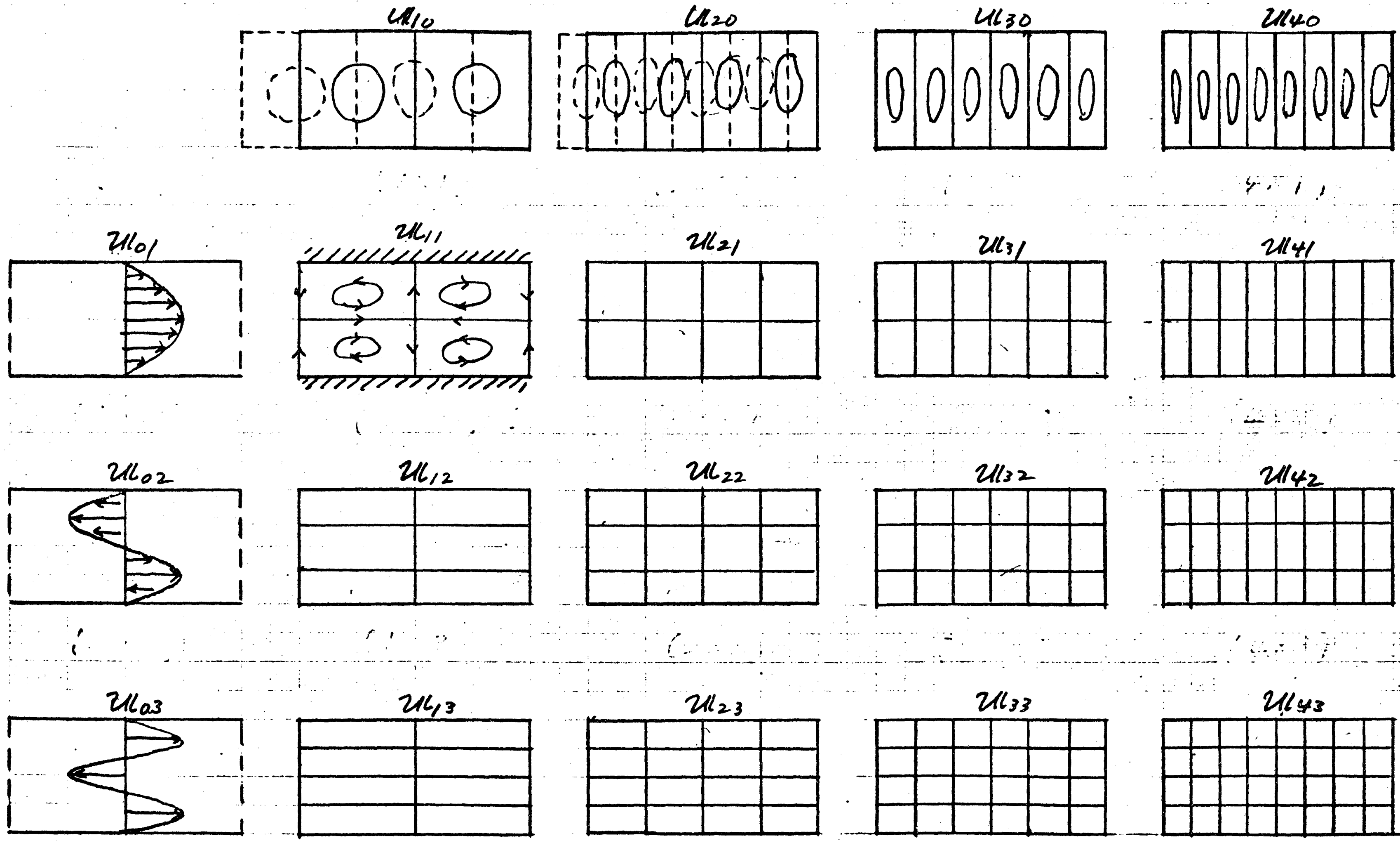
桑原真二 ： 平面ポアズイユ乱流の数値実験と二，三の考察 数理研講究録 244(1975/7) 78-89.

桑原真二 ： 一般の乱流に対する基本的考察，第7回乱流シンポジウム論文集 (1975/11) 55-61.

