数理解析研究所講究録
第276巻 1976年 26-41

The nullity of compact Kähler submanifolds in a complex projective space

阪大 理学部 木村良夫

Riemannian manifold の minimal submanifold は geodesic の多次元への拡張とみなすことができる。geodesic の index と nullity については、様々の研究がなされているが、minimal submanifold に対しても、index と nullity の概念が、Simons [6] によって導入された。さらに Kähler submanifold は minimal となり、特に compact の時、その index は、いつも 0 となる。そして、nullity は normal bundle の holomorphic section 全体のなす vector space の次元に等しいことが明らかにされた（Simons [6]）。

ここでは Simons [6] の結果を使って complex projective space の compact Kähler submanifold の nullity を詳しく調べよう。

§1 では complex projective space の中の compact Kähler submanifold の Killing nullity を決定し、

その結果を使って complex projective space の中の compact Kähler submanifold の nullity の最小値を求める。

§2では complex projective space の中の compact Hermitian symmetric space の nullity を考え、それを完全に決定する。その結果から、この場合『compact Kähler submanifold の Jacobi field は compact Kähler submanifold の 1-parameter family から引き起こされる』ことが分かる。

§1 complex projective space の compact Kähler submanifold の nullity の最小値

$\overline{M}$ を Kähler manifold とする。M を $\overline{M}$ の compact Kähler submanifold とすると、M は $\overline{M}$ の minimal submanifold となることが知られている。compact Kähler submanifold M について、次のような結果が得られている(Simons [6])。

$$\begin{cases} M\text{の index} = 0 \\ M\text{の nullity} = \dim_{\mathbb{R}}\{\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp} \mid D_{JX}\xi = J D_X \xi \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)\} \end{cases}$$

ここで、$\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$, D, J の記号は Kobayashi and Nomizu [2] に従っている。

M. $\bar{M}$ の holomorphic tangent bundle をそれぞれ $T(M)$. $T(\bar{M})$ とすると M の normal bundle $N(M)$ は.

$$N(M) = T(\bar{M})|M / T(M)$$

によって定義される。$N(M)$ の holomorphic section 全体を $\Gamma(N(M))$ とおくと. vector space として.

$$\{\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp} \mid D_{JX}\xi = JD_X\xi \ \forall X \in \mathfrak{X}(M)\} \cong \Gamma(N(M))$$

となることが分かる。ところで $N(M)$ の 0次の cohomology group $H^0(M, SN(M))$ がちょうど $\Gamma(N(M))$ であるから. M の nullity を $n(M, \bar{M})$ または $n(M)$ と表わすと Simons の結果より

$$(1.1) \qquad n(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, SN(M))$$

となる。

(1.1) を使って M の nullity を研究するわけであるが. この節では. 次の定理を証明することが目的である。

<u>定理 1</u>　M を N次元 complex projective space $P_N(\mathbb{C})$ の P次元 compact Kähler submanifold とする。その時

$$n(M) \geqq 2(p+1)(N-p)$$

が成り立つ。しかも等号は $M = P_p(\mathbb{C})$ (totally geodesic) の場合に限り成り立つ。

M の connected component を M_0 とすると $n(M) \geqq n(M_0)$ となるから、M を connected として定理を証明すればよい。従って M を $P_N(\mathbb{C})$ の compact connected Kähler submanifold で $P_N(\mathbb{C})$ の totally geodesic submanifold $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed しているとする。

一般に Riemannian manifold X に対して、

$$\mathfrak{k}(X) = \{ X \text{ 上の Killing vector field} \}$$

とおく。さて、$\mathfrak{k}^N$ を

$$\mathfrak{k}^N = \{ Z^N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp} \mid Z \in \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C})) \}$$

とおき、$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}^N$ を M の Killing nullity と呼び $n_{\mathfrak{k}}(M)$ で表わす。ここで $(\ )^N$ は M に normal な成分への orthogonal projection を表わすものとする。$n_{\mathfrak{k}}(M)$ の定義より、すぐに次のことが分かる。

(1.2) $\quad n(M) \geqq n_{\mathfrak{k}}(M)$

まず $n_{\mathfrak{k}}(M)$ を求める問題を考えよう。

<u>レンマ 1</u> $\quad n_{\mathfrak{k}}(M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C})) - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C}); M)$

