数理解析研究所講究録
第 276 巻 1976 年 71-86

ベロネーズ多様体の特徴付けについて

筑波大学 数学系 伊藤 武広

S.S. Chern, M. do Carmo, S. Kobayashi ([1]) 氏等により，ベロネーズ曲面を、微分幾何学的には、曲率 1/3 の２次元球面から 曲率１の４次元球面への 極小はめこみ とみなす事ができます。

このベロネーズ曲面の概念の拡張には．次の二つの方向が考えられます．すなわち．

(i) 外の４次元球面のみを一般次元の球面に拡張する。

(ii) 両方の球面を一般次元の球面に拡張する．

T. Otsuki ([9]) 氏は 余次元２の極小部分多様体を構成したときに、その基礎曲面として generalized Veronese surfaces を与えました．氏の与えた曲面は．(i) の意味でのベロネーズ曲面の一般化とみなす事ができます。

次に、(ii) に関しましては、B. O'Neill ([8]) 氏が具体的に

minimal で isotropic な immersion

$$\iota: S^n(c) \longrightarrow S^{n+p}(\tilde{c}),$$

但し、 $c = n\tilde{c}/2(n+1)$, $p = n(n+1)/2 - 1$

$S^k(c_1)$ は 曲率 c_1 の k 次元球面を表わす。

を構成しました。特に、$n=2$ のときには、ベロネーズ曲面となっています。その後、J. A. Little ([17]) 氏が代数的にベロネーズ多様体を定義していますが、上の部分多様体は氏の定義したものの中で、特殊なものです。本論文では、微分幾何学的立場より、この O'Neill 氏の部分多様体を (ii) の意味での拡張として、ベロネーズ多様体 と言う事にします。

さて、本論文では、このベロネーズ多様体の特徴付けを、いくつか紹介します。そのために、部分多様体上の幾何学的不変量を いくつか定義して、それらの間の興味深い関係を導きます。

§1. 準備

$M = M^n$ を 定曲率 $\tilde{c}$ の $(n+p)$-次元定曲率空間 $\tilde{M} = \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ 内に、等長はめこみにより はめこめられた n 次元部分多様体とする。この事を、今後は、$M^n \subset \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ と表わす事にする。$\tilde{M}$ 内の orthonormal frames $\{e_1, e_2, \cdots e_n,$

$e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}\}$ でMに制限したとき、$e_1, \cdots e_n$ がMに接っしているものの全体を考える．それらの dual frames を $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_{n+p}$ とし，また，connection formes を ω_{ij}，$\omega_{i\alpha}$，$\omega_{\alpha\beta}$ で表わすと．Mに制限したとき．良く知られているように．Mの構造方程式を得る，すなわち．

$$\omega_\alpha = 0$$

$$\omega_{i\alpha} = \sum h^\alpha_{ij}\omega_j , \qquad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji},$$

$$d\omega_i = \sum \omega_{ij}\wedge\omega_j , \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

$$d\omega_{ij} = \sum \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} - \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l, \tag{1.1}$$

$$R_{ijkl} = \tilde{c}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl} - h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}),$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta} - \Omega_{\alpha\beta}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum R_{\alpha\beta ij}\,\omega_i\wedge\omega_j,$$

$$R_{\alpha\beta ij} = \sum(h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj} - h^\alpha_{jk}h^\beta_{ki}) .$$

但し．本論文では．index に関して次の約束をする．

$i, j, k, l \cdots\cdots = 1, 2, \cdots n, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \cdots = n+1, \cdots n+p,$

また．index をつけない和の記号 Σ はその中のくりかえして書かれている index に関して．上の範囲の和をとるものとする。

このとき第II基本形式は次のように表わされる．X, Y を M の tangent vector fields とすると

$$\sigma(X, Y) = \sum h^\alpha_{ij}\,\omega_i(X)\,\omega_j(Y)\,e_\alpha . \tag{1.2}$$

h^α_{ij} の共変微分 h^α_{ijk} を次式で定義する.

$$(1.3)\qquad \sum h^\alpha_{ijk}\omega_k := dh^\alpha_{ij} + \sum h^\alpha_{im}\omega_{mj} + \sum h^\alpha_{jm}\omega_{mi} + \sum h^\beta_{ij}\omega_{\beta\alpha},$$

すると. $\tilde{M}$ が定曲率であることより $h^\alpha_{ijk} = h^\alpha_{ikj}$ となる。
また. 更に h^α_{ijkl} を次のように定義する

$$(1.4)\qquad \sum h^\alpha_{ijkl}\omega_l := dh^\alpha_{ijk} + \sum h^\alpha_{mjk}\omega_{mi} + \sum h^\alpha_{imk}\omega_{mj} + \sum h^\alpha_{ijm}\omega_{mk} + \sum h^\beta_{ijk}\omega_{\beta\alpha},$$