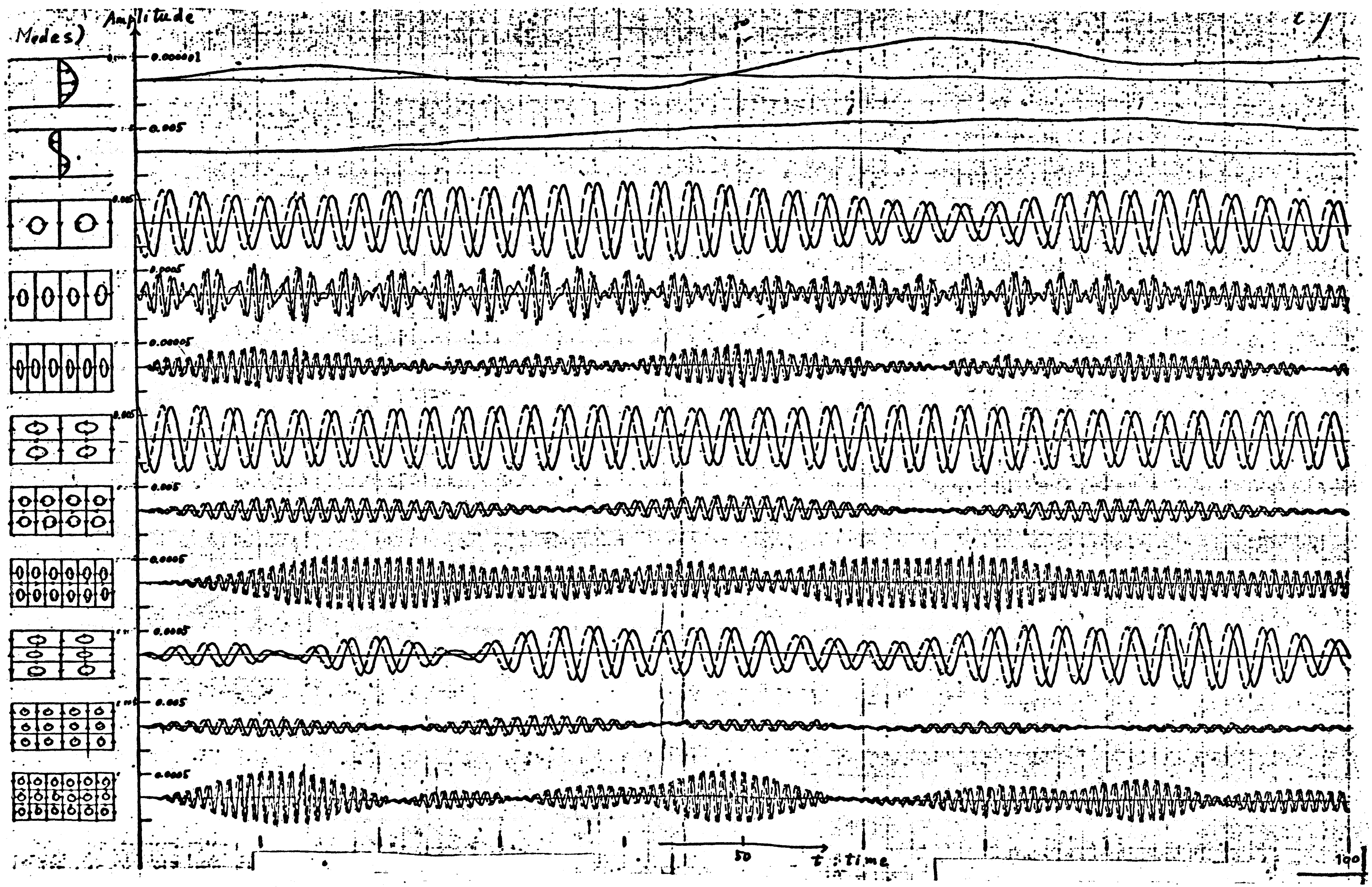
桑原真二 ： 統計流体力学，物理学会第31回年会予稿 (1976)

Kármán T. von: Proc IV