数理解析研究所講究録
第 277 巻 1976 年 1-6

ある種の4重可移群について

大阪教育大学　　平峰　豊

現在までに知られている4重可移群（$A_6, A_7, \cdots S_4, S_5, \cdots M_{11}, M_{12}$ M_{23}, M_{24}）の中で4点の stabilizer が可解となっているものが11個（$A_6, A_7, A_8, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, M_{11}, M_{12}, M_{23}$）あるが、この11個だけに限るかどうかは興味ある問題である。

次の定理はこの方面に関しての一つの試みである。

<u>定理</u>　G を有限集合 Ω 上の4重可移群とし，G の4点の stabilizer の任意の 2-element と任意の 3-element が可換であるとすると，G は $A_6, A_7, S_4, S_5, S_6, M_{11}$ 又は M_{12} のいずれかである。

<u>系</u>　4点の stabilizer が巾零となるような4重可移群は，知られたものに限る。

証明には、永尾、野田、大山氏らによる On multiply transitive groups I〜XIII（[2]−[8]）の次の定理が用いられる。

<u>定理1</u>　4重可移群の4点の stabilizer をDとおくと、$G = S_5, A_6, M_{11}$ を除きDの固定点は丁度4点である。

<u>定理2</u>　PをDの 2-Sylow 群とすると、$G = A_6, A_7, M_{11}, M_{23}$ を除きPの固定点は4点又は5点である。

<u>定理3</u>　$P\ (\neq 1)$ がその固定点以外のところで semi-regular であれば、$G = A_8, A_9, S_6, S_7, M_{12}$ 又は M_{23} である。

<u>定理4</u>　D が 3′-group ならば、$G = A_6, S_4, S_5, S_6, M_{11}$ 又は M_{12} である。

証明の概略をのべる。

(G, Ω) を定理の反例で $|\Omega|$ が最小となるものであるとする。$\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし、$G_{1234} = D$, $P \in Syl_2(D)$, $R \in Syl_3(D)$ とする。又、Gの部分集合 $X\ (\neq \phi)$ に対して $F(X) = \{j \in \Omega \mid j^X = j\}$ とする。

定理1〜4により次のことが分かる。

(1) $F(D)=\{1,2,3,4\}$, $|F(P)|=4$ or 5, Pは$\Omega-F(P)$上semi-regularでない, $R\neq 1$。

(2) $|F(P)|=4$

(証明) $F(P)=\{1,2,3,4,i\}$と仮定し, $L=\langle R^d \mid d\in D\rangle$とおくと定理の仮定により$[L,P]=1$。従って$i^D\in F(L)$となる。又定理1より$|D:D_i|\neq 1$であり, 明らかに$2,3\nmid |D:D_i|$であるから, $|F(L)|\geq 4+5=9$となる。$|F(L)|$は奇数故, 定理4を用いて$N_G(L)^{F(L)}\simeq M_{11}$となる。従って$P^{F(L)}=1$。よって$F(P)\supseteq F(L)$となり矛盾を得る。

次に $m=\max_{i\in\Omega-F(P)}|P_i|$ とし, $P_j=Q$ $j\notin F(P)$, $|P_j|=m$ のようにQを定めると定理3及び(2)より次を得る。

(3) $1\neq Q\neq P$

また, Qのmaximalityにより

(4) Qを真に含む2-部分群の固定点は4点以下である。

(5) $N_G(Q)^{F(Q)}$ は4重可移群である。

(証明) 次の補題により明らか。

補題 (Livingstone - Wagner [1]) GをΩ上の置換群とする。$1\leqq k<|\Omega|$ なるkとある素数pに対して, 次の(*)が成りたつときGはΩ上のk重可移群となる。

(*) Γを$|\Gamma|=k$なるΩの任意の部分集合とすると, Gの

p-部分群Cが存在して $F(C)=\Gamma$ となる。

(6) $N_G(Q)^{F(Q)} \simeq S_6$ 又は M_{12}.

