数理解析研究所講究録
第 276 巻 1976 年 42-55


# Einstein structure の deformation

阪大 数学　小磯憲史

**問題** Einstein structure を smooth に変形することは，どの程度可能か？

Einstein deformation，即ち Einstein structure の変形は，flat torus を"歪める"ことなど，自然な例しか知られていない。そこで，逆に「自然な deformation 以外にない」という予想のもとに，その部分的な結果を紹介する。具体的な例は，次の定理の応用として示される。

**定理** Einstein manifold $(M, g)$ について，curvature operator の最小固有値を $\alpha_0$ とおく。Ricci tensor $\rho$ が $\rho = \varepsilon g$ を満たすとする。$\alpha_0 > \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$ ならば，$g$ は infinitesimally non-deformable である。

## §0 準備

まず，$C^\infty$-manifold $M$ は orientable，connected，compact，

$\dim M = m \geq 3$ であるとする。riemannian manifold $(M, g)$ に対して、以下の記号を使用する。type $(0,2)$ の symmetric tensor bundle $S^2$, $M$ 上の tensor bundle $T$ に対して、その cross section 全体 $C^\infty(T)$, 一点における内積 $(\ ,\ )$, global な内積 $\langle\ ,\ \rangle$, 共変微分 $\nabla$, curvature tensor $R$, Ricci tensor $\rho$, として $\{h \in S^2 ; \operatorname{tr} h = 0\}$ を $S^2_0$ であらわす。又、$\nabla$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する formal adjoint を $\delta$ で、$\delta|C^\infty(S^2)$ の formal adjoint を $\delta^*$ であらわし、更に関数に対する Laplacian $\Delta$ と tensor bundle に対する rough Laplacian $\bar{\Delta}$ をそれぞれ $\Delta = \delta \circ d$, $\bar{\Delta} = \delta \circ \nabla$ によって定義する。

なお、$\nabla$, $R$ などは metric に関係するので、$g(t)$ によって定義されるものを $\nabla_t$, $R(t)$ などとあらわす。又、tensor の添数の上げ下げはすべて $g(t)$ によるものとし、$'$ は上げ下げのあとでの $t$ による微分をあらわす。

以上で導入した記号になりたつ式をあげよう。

$$R^k_{ijl} = \nabla_i \nabla_j \xi^k - \nabla_j \nabla_i \xi^k, \quad R_{ijkl} = R^m_{ijk} g_{ml}, \quad \rho_{ij} = -R^l_{ilj}$$

$$(\delta S)^{i_1 \cdots i_r}_{j_2 \cdots j_s} = -\nabla^l S^{i_1 \cdots i_r}_{l j_2 \cdots j_s}, \quad (\delta^* \xi)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i)$$

$$\Delta f = -\nabla^l d_l f, \quad (\bar{\Delta} S)^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = -\nabla^l \nabla_l S^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$$

さて、体積一定な 1-parameter の metric 族 $g(t)$ が $g(0) = g$ を満たすとき、$g(t)$ を $g$ の deformation と呼ぶ。これについて、次の定理が有効である。

**定理**（D. Ebin）　$g(t)$ を $g$ の deformation とするとき、$g$ の deformation $\tilde g(t)$ と 1 径数変換群 $\gamma(t)$ が存在して、十分小さな $t$ に対して次の式を満たす。

$$\gamma(t)^*\tilde g(t) = g(t) \quad , \quad \delta(\tilde g'(0)) = 0$$

そこで、$\mathrm{Ker}\,\delta$ を essential i-deformation という。又、1 径数変換群 $\tilde\gamma(t)$ について、$\frac{d}{dt}\big|_0 \tilde\gamma(t)^* g = 2\delta^*\xi$ （$\xi$ は $\tilde\gamma'(0)$ の dual 1-form）となるから、$\mathrm{Im}\,\delta^*$ を trivial i-deformation という。

## §1 Einstein i-deformation

以下、$(M, g)$ は Einstein manifold とし、$g(t)$ も Einstein deformation、即ち $g(t)$ がすべて Einstein metric である deformation を意味するものとする。更に、$\rho(t) = \varepsilon(t) \times g(t)$ として $\varepsilon(t)$ を定める。