Intern. Congr. Appl. Mech. Vol. 1. Stokholm (1930)

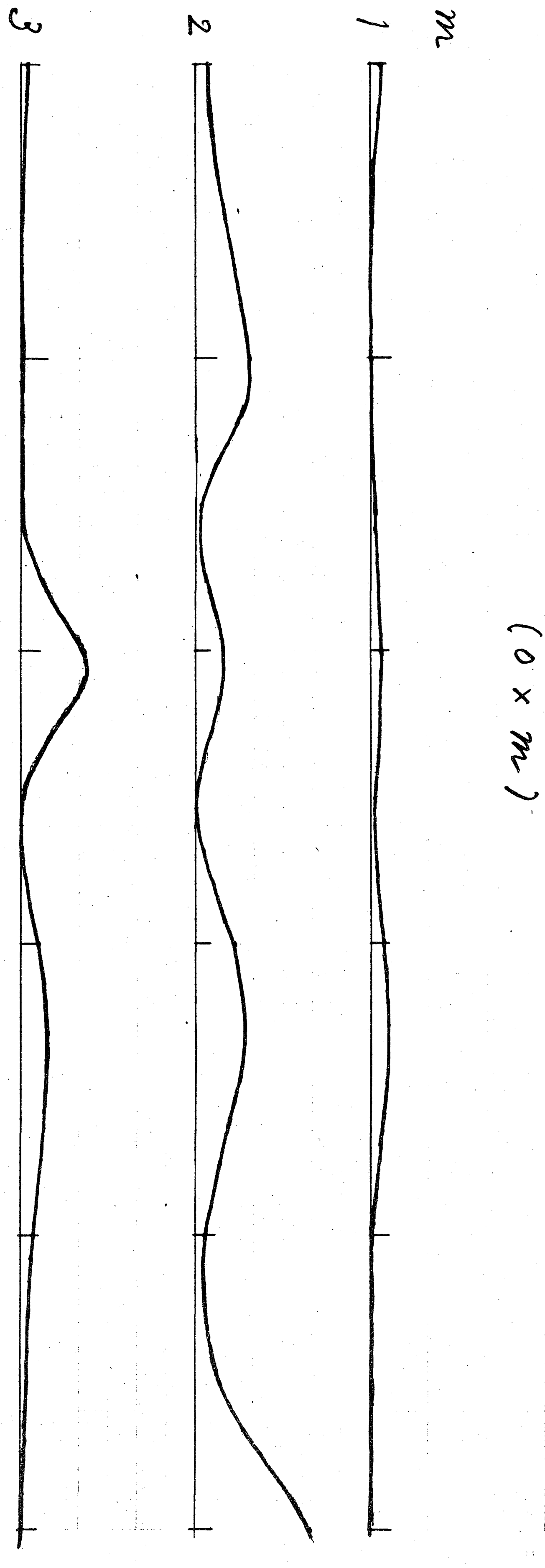