ここで、$\mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C}), M) = \{ Z \in \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C})) \mid Z_m \in T_m(M) \ \forall m \in M \}$。

証明. 次の exact sequence より明らか。

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C}), M) \longrightarrow \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C})) \xrightarrow{(\ )^N} \mathfrak{k}^N \longrightarrow 0 \qquad q.e.d.$$

次に M の holomorphic isometry 全体のなす Lie group を $A(M)$ で表わす。また $P_N(\mathbb{C})$（または $P_n(\mathbb{C})$）の holomorphic isometry で M を不変にするもの全体のなす Lie group を $A(P_N(\mathbb{C}), M)$（または $A(P_n(\mathbb{C}), M)$）で表わす。そうすると $A(M)$ と $A(P_n(\mathbb{C}), M)$ の間に次の関係が成り立つ。

<u>レンマ 2</u>　$A(M) \cong A(P_n(\mathbb{C}), M)$ (as Lie group)

このレンマは Nakagawa and Takagi [5] の中の定理4.3の証明と同様の方法で証明できる。従ってここでは省略する。

<u>レンマ 3</u>　$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C}), M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}(M) + (N-n)^2$

証明. compact Kähler manifold の Killing vector field は holomorphic である（Matsushima [4]）。従って $\mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C}), M)$ および $\mathfrak{k}(M)$ の次元はそれぞれ $A(P_N(\mathbb{C}), M)$ と $A(M)$ の次元に等しい。

$A(P_N(\mathbb{C}), M)$ の元 g に対して. M が $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed していることから $g(P_n(\mathbb{C})) = P_n(\mathbb{C})$ となることが分かる。従って. レンマ 2 より $P_N(\mathbb{C})$ の適当な homogenious coordinate をとると、次のことがいえる。

$$A(P_N(\mathbb{C}),M) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda f & 0 \\ \hline 0 & h \end{array} \right) \in SU(N+1) ; \begin{array}{l} f \in A(P_n(\mathbb{C}),M) \\ |\lambda| = 1 \\ g \in U(N-n) \end{array} \right\} \Big/ \Gamma'$$

ここで $\Gamma' = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu \end{pmatrix} \in GL(N+1, \mathbb{C}) ; \mu^{N+1} = 1 \right\}$. q.e.d.

レンマ1 と レンマ3 より 次の結果を得る。

命題1 $n_{k}(M) = \dim_{\mathbb{R}} k(P_N(\mathbb{C})) - \dim_{\mathbb{R}} k(M) - (N-n)^2$.

一方 $M = P_p(\mathbb{C})$ (totally geodesic) の場合、$N(P_p(\mathbb{C}))$ が homogenious vector bundle となり、Bott の定理 (P10 参照) を適用して 次の結果を得る。

命題2 $n(P_p(\mathbb{C})) = 2(p+1)(N-p)$

定理1の証明 P次元 compact Kähler manifold X に対して

$$\dim_{\mathbb{R}} k(M) \leqq p^2 + 2p$$

となることが知られている (Lichnerowich [3])。その事と命題1 および (1.2) より、

$$
\begin{aligned}
& n(M) - 2(P+1)(N-P) \\
\geqq\ & n_{k}(M) - 2(P+1)(N-P) \\
=\ & N^2 + 2N - \dim_{\mathbb{R}} k(M) - (N-n)^2 - 2(P+1)(N-P) \\
\geqq\ & N^2 + 2N - P^2 - 2P - (N-n)^2 - 2(P+1)(N-P) \\
=\ & (N-P)^2 - (N-n)^2 \\
\geqq\ & 0
\end{aligned}
$$

等号成立の為には $n = P$ 即ち $M = P_P(C)$ でなければならない。 q.e.d.