まず、$g'(0)$ の満たすべき式を求めよう。一般に、

$$\rho' = \frac{1}{2}(\bar\Delta g' + 2Qg' + 2Lg' - 2\delta^*\delta g' - \mathrm{Hess}\,\mathrm{tr}\,g')$$

ここに、$Q$ は Ricci operator, $L$ は curvature operator,
i.e. $(Qh)_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i^{\,l} h_{jl} + \rho_j^{\,l} h_{il})$, $(Lh)_{ij} = R_{ikjl}h^{kl}$,

一方、$\rho' = \varepsilon' g + \varepsilon g'$

又、$h \in C^\infty(S^2)$, $\xi \in C^\infty(A^1)$, $f \in C^\infty(M)$ に対して、

$$\mathrm{tr}\,\bar\Delta h = -\nabla^l\nabla_l h_i^{\,i} = \Delta\,\mathrm{tr}\,h \quad , \quad \mathrm{tr}\,\mathrm{Hess}\,f = g^{ij}\nabla_i d_j f = -\Delta f$$

$tr\, Lh = g^{ij} R_{i\varepsilon jl} h^{\varepsilon l} = -tr\, Qh$ , $tr\, \delta^* \xi = \frac{1}{2} g^{ij}(\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i) = -\delta\xi$

であるから、両式の右辺に tr を作用させれば、

$$n\varepsilon' + \varepsilon\, tr\, g' = \Delta\, tr\, g' + \delta\delta g'$$

積分して。 $n\varepsilon' \langle 1, 1 \rangle + \varepsilon \langle g', g \rangle = 0$

体積一定だから $\langle g', g \rangle = 0$ 従って $\varepsilon' = 0$ ……(*)

更に、$g'(0)$ が essential であることを仮定すれば、

$$\varepsilon\, tr\, g' = \Delta\, tr\, g'$$

ところが、$\varepsilon$ なる $\Delta$ の 0 でない固有値は存在しないから、$\varepsilon \neq 0$ なら $tr\, g' = 0$ 。$\varepsilon = 0$ でも、$tr\, g'$ は定数となり、積分すれば体積一定の条件から $tr\, g' = 0$ を得る。そこで、次の定義を与えよう。

**定義** essential i-deformation $h$ が $\bar{\Delta} h + 2Lh = 0$ , $tr\, h = 0$ を満たすとき、$h$ を Einstein i-deformation という。

**定義** Einstein i-deformation が 0 のみであるとき、infinitesimally non-deformable であるという。

**補題 1-1** (M. Berger)

$\varepsilon(t)$ は定数である。

(証明) 性質(*) $\varepsilon' = 0$ は t に depend しない。 Q.E.D.

**系**

(M. g) が flat ならば、$g(t)$ も flat である。

(証明) (M. g) に対して、flat torus $T^n$ を riemannian coveringになる。このcovering map $\pi$に対して、$g(t)$は$\pi^*g$のEinstein deformation $\pi^*g(t)$を引きおこすが、補題1-1によって、$\rho_{\pi^*g(t)}=0$となる。従って Bochnerの定理により$(T^n, \pi^*g(t))$の$n$個の独立なharmonic vector field $\{X_i\}$はparallelであり、よって$\pi^*g(t)$はflat。従って$g(t)$もflatである。 Q.E.D.

## §2 基本定理

__定理2-1__

curvature operator $L: S^2_0 \to S^2_0$ のMにおける最小固有値を$\alpha_0$とおくとき、$\alpha_0 > \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$を満たすEinstein多様体はinfinitesimally non-deformableである。

(証明) $C^\infty(S^2_0)$の元$h$に対して、

$$(\Theta \nabla h)_{ijk} = x\nabla_i h_{jk} + y\nabla_j h_{ki} + z\nabla_k h_{ij}$$