Prandtl, L: Verhandl. II Intern. Kongr. Tech. Mech. Zürich (1926)



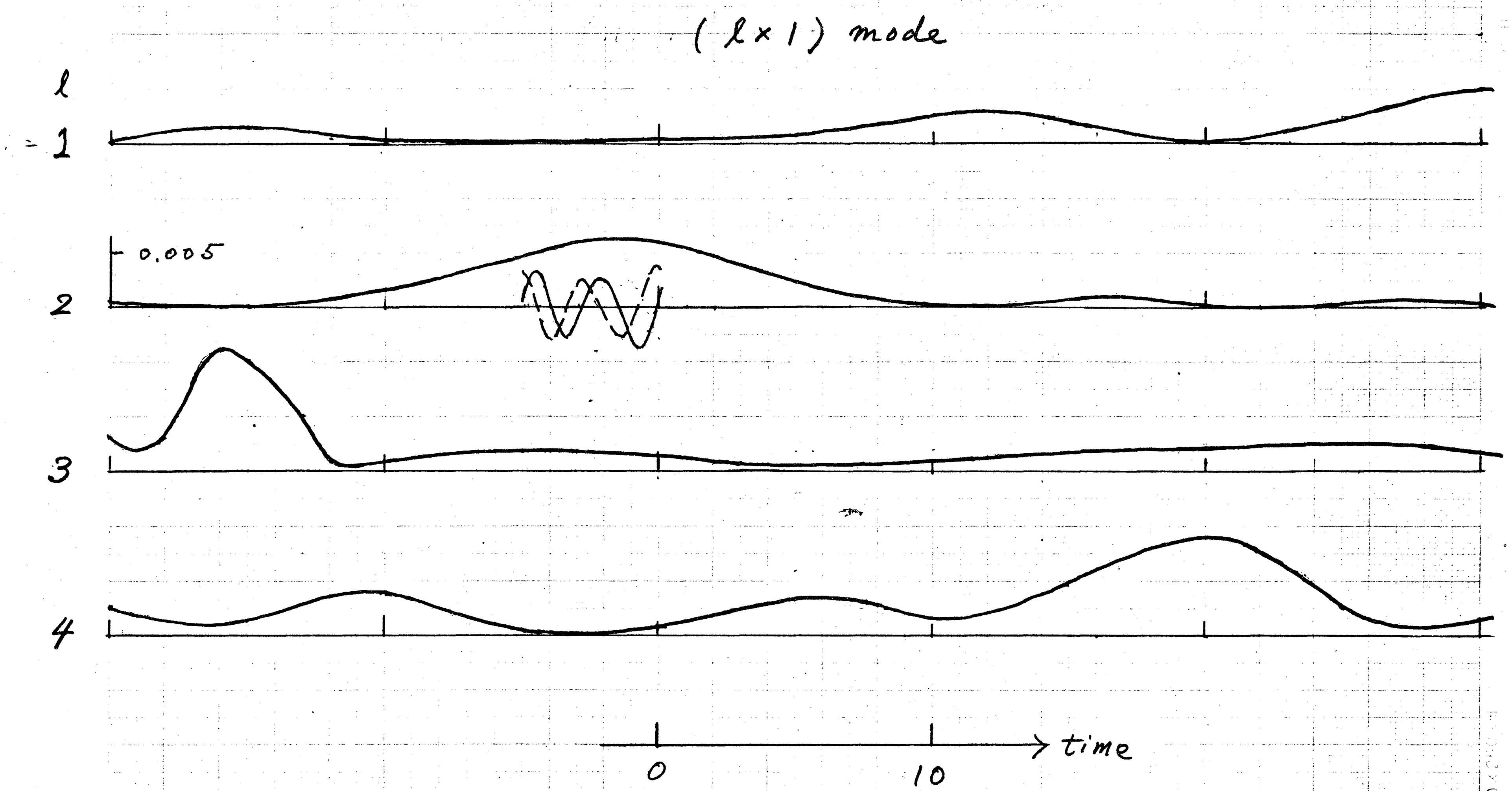