すると，上の構造方程式より.

$$(1.5)\qquad h^\alpha_{ijkl} - h^\alpha_{ijlk} = \sum h^\alpha_{im}R_{mjkl} + \sum h^\alpha_{jm}R_{mikl} + \sum h^\beta_{ij}R_{\beta\alpha kl}.$$

さて. ここで. 次のM上の幾何学的不変量を考える.

$$(1.6)\qquad S := \|\sigma\|^2 = \sum h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ij},$$

$$(1.7)\qquad K_N := \sum R_{\alpha\beta ij}R_{\alpha\beta ij} = \sum\Big(\sum_k (h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj} - h^\alpha_{jk}h^\beta_{ki})\Big)^2,$$

$$(1.8)\qquad L_N := \sum h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij}h^\alpha_{kl}h^\beta_{kl},$$

Mが点$x\in M$で isotropic (λ-isotropic) であるとは、
Mの点xでの任意な unit tangent vector X に対して、

$$\|\sigma(X, X)\| = 一定 = \lambda$$

となる時に言う。

B. O'Neill [8] fにより 次の結果が知られている.

Lemma 1. ([8]). Mが点xで λ-isotropic であるための必要十分な条件は、次の等式がxで成り立つ事である。

$$\sum h^\alpha_{ij} h^\alpha_{kl} + \sum h^\alpha_{ik} h^\alpha_{jl} + \sum h^\alpha_{il} h^\alpha_{jk} = \lambda^2(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

さて、次の2つのテンソルを考える.

$$W_{ijkl} := \sum h^\alpha_{ij} h^\alpha_{kl} + \sum h^\alpha_{ik} h^\alpha_{jl} + \sum h^\alpha_{il} h^\alpha_{jk} - \lambda(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$V_{ijkl} := \sum h^\alpha_{ij} h^\alpha_{kl} - \sum h^\alpha_{il} h^\alpha_{kj} - \mu(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

そこで、h^α_{ij}, $i, j = 1, 2 \cdots n$, を成分とする n次正方行列をH^αで表わし、各テンソルの長さの平方を$\|\cdot\|^2$で

表わすと.

$$\frac{1}{3}\|W\|^2=\sum[\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2+2\sum\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta)^2-2n^2H^2\lambda-4\lambda S+n(n+2)\lambda^2,$$

$$\frac{1}{2}\|V\|^2=\sum[\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2-\sum\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta)^2+2\mu(S-n^2H^2)+n(n-1)\mu^2,$$

但し, HはMの平均曲率を表わすものとする.
また一方, K_NとL_NもH^αを用いると次の式となる.

$$K_N=2\sum\mathrm{tr}(H^\alpha)^2(H^\beta)^2-2\sum\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta)^2,$$

$$L_N=\sum[\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2.$$

以上の関係式より, 次の結果が容易に導かれる.

Lemma 2. M^nがminimalならば.

$$L_N\geq\frac{2S^2}{(n+2)(n-1)}$$

が成り立つ。等号は, M^nがisotopicで且つ, 定曲率の時にのみ成り立つ.

Lemma 3. ([6]). M^n が isotropic で minimal ならば、次の等式が成り立つ.

$$K_N = \frac{2}{n+2} S^2 + L_N .$$

上の二つの Lemma 2, 3 を用いると、次の事が解る.

Lemma 4. ([6]). M^n が isotropic で minimal ならば、次の不等式が成り立つ.

$$K_N \geq \frac{2n S^2}{(n+2)(n-1)} .$$

但し、等号は M^n が定曲率の時に限り成り立つ.

著者は [4] において、L_N と K_N との間の興味ある次のような関係を得た。すなわち、

Lemma 5. ([4]). $M^n \in \tilde{M}^{n+p}$ に対して、次の不等式が成り立つ.

$$n L_N \geq K_N .$$

等号は、M^n が minimal で isotropic で定曲率の時に限る.

§2. ベロネーズ多様体の特徴付け.