(証明) (3),(5) 及び Ω の minimality より明らか。

(7) S を D の自明でない 3-部分群とすると $F(S)=F(Q)$ が成りたつ。このことにより. R は $\Omega-F(R)$ 上 semi-regular であり. $F(Q)$ は D にのみ依存して決まる部分集合である。

(証明) (6) により $S^{F(Q)}=1$. 従って $F(S)\supseteq F(Q)$。$F(S)\neq F(Q)$ とすると. $|F(S)|\geq 8$ かつ $|F(S)|$ は偶数である。定理の仮定及び (2) より. 先の補題を再び用いて. $N_G(S)^{F(S)}$ は定理の仮定をみたす4重可移群となる。故に $N_G(S)^{F(S)}\simeq M_{12}$. とくに $Q^{F(S)}=1$ となるが. これは $F(Q)\supseteq F(S)$ を意味して矛盾となる。

(8) T を $N_G(Q)$ の 2-Sylow 群. R^* を D の任意の 3-Sylow 群とすると $[T,R^*]=1$ となる。

(証明) (6) より $N_G(Q)$ の 2-element x で $|F(x)\cap F(Q)|=4$ をみたすものがあるが. この x に対して $\langle x^g \mid g\in N_G(Q)\rangle = N_G(Q)^{F(Q)}$ が成りたつ。$\langle x^g \mid g\in N_G(Q)\rangle = M$, $N_G(Q)_{F(Q)}=K$ とおくと $N_G(Q)\rhd M$, $Q\in Syl_2(K)$, $N_G(Q)=M\cdot K$ となる。(7) より $|F(x^g)\cap F(R^*)|=|F(x^g)\cap F(Q)|=4$. 従って $[x^g,R^*]=1$ となるので. $[M,R^*]=1$ が成りたつ。一方 $T=(T\cap M)\cdot Q$ であり. $[Q,R^*]=1$ は明らか故. $[T,R^*]=1$ を得る。

(9) $Q(\neq 1)$の位数2の元tに対して$|F(t)|\equiv 0 \pmod 3$が成立する。

(証明) $F(t)\supseteq F(Q)=F(R)$は(7)より明らか。同じく(7)によりRは$F(t)-F(R)$上semi-regularに作用するから$|F(t)-F(R)|\equiv 0 \pmod 3$。従って$|F(t)|=|F(R)|+|F(t)-F(R)|\equiv 0 \pmod 3$。

(10) $|F(t)|\not\equiv 0 \pmod 3$

(証明) $i\in\Omega-F(t)$をとり$i^t=j$とおく。$R_1\in Syl_3(G_{12ij})$とすると(7)により$F(R_1)$は$\langle t\rangle\cdot G_{12ij}$により全体として固定される。この作用のkernelの2-Sylow群でtによりnormalizeされるものをQ_1とすると(6)により$N_G(Q_1)^{F(Q_1)}$はS_6又はM_{12}に同型である。$[R_1,Q_1]=1$故$R_1\le N_G(Q_1)$であるが、(8)により$[t,R_1]=1$となる。これらのことより$|F(t)\cap F(R_1)|=|F(t)\cap F(Q_1)|=2$又は4となり、(9)の証明と同じく(7)を用いて$|F(t)-F(R_1)|\equiv 0 \pmod 3$が成りたつ。従って$|F(t)|=|F(t)\cap F(R_1)|+|F(t)-F(R_1)|\equiv 1$又は$2 \pmod 3$を得る。

(9)及び(10)により矛盾が導かれて定理が証明された。

最初に述べた問題を直接解決するのはかなり難かしいことではないかと思われるが、当面は次の問題が考えられる。

<u>問題</u>　4重可移群の4点のstabilizerが$\{2,3\}$-群であれば、それは知られたものに限るか？

("可解"の場合で知られているものはこの性質をもっている。)

文献

[1] D. Livingstone and A. Wagner : Transitivity of finite permutation groups on unordered sets, Math. Z. 90 (1965) 393–403

[2] H. Nagao : On multiply transitive groups IV, Osaka J. Math. 2 (1965), 327–341.

[3] H. Nagao : On multiply transitive groups V, J. Algebra 9 (1968), 240–248.

[4] T. Oyama : On multiply transitive groups VII, Osaka J. Math. 5 (1968), 319–326.

[5] T. Oyama : On multiply transitive groups VIII, Osaka J. Math. 6 (1969), 315–319.

[6] T. Oyama : On multiply transitive groups IX, Osaka J. Math. 7 (1970), 41–56

[7] T. Oyama : On multiply transitive groups XI, Osaka J. Math. 10 (1973), 379–439

[8] T. Oyama : On multiply transitive groups XIII, to appear.