第1図. 各モードの流れ模様



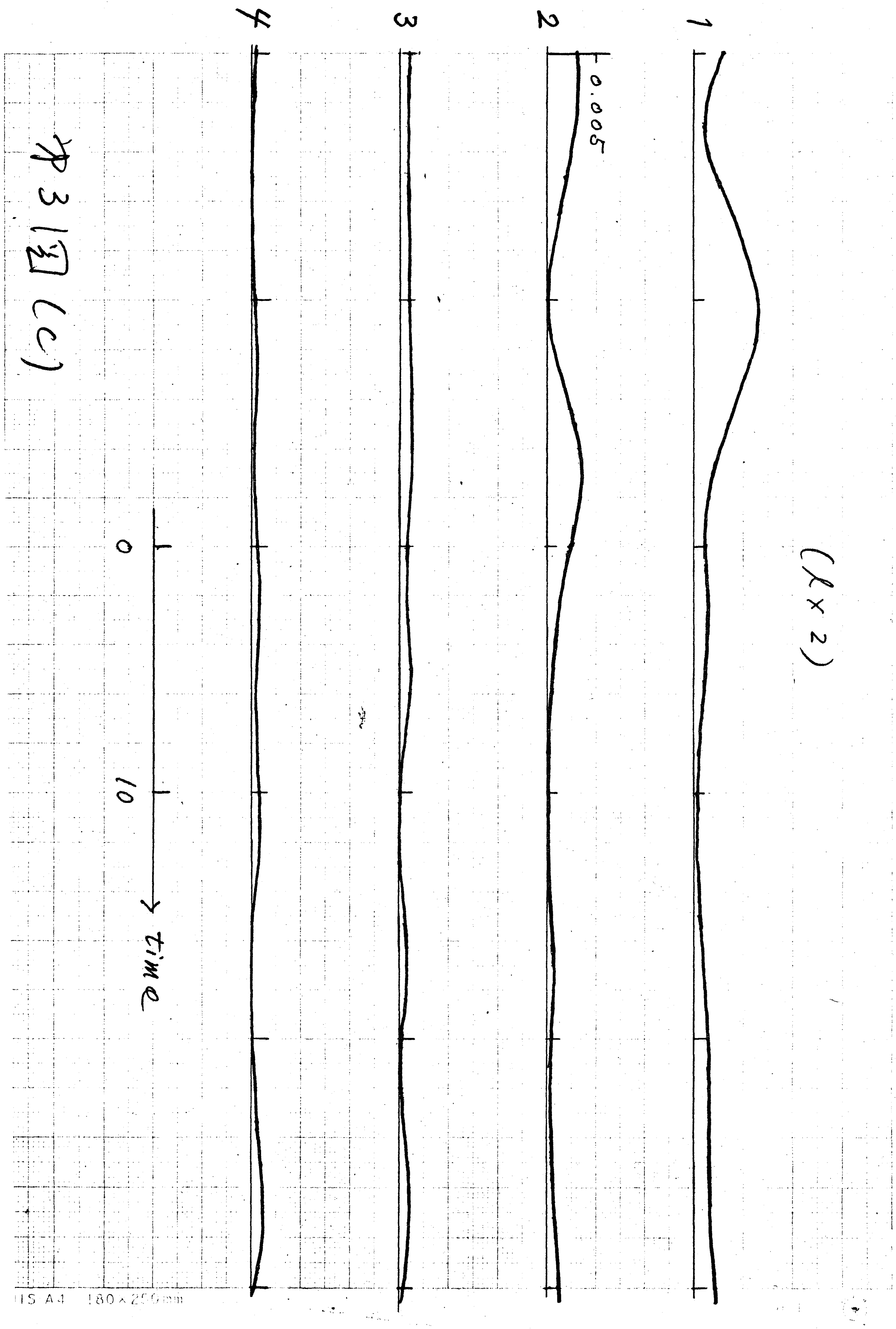
第2図, R=20,000 の 2次元ポアズイユ流のモードの振巾