§2 complex projective space の中の compact Hermitian symmetric space の nullity

simply connected compact Kähler homogenious manifold を Kähler C-space と呼ぶ。G を simply connected complex semi-simple Lie group とする。G の Lie subgroup U を G の maximal solvable subgroup とし、これを parabolic subgroup と呼ぶ。この時 $M = G/U$ は Kähler C-space となり、逆にすべての Kähler C-space はこのようにして得られることが知られている（Wang [7]）。

$\mathfrak{g}$、$\mathfrak{u}$をそれぞれ Lie group G, Uの Lie algebraとする。$\mathfrak{g}$の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$と$\mathfrak{h}$の real form $\mathfrak{h}_0$および$\mathfrak{h}_0$上の linear order をうまくとり、$\mathfrak{g}$を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha \qquad (\Delta = \{\text{root}\})$$

と root space に分解した時、次のようになるとする。

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})} \mathfrak{g}_\alpha$$

ここで $\Delta \supset \Delta(\mathfrak{u}) \supset \Delta^+$、$\Delta^+ = \{\alpha\in\Delta \mid \alpha > 0\}$。

Δの subset $\Delta(\mathfrak{g}_1)$、$\Delta(\mathfrak{n}^+)$を

$$\begin{cases} \Delta(\mathfrak{g}_1) = \Delta(\mathfrak{u}) \cap (-\Delta(\mathfrak{u})) \\ \Delta(\mathfrak{n}^+) = \Delta(\mathfrak{u}) - \Delta(\mathfrak{g}_1) \end{cases}$$

で定義し、$\mathfrak{g}$の Lie subalgebra $\mathfrak{g}_1$、$\mathfrak{n}^+$を次のように定める。

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_1)} \mathfrak{g}_\alpha \\ \mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{n}^+)} \mathfrak{g}_\alpha \end{cases}$$

さらに$\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{n}^+$を Lie algebra に持つGの connected Lie subgroup をそれぞれG_1, N^+とすると、G_1は reductive Lie subgroup、N^+は nilpotent Lie subgroup となり、$U = G_1 \cdot N^+$ (semi-direct) となる。

さて $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ を G の複素既約表現とする。$P(V)$をVの一次元 subspace から成る complex projective space とする。ρ によって引き起こされる G の $P(V)$ 上への自然な action を $G \times P(V) \ni (x, p) \longrightarrow x \cdot p \in P(V)$ で表わす。表現 ρ の highest weight に対応する weight space (v) は一次元であるから (v) は $P(V)$ の元となる。

さらに、ρ は $U = \{x \in G \mid x \cdot (v) = (v)\}$ となるものとすると、$M = G/U$ の G-equivariant な imbedding $f : M \longrightarrow P(V)$ が得られる。ρ が既約だから f は full となる。逆に Kähler C-space の $P_N(\mathbb{C})$ への full Kähler imbedding はこのようにして得られることが知られている（Nakagawa and Takagi [5]）。

以上のことから Kähler C-space を $P_N(\mathbb{C})$ へ Kähler imbed した時、$N(M)$ は homogeneous vector bundle となる。

これからの主要な道具となる homogenious vector bundle の cohomology に関する Bott の定理をここで必要な形にまとめておこう。

$(\rho_1, W_{-\xi})$ を <u>G_1 の $-\xi$ を lowest weight に持つ</u> 既約表現とする。ρ_1 を N^+ に制限すると trivial となるように拡張した U の表現を同じく $(\rho_1, W_{-\xi})$ で表わす。$E_{W_{-\xi}}$ を $(\rho_1, W_{-\xi})$ によって principal bundle $G \longrightarrow M$ に associate された homogenious vector bundle とすると次のことが言える。

<u>定理</u>（Bott [1]）<u>$-\xi$ を lowest weight に持つ G の</u>既約表現 $(\rho, V_{-\xi})$ があれば、

$$\dim H^0(M, SE_{W-\xi}) = \dim V_{-\xi}$$

$$H^j(M, SE_{W-\xi}) = (0) \qquad (j \geqq 1)$$

が成り立つ。

Bott の定理を使って、次の定理を導くことができる。

<u>定理 2</u>　M を $P_N(\mathbb{C})$ に Kähler imbed された Kähler C-space とする。さらに M は $P_N(\mathbb{C})$ の totally geodesic submanifold $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed しているとする。その時

$$n(M; P_N(\mathbb{C})) = n(M; P_n(\mathbb{C})) + 2(n+1)(N-n) \text{。}$$

証明略。

この定理から $P_N(\mathbb{C})$ の中の Kähler C-space の nullity は imbed が full の場合に考えればよい。この節では、特に $P_N(\mathbb{C})$ の中の compact Hermitian symmetric space の nullity を与える次の定理を証明するのが目的である。