($x, y, z$は$x^2+y^2+z^2=1$を満たす実数)とおく。

$xy+yz+zx=u$ とおけば、$u$は$[-\frac{1}{2}, 1]$の中を動く。

$$\langle \Theta\nabla h, \Theta\nabla h\rangle = \langle \nabla h, \nabla h\rangle + 2u\langle \nabla_i h_{jk}, \nabla_k h_{ij}\rangle$$
$$= \langle \bar{\Delta} h, h\rangle - 2u\langle \nabla^k\nabla_i h_{jk}, h_{ij}\rangle$$

ここで、$\nabla^k\nabla_i h_{jk} = -g^{km}R^l{}_{mij}h_{lk} - g^{km}R^l{}_{mik}h_{jl} + \nabla_i\nabla^k h_{jk}$
$$= (Lh)_{ij} + \rho^l_i h_{jl} - (\nabla\delta h)_{ij}$$

従って、 $\langle \bar{\Delta} h - 2uLh - 2u\varepsilon h + 2u\nabla\delta h, h\rangle \geq 0$

ここで、$h$も0でないEinstein i-deformation とすれば、

$\delta h=0$, $\bar{\Delta} h=-2Lh$ を満たすから、

$$u\varepsilon\langle h,h\rangle \le -(1+u)\langle Lh,h\rangle$$

従って、 $\alpha_0 \le \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$

よって逆に $\alpha_0 > \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$ であれば、このような$h$は存在しない。 Q.E.D.

この定理が基本定理であり、以下の命題はすべてこの定理の適用である。

## §3 断面曲率による評価

まず、断面曲率が0になる次元 $td(N)$ を次のように定義する。多様体$N$の点$p$における正規直交系、$O_p=\{X_i\}$に対して、$a_{ij}=-R_{ijij}$ は $i\neq j$ のとき断面曲率を、$i=j$ のとき0を与える。$i_0$ に対して、$a_{i_0 j}$ なる $j$ の個数を数え、$p, O_p, i_0$ を動かしてその最大値を得る。その数を $td(N)$ とおこう。

<u>命題3−1</u>

Einstein manifold $(M, g)$ が非正断面曲率でしかも universal riemannian covering $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の既約分解 $\tilde{M}=\prod_{a=1}^{k}\tilde{M}_a$ に対して $2td(\tilde{M}_a)<\dim\tilde{M}_a$ がなりたつとき、$g$は infinitesimally non-deformable である。

(証明) (I)まず$(\tilde{M}, \tilde{g})$が既約なときを考える。$\tilde{M}$の一点

$m$において、0でない$h \in S^2_0$について$Lh = \alpha h$とする。$h$は対称だから、適当な正規直交系で対角化して$h^{ii} = x^i$とおく。

さて、 $R_{ijkl}h^{ik}h^{jl} = \sum_{i,j} R_{ijij}\, x^i x^j = -\sum_{i,j} a_{ij}\, x^i x^j$

ここで、$a_{ij}$も対称であることに注意して、$\sum a_{ij}\, y_i = \lambda y_j$なる数ベクトル$(y_i)$を考える。このとき、$y_r = \max_j |y_j|$, $a_{ri} < 0 \ (i > r)$ ; $r = \mathrm{fd}(\tilde{M})$としてよい。すると、$\lambda > 0$に対して、

$$-\lambda y_r = -\sum a_{ir}\, y_i \geq \sum a_{ir}\, y_r = -\sum R_{irir}\, y_r = \rho_{rr} \cdot y_r$$
$$= \varepsilon y_r$$

従って、$-\lambda \geq \varepsilon$であり、特に等号は$y_i = -y_r \ (i > r)$なるときに限るが、このとき、

$$\sum y_i = \sum_{i>r} y_i + \sum_{i \leq r} y_i \leq -(n-r)\, y_r + r\, y_r = -(n-2r)\, y_r < 0$$

従って、$\sum x^i = 0$なる条件のもとでは、$-\sum_{i,j} a_{ij}\, x^i x^j > \varepsilon \sum (x^i)^2$

ここで、 $\alpha(h, h) = -\sum_{i,j} a_{ij}\, x^i x^j > \varepsilon \sum (x^i)^2 = \varepsilon (h, h)$