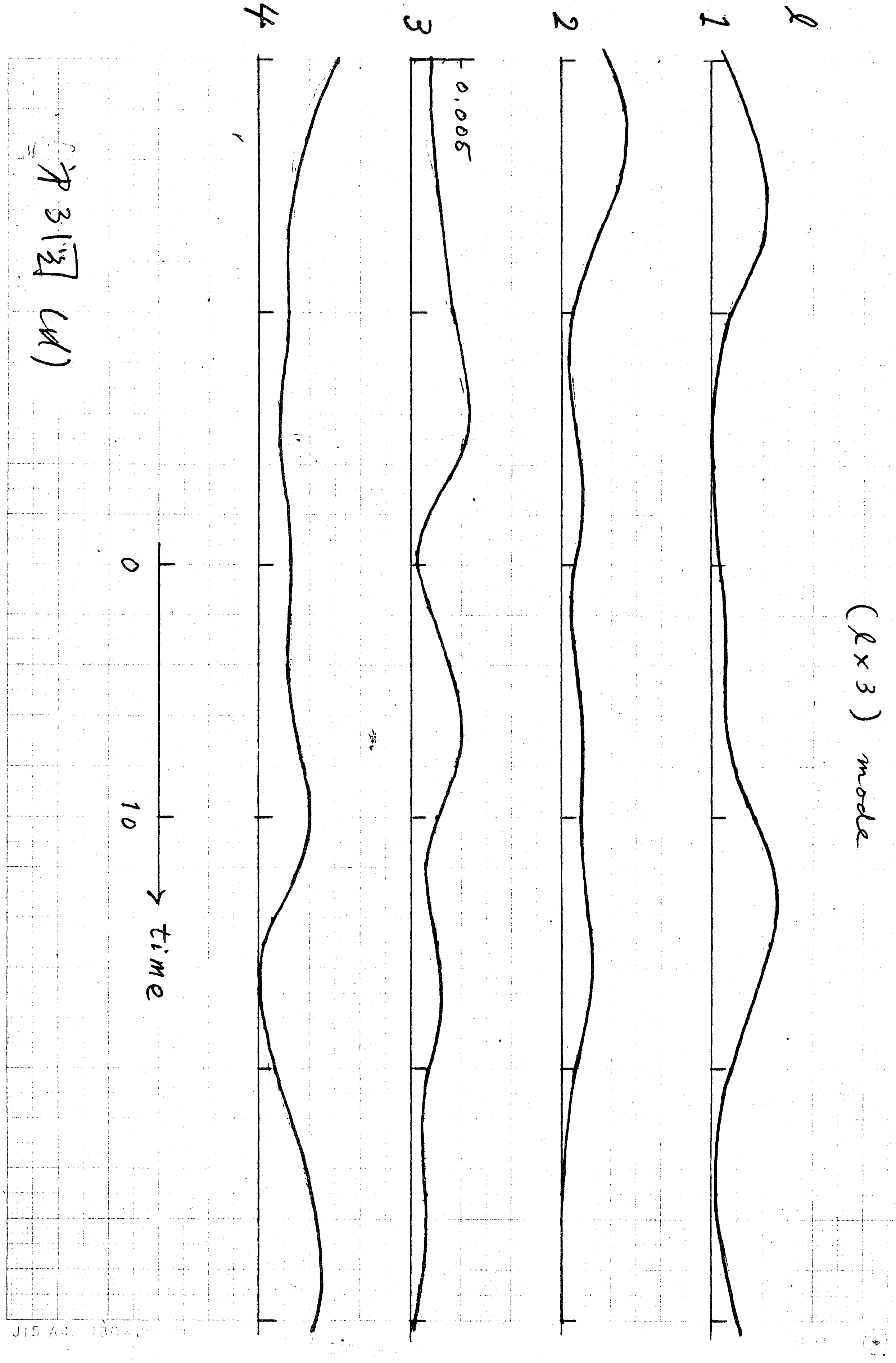
第3図 (a)



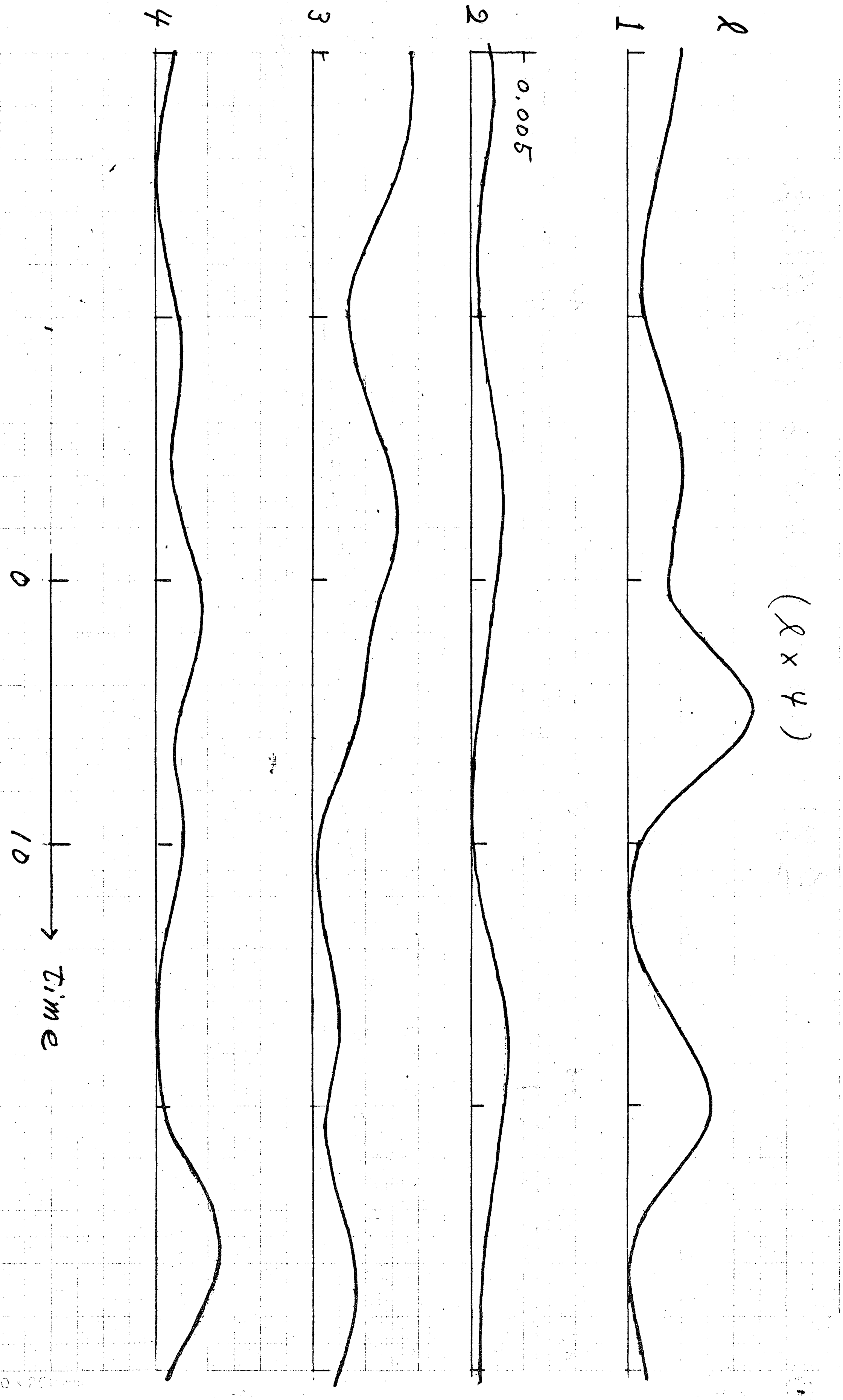