<u>定理 3</u>　M を $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed された compact Hermitian symmetric space とする。その時

$$n(M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}(P_n(\mathbb{C})) - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}(M)$$

となる。ここで $P_n(\mathbb{C})$ (または M) 上の holomorphic vector field 全体を $\mathfrak{a}(P_n(\mathbb{C}))$ (または $\mathfrak{a}(M)$) で表わす。

まず、holomorphic vector bundle の exact sequence

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(P_n(\mathbb{C}))|_M \longrightarrow N(M) \longrightarrow 0$$

より次の cohomology group の exact sequence が導かれる。

$$0 \longrightarrow H^0(M, ST(M)) \longrightarrow H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))|_M)) \longrightarrow H^0(M, SN(M))$$
$$\longrightarrow H^1(M, ST(M)) \longrightarrow \cdots$$

ところで Kähler C-space X について、Bott [1] より

$$H^j(X, ST(X)) = (0) \qquad j \geq 1$$

となるから、特に $H^1(M, ST(M)) = (0)$ となり

$$n(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))|_M)) - \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, ST(M))$$

となる。従って、もし

$$(2.1) \qquad \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))|_M)) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}(P_n(\mathbb{C}))$$

が成り立てば、定理 3 は証明される。

さて (v) は U-invariant だから、$\rho|_U$ は (v) 上の表現 $(\tilde{h}, (v))$ を induce する。$(\tilde{h}, (v))$ の contragredient 表現を $(\tilde{h}^*, (v^*))$ で表わすと、U-module $V \otimes (v^*)$ の

中で $(v)\otimes(v^*)$ は、U-invariant subspace となり、$\rho|_U \otimes \pi^*$ から $V\otimes(v^*)/(v)\otimes(v^*)$ 上の quotient 表現 $\bar{\rho}$ が導入される。その時、次のことが容易に分かる。

$$(2.2) \qquad T(P_n(\mathbb{C}))|M = G \times_U (V\otimes(v^*)/(v)\otimes(v^*))$$

ここで右辺は、principal bundle $G \to M$ に U の表現 $\bar{\rho}$ によって associate された homogeneous vector bundle を表わす。

(ρ, V) の contragredient 表現を (ρ^*, V^*) で表わす。$\rho\otimes\rho^*$ によって G-module となる $V\otimes V^*$ と $\rho|_{G_1}\otimes\pi^*|_{G_1}$ によって G_1-module となる $V\otimes(v^*)$ の間に次のような関係が成り立つ。

<u>命題 3</u>　$V\otimes V^*$ および $V\otimes(v^*)$ を次のように直和に分解する

$$V\otimes V^* = V_{-\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{-\lambda_l} \quad (\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_l)$$

$$V\otimes(v^*) = W_{-\mu_1}\oplus\cdots\oplus W_{-\mu_m} \quad (\mu_1 \geqq \cdots \geqq \mu_m)$$

ここで $V_{-\lambda_i}$（または $W_{-\mu_j}$）は lowest weight $-\lambda_i$（または $-\mu_j$）を持つ既約 G-module（または既約 G_1-module）である。その時 $l = m$ および $\lambda_i = \mu_i$ $(i=1,\cdots,l)$ となる。

証明には、semi-simple Lie algebra の表現に関する

知識が必要であり、たやすいものではない。ここでは、命題3の事実が成り立つこと、及びそれから(2.1)が導かれるが重要であるから、証明は省略する。なお、symmetricでないKähler C-spaceで命題3の成り立たない例がある。

(2.1)の証明

$$U_i = W_{-\lambda_i} + \cdots + W_{-\lambda_\ell} \qquad (i=1,\cdots,\ell)$$

とおくと

$$V \otimes (v^*) = U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_\ell \supset U_{\ell+1} = (0)$$

となる。$V \otimes (v^*)$ は U-module だから N^+ が act しているが、$N^+ \cdot U_i$ は lowest weight が $-\lambda_i$ より大きい G_1-invariant subspace となるから、$N^+ \cdot U_i \subset U_{i+1}$ $(i=1,\cdots,\ell)$ となる。従って $\widetilde{W}_i = U_i/U_{i+1}$ 上に導入された U の表現を g_i とおくと、$g_i|_{N^+}$ は trivial で $g_i|_{G_1}$ は $-\lambda_i$ を lowest weight に持つ既約表現となる。よって、$G \longrightarrow M$ に表現 g_i を associate した homogeneous vector bundle $E_{\widetilde{W}_i}$ に Bott の定理を適用すれば、