よって、 $\alpha > \varepsilon$

(II) 一般に考えよう。既約成分への分解によって、curvature tensorも分解する。従って、$\tilde{M}$のmetric $\tilde{g}$とRicci tensor $\tilde{\rho}$は、 $\tilde{g} = \sum_a g_a$, $\tilde{\rho} = \sum_a \rho_a$

( $g_a$, $\rho_a$ は $\tilde{M}_a$ の metric tensor, Ricci tensor )

と分解するから、$\rho_a = \varepsilon g_a$となる。さて、$S^2_0(\tilde{M})$の分解

$$S^2_0(\tilde{M}) = \left(\bigoplus_a S^2_0(\tilde{M}_a)\right) \oplus \left(\left(\bigoplus_a \mathbb{R} \cdot g_a\right) \cap S^2_0(\tilde{M})\right) \oplus \sum_{a \neq b} S^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b)$$

ここに、$S^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b) = \{ h \in S^2(\tilde{M}_a \times \tilde{M}_b) \ ; \ h(T(\tilde{M}_a), T(\tilde{M}_a)) = 0,$

$h(T(\tilde{M}_b), T(\tilde{M}_b)) = 0 \}$

にたじて$\tilde{M}$の curvature operator $\tilde{L}$ も分解して、

$\tilde{L} | S^2_0(\tilde{M}_a) = \tilde{L}_a \quad (= \tilde{M}_a$ の curvature operator)

$\tilde{L} | (\oplus_a (\mathbb{R} \cdot g_a)) \cap S^2_0(\tilde{M}) = -\varepsilon$

$\tilde{L} | S^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b) = 0 \quad (a \neq b)$

となる。$\varepsilon < 0$であるから $\alpha_0 > \varepsilon$ を得る。 Q.E.D.

系

負断面曲率の Einstein manifold $(M, g)$ は infinitesimally non-deformable である。

(証明) $\mathrm{fd}(M) = 1$ Q.E.D.

命題 3-2

次の条件 i) ii) のいずれかを満たす Einstein manifold $(M, g)$ は infinitesimally non-deformable である。

i) $M$のすべての断面曲率が $[k, 1]$ に含まれ、

$(1 + (m-1)^{-1})(1-k) - \varepsilon (m-1)^{-1} < 2(m-1)^{-1}$

ii) $M$のすべての断面曲率が $[-1, -k]$ に含まれ、

$(1 - (m-1)^{-1})(1-k) + 2\varepsilon (m-1)^{-1} < 2(m-1)^{-1}$

(証明) i) は $\alpha_0 + \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ を、ii) は $\alpha_0 - \varepsilon > 0$ を証明する。まったく同様な計算であるから、i) のみを示そう。命題 3-1 の証明と同じく、$h$を対角化して $h^{ii} = x^i$ とおく。更に、

$y^i = x^i \ge 0$ $(i \le c)$, $z^i = -x^i > 0$ $(i > c)$ としてよい。このとき、$\sum x^i = 0$ より、$\sum_{i \le c} y^i = \sum_{i > c} z^i = A$ とおける。まず、条件式は $\varepsilon > n(1-k) - 2$ と同値であり、従って $1 + \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ であることに注意する。

$$(L\xi, \xi) + \frac{1}{2}(\varepsilon\xi, \xi) = -\sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j + \frac{1}{2}\varepsilon \sum_i (x^i)^2 + \sum_i x^i \sum_j x^j$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right)\left\{\sum (y^i)^2 + \sum (z^j)^2\right\} + \sum_{i \ne j} (1 - a_{ij}) y^i y^j$$

$$+ \sum_{i \ne j} (1 - a_{ij}) z^i z^j - 2\sum (1 - a_{ij}) y^i z^j$$

$$\ge \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right)\left(\frac{1}{c}A^2 + \frac{1}{n-c}A^2\right) - 2(1-k)A^2$$

$$\ge \left\{\frac{4}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right) - 2(1-k)\right\} A^2 > 0$$

Q.E.D.

系

Einstein manifold $(M, g)$ のすべての断面曲率が $\left(\frac{n-2}{2n-1}, 1\right]$ に含まれれば、$g$ は infinitesimally non-deformable である。

(証明) i) を適用する。$k > \frac{n-2}{2n-1}$ であるから、

$1 - k < \frac{n+1}{2n-1}$, $\frac{\varepsilon}{n-1} > \frac{n-2}{2n-1}$ Q.E.D.