この節では、前節で定義した幾何学的不変量等を用いて、ベロネーズ多様体の特徴付けを与える。

定理1. ([6]), $M^n \subset \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ が λ-isotropic で minimal 且つ はめこみが full なとき

(i) $n \geqq 3$

(ii) $\tilde{c} > 0$ で $\lambda > 0$

(iii) $K_N \leqq \dfrac{n\tilde{c}}{n+1}\delta + \dfrac{2\delta^2}{n+2}$

が成り立つならば M^n はベロネーズ多様体となる。

証明. $n \geqq 3$ であって M^n が λ-isotropic で minimal である事より、M^n は Einstein となる。すなわち、R_{ij} をリッチテンソルとすると、

$$R_{ij} = \left\{(n-1)\tilde{c} - \frac{n+2}{2}\lambda^2\right\}\delta_{ij},$$

だから、λ は一定となる。また、定義より $\delta = \dfrac{n+2}{2n}\lambda^2$ となるから、δ も一定となる。したがって、δ のラプラシアン を考えると、[ ]にあるように 次の等式を得る.

$$(2.1) \qquad \frac{1}{2}\Delta S = \sum (h^{\alpha}_{ijk})^2 + n\hat{c}S - L_N - K_N$$

したがって.

$$\sum (h^{\alpha}_{ijk})^2 = K_N + L_N - n\hat{c}S.$$

Lemma 3 を用いると,

$$(2.2) \qquad \sum (h^{\alpha}_{ijk})^2 = K_N - \frac{n^2\tilde{c}}{n+1}S + K_N - \frac{n\tilde{c}}{n+1}S - \frac{2}{n+2}S^2$$

を得る. 一方. 仮定(iii) より $K_N \leq \frac{n^2\tilde{c}}{n+1}S$ が導かれるから、(2.2) より

$$h^{\alpha}_{ijk} = 0 \quad \text{for } \forall i, j, k, \alpha.$$

$$K_N = \frac{n^2\tilde{c}}{n+1}S = \frac{n\hat{c}S}{n+1} + \frac{2}{n+2}S^2$$

が求まる. このとき M^n は 定曲率 となる、ゆえに、[2] における 定理と [4] における定理1 より M^n は ベロネーズ多様体となる. 　　　　了証.

定理2. ([6]). compact で oriented な $M^n(c) \subset \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ が isotropic で. はめこみが full の時. H^2を平均

曲率ベクトルの長さの平方として，関係式

$$0 < H^2 \leqq \frac{2(n+1)}{n}c - \tilde{c} \quad , \quad p = \frac{n(n+1)}{2},$$

が成り立っているならば，$M^n(c)$ は $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ の定曲率 $\tilde{c}+H^2$ の hypersphere $S^{n+p-1}(\tilde{c}+H^2)$ 内にベロネーズ多様体としてはめこまれている．

証明．詳しくは [6] の定理 5.1 を見ていただきたい．ここでは，おおまかな方針のみを述べる．

仮定より $M^n(c)$ が $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ で λ-isotropic であるとしてよい．すると，前節の 2 つのテンソル W と V が消えている事より，

$$(2.3) \qquad \sum h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{kl} = (\lambda - c + \tilde{c})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (\lambda^2 + 2c - 2\tilde{c})\delta_{ij}\delta_{kl}$$

を得る．実は (2.3) と「$W=0$，$V=0$」とは同値である．この事より，M^n は pseudo-umbilical となる．更に $n \geqq 3$ ならば $M^n(c)$ は Einstein となって，λ は一定となる．pseudo-umbilical

である事と仮定より、 $H>0$ としてよいから、

$$h_{ij}^{n+1} = H\delta_{ij}$$

となる特別な frames で考えて、公式 (2.1) を用いる。 以上。

次に L_N と S との間の関係による、ベロネーズ多様体の特徴付けを与える。

定理3. ([4]). $M^n \subseteq S^{n+p}(\tilde{c})$ が compact で oriented であって、はめこみが full で minimal なるとき、不等式

$$(n+1)L_N \geqq n\tilde{c}S, \qquad p>0$$

が成り立つならば、 M^n はベロネーズ多様体となる。

証明. 公式 (2.1), Lemma 5 及び仮定より

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum (h_{ijk}^{\alpha})^2 + n\tilde{c}S - K_N - L_N \geqq \sum (h_{ijk}^{\alpha})^2 + n\tilde{c}S - (n+1)L_N \geqq 0.$$

を得る．M^n が compact で oriented だから，上の不等式は全て等号となる．したがって，$h^\alpha_{ijk}=0$，M^n は定曲率，且つ，isotropic となるから，既に示した結果により，M^n はベロネーズ多様体となる．　了証．

次に断面曲率を pinching する事により，ベロネーズ多様体の特徴付けを与える。

定理4．（[5]），$M^n \subset S^{n+p}(\tilde{c})$ が compact で oriented であって，はめこみが full で minimal なるとき．

$$M^n \text{の全ての断面曲率} \geq \frac{n\tilde{c}}{2(n+1)}, \quad p>0.$$

ならば．M^n はベロネーズ多様体となる．

証明．(1.5)より任意な定数 a に対して，

$$\sum h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij} = (a+1)\left\{\sum\left(h^\alpha_{ij}h^\alpha_{km}R_{mijk} + h^\alpha_{ij}h^\alpha_{mi}R_{mkjk}\right)\right\} + aL_N - \frac{1-a}{2}K_N - na\tilde{c}S \tag{2.4}$$