第3図 (b)



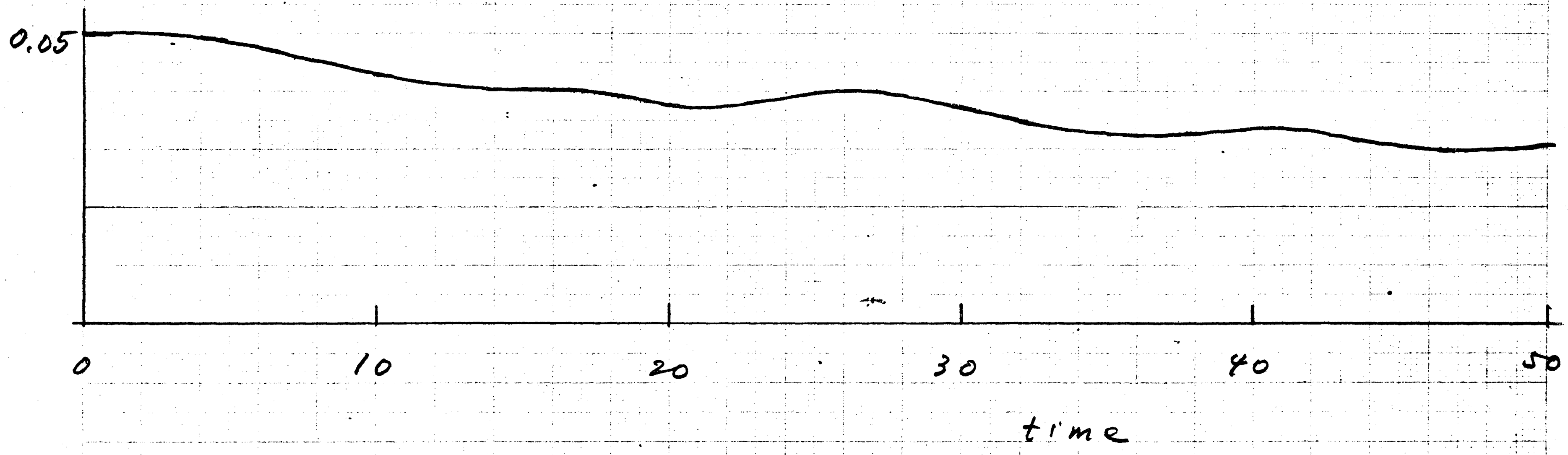
第31図(c)



第3図 (d)



第31図(e)



第31図(f) 乱れのエネルギーの消長