## §4 locally symmetric space of non-compact type

§3で断面曲率による評価を示したが、locally symmetric space の場合は、より詳しい評価が可能である。特に、non-compact type の場合は、次のような結果を得る。

命題 4-1

locally symmetric space of non-compact type の Einstein manifold $M$ は，$M$ の universal covering $\tilde{M}$ が 2 次元の symmetric space を既約成分に持たなければ，infinitesimally non-deformable である。

（証明）$\tilde{M}=G/K$ が既約な場合について証すれば，命題 3-1 の証明 II と同じく，一般の場合に拡張される。そこで，$G$ を実又は複素単純リー群とする。

$G, K$ のリー代数を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ として，$\mathfrak{g}$ の killing form $B$ による直交分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ を考えれば，$o=eK$ における tangent space $T_o(\tilde{M})$ が $\mathfrak{m}$ に同一視される。そのとき，$o$ における正規直交系 $\{X_i\}$ に対して，$A_{ij}=cB([X_i,X_j],[X_i,X_j])$。ただし，$[X_i,X_j]\in\mathfrak{k}$，$B|\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$ は負定値で $c$ は正定数。

そこで，$N=\{1\leq i\leq n\}$ とおき，行列 $(a_{ij})=(\varepsilon^{-1}A_{ij})$ を考えると，次の条件をみたす。

i) $a_{ij}\geq 0 \quad (\forall i,j\in N)$，$\sum_j a_{ij}=1 \quad (\forall i\in N)$

ii) $N$ の部分集合 $N'$ が $a_{ij}=0 \ (\forall i,j\in N')$ を満たせば，$N'$ の元の個数 $\#N'$ は $\frac{1}{2}n$ よりも小さい。

iii) 次のような $N$ の分割 $N=A\cup B$ は存在しない。

$$a_{ij}=0 \quad (\forall i\in A,\ \forall j\in B)$$

i) は明らかである。ii) は $N'$ に対して $\{X_i\}_{i\in N'}$ を考えれば，これは $\mathfrak{m}$ の中の可換代数を生成し，従って $\#N'\leq \operatorname{rank}\tilde{M}$ である。irreducible symmetric space の rank はすべて調べ

られており、$\dim \tilde{M}=2$ の場合を除いて、$\operatorname{rank} \tilde{M} < \frac{1}{2}\dim \tilde{M}$ が成りたっている。よって ii) が成立する。iii) については、$\{X_i\}_{i\in A}$, $\{X_j\}_{j\in B}$ で生成される vector space $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ をとれば $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_A+\mathfrak{m}_B$, $[\mathfrak{m}_A,\mathfrak{m}_B]=0$. そこで、$\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ で生成されるリー代数（実又は複素）をそれぞれ $\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_B$ とおけば、$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]=\mathfrak{k}$ より $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_A+\mathfrak{g}_B$, $[\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_B]=0$. これは $\mathfrak{g}$ の単純性に反する。

$(a_{ij})$ に次の補題 4-2 を適用すれば、L の固有値 $\alpha$ に属する固有形式 $h$ を対角化して $h^{ii}=x^i$ とおいたとき、

$$\alpha(h,h)=(Lh,h)=R_{ijkl}h^{ik}h^{jl}=(-\varepsilon)\cdot\sum_{i,j}(\varepsilon^{-1}a_{ij})x^ix^j$$
$$=(-\varepsilon)\sum_{i,j}a_{ij}x^ix^j>\varepsilon\sum_i(x^i)^2=\varepsilon(h,h)$$

即ち　$\alpha>\varepsilon$　　Q.E.D.