を得る． c を M^n の断面曲率の最小値とすると，$R_{ijij} \geqq c$ だから，[5] の Lemma 1 に示したように，

$$(2.5)\qquad \sum h^\alpha_{ij} h^\alpha_{km} R_{mijk} + \sum h^\alpha_{ij} h^\alpha_{im} R_{mkjk} \geqq n c S.$$

を導く事が出来る．(2.4) と (2.5) より $a+1 \geqq 0$ なる定数 a に対して，次の不等式を得る．

$$(2.6)\qquad \sum h^\alpha_{ij} \Delta h^\alpha_{ij} \geqq (a+1) c n S - a \tilde{c} n S + a L_N - \frac{1-a}{2} K_N.$$

前節の Lemma 5 の不等式 $n L_N \geqq K_N$ を (2.6) へ代入すると，正の定数 a に対して，次の不等式を得る．

$$\sum h^\alpha_{ij} \Delta h^\alpha_{ij} \geqq (a+1) c n S - a \tilde{c} n S + \left(\frac{a}{n} - \frac{1-a}{2}\right) K_N.$$

ここで，$a = \dfrac{n}{n+2}$ とおくと 上不等式は次式となる．

$$(2.7)\qquad \sum h^\alpha_{ij} \Delta h^\alpha_{ij} \geqq \frac{n}{n+2} \{ 2(n+1) c - n \tilde{c} \} S$$

(2.1)，(2.7) 及び 仮定 $2(n+1)c \geqq n\tilde{c}$ を用いると次の不等式を得る．

$$(2.8)\quad \frac{1}{2}\Delta S \geqq \sum (h^{\alpha}_{ijk})^2 + \frac{n}{n+2}\{2(n+1)c - n\tilde{c}\}S \geqq 0 .$$

M^n は compact で oriented だから，(2.8) において全て等号が成り立つ．「$p>0$ であるから $S>0$」を考慮すると，

M^n は isotropic

$h^{\alpha}_{ijk} = 0 \quad$ for $\forall i, j, k, \alpha$

M^n は定曲率 $\dfrac{n\tilde{c}}{2(n+1)}$

となる．したがって，M^n はベロネーズ多様体となる．

了証．

最後に，B. Smyth [10] の結果を用いて，上の定理4と同じ証明法により ベロネーズ多様体の特徴付けを，平均曲率ベクトルが 一定な 部分多様体に対して与える．

先ず，B. Smyth [10] の結果によると，次の事が分る．

Lemma 6. ([10]). <u>compact で oriented な M^n</u>

が正曲率であって、その平均曲率ベクトルが normal bundle で平行ならば、M^n は pseudo-umbilical である。但し、M^n が minimal な場合は除く。

さて、ベロネーズ多様体の特徴付けは次のようになる。

定理5. $M^n \subset \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ が compact で oriented であって、その平均曲率ベクトル H が normal bundle で平行で、はめこみが full なるとき、

$$M^n \text{の全ての断面曲率} \geqq \frac{n}{2(n+1)}(\tilde{c}+\|H\|^2) > 0, \quad p>1,$$

ならば、M^n は $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ の定曲率 $\tilde{c}+\|H\|^2$ なる hypersphere $S^{n+p-1}(\tilde{c}+\|H\|^2)$ 内にベロネーズ多様体としてはめこまれている。

証明は定理4と殆んど同じであるので省略する。

以上。

Bibliograhpy

[1] S. S. Chern, M. doCarmo and S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional analysis and Related Fields, Springer, 1970, 59-75.

[2] J. Erbacher, Reduction of codimension of an isometric immersion, J. Differential Geometry, 5(1971), 333-340.

[3] T. Itoh, On minimal surfaces in a Riemannian manifold of constant curvature, Math. J. Okayama Univ., 17(1974), 19-38.

[4] ———, On Veronese manifolds, J. Math. Soc. Japan, 27(1975), 497-506.

[5] ———, A characterization of Veronese manifolds, to appear.

[6] T. Itoh and K. Ogiue, Isotropic immersions and Veronese manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 209(1975), 109-117.

[7] J. A. Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces, Ann. Mat. Pura Appl., 83(1969), 261-336.

[8] B. O'Neill, Isotropic and Kaehler immersions, Canad. J. Math., 17(1965), 907-915.

[9] T. Otsuki, Minimal submanifolds with M-index2 and generalized Veronese surfaces, J. Math. Soc. Japan 24(1972), 89-122.

[10] B. Smyth, Submanifolds of positive curvature,

[11] S. T. Yau, Submanifolds with constant mean curvature II, Amer. J. Math. Soc., (1974).

Department of Mathematics

University of Tsukuba