(2.3) $\quad \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, SE_{\widetilde{W}_i}) = \dim_{\mathbb{R}} V_{-\lambda_i}$

(2.4) $\quad H^j(M, SE_{\widetilde{W}_i}) = (0) \qquad j \geq 1$

が成り立つ。

U-module の exact sequence

$$0 \longrightarrow U_{i+1} \longrightarrow U_i \longrightarrow \widetilde{W}_i \longrightarrow 0$$

より、holomorphic vector bundle の exact sequence

$$0 \longrightarrow E_{U_{i+1}} \longrightarrow E_{U_i} \longrightarrow E_{\widetilde{W}_i} \longrightarrow 0$$

が引き起こされる。ここで E_{U_j} は $G \longrightarrow M$ に $\rho \otimes h^*|_U$ より導入された U の U_j 上の表現によって associate された homogenious vector bundle である。この exact sequence より cohomology group の exact sequence が引き起こされるが、(2.3)、(2.4) より容易に、

(2.5) $$\dim_{\mathbb{R}} H^0(M, SE_{U_1}) = \sum_{i=1}^{\ell} \dim_{\mathbb{R}} V_{-\lambda_i}$$

(2.6) $$H^j(M, SE_{U_1}) = (0) \qquad (j \geq 1)$$

が導かれる。

さて $(\mathfrak{v}) \otimes (\mathfrak{v}^*)$ は G_1 の lowest weight が 0 の irreducible component だから、$\lambda_\ell = 0$ で $W_{-\lambda_\ell} = (\mathfrak{v}) \otimes (\mathfrak{v}^*)$ となる。従って U-module の exact sequence

$$0 \longrightarrow W_{-\lambda_\ell} \longrightarrow U_1 \longrightarrow U_1 / W_{-\lambda_\ell} \longrightarrow 0$$

から次の exact sequence が得られる。

$$0 \longrightarrow H^0(M, SE_{W_{-\lambda_\ell}}) \longrightarrow H^0(M, SE_{U_1}) \longrightarrow H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))|_M))$$
$$\longrightarrow H^1(M, SE_{W_{-\lambda_\ell}}) \longrightarrow \cdots$$

(2.4) より

$$\dim H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))|_M)) = \sum_{i=1}^{\ell-1} \dim V_{-\lambda_i}$$

ところで、$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{A}(P_n(\mathbb{C})) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) = 2(\dim_{\mathbb{C}} V \otimes V^* - 1)$。
$\dim_{\mathbb{C}} V_{-\lambda_\ell} = 1$ だから (2.1) が成り立つ。
以上で定理3が証明された。

定理3の系として次のことが言える。

系1　M を $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed された compact Hermitian symmetric space とする。その時

$$n(M) = 2\, n_{\mathbb{R}}(M)$$

系2　M を $P_N(\mathbb{C})$ に Kähler imbed された compact Hermitian symmetric space とすると、

$$n(M) = \dim_{\mathbb{R}} \{ Z^N \in \mathcal{H}(M)^{\perp} \mid Z \in \mathfrak{A}(P_N(\mathbb{C})) \}$$

系3　系2と同じ仮定のもとで、次のことが言える。
M の Jacobi field は Kähler submanifold の 1 パラメータファミリーから引き起こされる。

References

[1] R. Bott : Homogeneous vector bundles, Annals of Math., 66 (1957), 203—264.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu : Foundations of Differential Geometry, vol. 2, Interscience, New York, 1969.

[3] A. Lichinerowich : Géométrie des groupes de transformations, Dunod. Paris, 1958.

[4] Y. Matsushima, Sur la structure du groupe d'une certaine variété kählérienne, Nagoya Math. J. 11 (1957), 145—150.

[5] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kähler submanifolds in a complex projective space, to appear.

[6] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, Annals of Math., 88 (1968), 62—105.

[7] H. C. Wang, Closed manifolds with homogeneous complex structure, Amer. J. M., 76 (1954), 1—32.