補題 4-2

命題 4-1 の証明における、行列 $S=(a_{ij})$ に関する 3 つの条件が成りたてば、$S$ の固有値はすべて $-1$ より大きい。

（証明）　$S$ の固有値 $\lambda$ に属する固有ベクトル $(y_i)$ をとる。$\lambda<0$, $\max_i |y_i|=1$, 更に $y_i=1$ なる $i$ が存在するとしてよい。

$$N=\{i\in\mathbb{Z}\ ;\ 1\le i\le m\}\qquad O_i=\{j\in N\ ;\ a_{ij}=0\}$$
$$P=\{i\in N\ ;\ y_i=1\}\qquad Q=\{i\in N\ ;\ y_i=-1\}$$

とおけば、$P\neq\phi$ であるから、$i_0\in P$ が存在して、

$$1 = y_{i_0} = \lambda^{-1} \sum a_{i i_0} y_i \leq -\lambda^{-1} \sum a_{i i_0} = -\lambda^{-1}$$

従って、$\lambda \geq -1$。そこで、$\lambda \neq -1$ を証すれば十分である。以下、$\lambda = -1$ を仮定し、矛盾を導びこう。

$\lambda = -1$ だから、上の不等において等号が成立する。従って、

(*1)　$i \notin O_{i_0}$ なら $i \in Q$

(*1) と条件 i) によって、$Q \neq \phi$。そこで、$j_0 \in Q$ が存在して、　$1 = -y_{j_0} = \sum a_{i j_0} y_i \leq \sum a_{i j_0} = 1$

よって、　(*2)　$i \notin O_{j_0}$ なら $i \in P$

そこで、$j \notin P \cup Q$ について、(*1) (*2) より $j \in O_{i_0} \cap O_{j_0}$ だから、$i_0, j_0$ を動かして、

$$i \in P \cup Q,\ j \notin P \cup Q \text{ なら } a_{ij} = 0$$

を得る。$A = P \cup Q$, $B = N - P \cup Q$ とおけば、条件 iii) によって $B = \phi$　よって　$P \cup Q = N$

一方、$i, j \in P$ とすれば、$j \notin Q$ だから (*1) により $j \in O_i$ 即ち $a_{ij} = 0$。従って、条件 ii) によって $\# P$ は $\frac{1}{2} \# N$ より小さく、同様に $\# Q < \frac{1}{2} \# N$、これは $P \cup Q = N$ に反する。

Q.E.D.

## §5　locally symmetric space of compact type

最後に、定理 2-1 の、直接の計算による適用の例をあげる。いずれも $(M, g)$ の universal covering $(\tilde{M}, \tilde{g})$ が irreducible symmetric space of compact type $G/K$ として定義される。

[Hermitian symmetric space]

この場合は、E. Calabi & E. Vensentini, A. Borel によって、固有値が計算されている。$\alpha_0 > -\frac{1}{2}\varepsilon$ を満たすものは、次の3種である。

AⅢ　$SU(m+m')/S(U_m \times U_{m'})$

$(m=1,\ m' \geq 4),\ (m'=1,\ m \geq 4)$

DⅢ　$SO(2m)/U(m)$　　$(m \geq 6)$

EⅦ　$E_7/E_6 \cdot T^1$

[一般の場合]

一般の場合も、原理的には計算可能であるが、繁雑なので2例をあげるにとどめる。$\alpha_0 > -\frac{1}{2}\varepsilon$ を満たすのは、$p \geq q$ なる条件のもとに次の通りである。

BDI　$SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$

$(p \geq 4,\ q=1),\ (q \geq p-1,\ p+q \geq 7)$

CⅡ　$(p=q=1),\ (p \geq 3,\ q=1)$

$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$

## 参考文献

M. Berger, Quelque formules de variation pour une structure riemannienne, Ann. scient. Éc. Norm. Sup, 4e série, t. 3, (1970). 285-294

M. Berger & D. Ebin, Some decomposition of the space of symmetric tensors on a riemannian manifold, J. Diff. Geom. 3 (1969) 379-392

A. Borel, On the curvature tensor of the Hermitian symmetric manifolds, Ann. of Math. 71 (1960) 508-521

E. Calabi & E. Vesentini, On compact, locally symmetric Kähler manifolds, Ann. of Math. 71 (1960) 472-507

D. Ebin, The manifold of riemannian metrics, Proc. of the 1968 Summer Institute on Global Analysis, Amer. Math. Soc.