数理解析研究所講究録
第 277 巻 1976 年 27-34

Split (B,N)-pair を持つ群のモヂュラー表現について

上智大 理工　　沢田秀樹

定理　(G, B, N, S, U) を標数 p の split (B,N)-pair を持つ群とし，$\tilde{K}$ を G の標数 p のある有限分裂体とする。この時 $\tilde{K}$ 上 U の単位表現を 1_U，1_U の G への誘導表現 1_U^G の $\tilde{K}G$－自己準同型環を E とすれば，既約 $\tilde{K}G$－加群の同値類の集合と E の $\tilde{K}$ への一次表現の同値類の集合との間にある一対一対応をつける事ができる。

以下，この定理の証明の概略を述べる。

記号　G を有限群とする．

G の部分集合 A, B, ... に対して $\langle A, B, \cdots \rangle$ は A, B, ... で生成される G の部分群。

G の部分集合 X の元の数 $= |X|$。

G の元 a, b に対して ${}^b a = bab^{-1}$, ${}^b X = bXb^{-1}$.

1. 準備

定義1. 群Gに次の条件を満たす部分群B, N及び$N/B\cap N$の部分集合Sが存在する時Gは(B,N)-pairを持つと言う.

(i) $G=\langle B,N\rangle$ かつ $N \triangleright B\cap N$.

(ii) $W=N/B\cap N$ はSで生成され, 任意のSの元rに対して$r^2=1$.

(iii) すべての$r\in S$及び$w\in W$に対して　$rBw\subset BwB\cup BrwB$.

(iv) すべての$r\in S$に対して　$rBr\neq B$.

Wを(B,N)-pairのWeyl群と呼ぶ。$B\cap N=H$と書く.

定義2. pを素数とする. 有限群Gが標数p, 階数nのsplit (B,N)-pairを持つとは次の(i),(ii)を満たす時を言う.

(i) Gは(B,N)-pair (G,B,N,S)　で　$H=\bigcap_{x\in N} {}^{x}B$, $|S|=n$なる物を持つ.

(ii) Hはアーベル群で, $p\nmid |H|$でありBはBのある正規p-部分群UとHの半直積となる.

$\{(w)\mid w\in W\}$をNにおけるHの剰余類の代表元の集合とする. この時U_0をUの部分群でU_0の正規化群がHを含む様な物とすれば, 任意の$h\in H$に対し${}^{(w)}U_0={}^{(w)h}U_0$となるから${}^{(w)}U_0={}^{w}U_0$と書いてよい. 同様に${}^{w}h={}^{(w)}h$と書く. 今, 任意の$w\in W$は$S=\{w_1,\cdots,w_n\}$

の積となるが $w=w_{j_1}\cdots w_{j_l}$ と書かれている時その最小の l を w の長さと言い $l(w)$ と書く (see N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5, 6). W の元で最大の長さを持つ物は一意に存在するがそれを w_0 と書く.

$U_w^- = U \cap {}^{w^{-1}w_0}U$ $(w \in W)$, $U_i = U \cap {}^{w_i w_0}U$, $V_i = {}^{w_i}U_i$, $G_i = \langle U, V_i \rangle$, $H_i = H \cap G_i$ とする.

補題3 (see P. Fong & G. M. Seitz, Inventiones Math. 21 (1973)). 階数 n の split (B,N)-pair (G,B,N,S,U) においては, すべての $1 \le i \le n$ について $(w_i)H \cap U_i V_i U_i \neq \emptyset$ となる.

(G,B,N,S,U) を標数 p, 階数 n の split (B,N)-pair とした時 G のあらゆる部分群及び因子群に対して分裂体となる様な有限次代数体 K が存在する. その時 K の代数的整数の全体を R として $\mathfrak{P}$ を R の素イデアルで素数 p を含む物とする. K には $\mathfrak{P}$ に関する加法的付値 $\nu_{\mathfrak{P}}$ が定義されるが, π を R の元で $\nu_{\mathfrak{P}}(\pi)$ が最小となる物, $R_{\mathfrak{P}} = \{\alpha \in K \mid \nu_{\mathfrak{P}}(\alpha) \ge 0\}$ とする. この時 $\tilde{K} = R/\mathfrak{P}$ は $R_{\mathfrak{P}}/\pi R_{\mathfrak{P}}$ と同型になり, G のあらゆる部分群及び因子群の有限分裂体となる. $\alpha \in R_{\mathfrak{P}}$ に対して $\tilde{\alpha} = \alpha + \pi R_{\mathfrak{P}} \in \tilde{K}$ と書く.

定義4. (G,B,N,S,U) 及び $\tilde{K}$ を上の物とする. $\tilde{K}G$ を $\tilde{K}$ 上 G の群環とし, G の部分集合 X に対して $\overline{X}=\sum_{x\in X} x\in \tilde{K}G$ とする. $\tilde{K}G$－加群 M の元 $[m]\neq 0$ は以下の条件(i)(ii)を満たす時 weight $(\chi,\tilde{\mu}_1,\cdots,\tilde{\mu}_n)$ の weight element と呼ばれる. ここで $\chi: B\to \tilde{K}^*=\tilde{K}-\{0\}$ への準同型で各 $\tilde{\mu}_i$ は $\tilde{K}$ の元である.

(i) $b[m]=\chi(b)[m]$, $b\in B$.

(ii) $\overline{U_i}(w_i)[m]=\tilde{\mu}_i[m]$, $1\le i\le n$.

既約 $\tilde{K}G$－加群について次の事が知られている (see C.W. Curtis, J. Reine Angew. Math. 219 (1965) & Springer Lecture Note No. 131 (1970); F. Richen, Trans. AMS. 140 (1969)).

定理5 (Curtis－Richen).

(i) すべての既約 $\tilde{K}G$－加群 M は weight elements を含むがそれらの weight は M によって一意に定まる.

(ii) 既約 $\tilde{K}G$－加群 M_1, M_2 が同じ weight の weight element を持つならば, $M_1\cong M_2$.

(iii) これらの weight elements は次の形で与えられ既約 $\tilde{K}G$－加群の同値類と一対一に対応する.

すべての $w_i\in S$ に対して $(w_i)\in G_i$ とする. $J\subset S$, $W_J=\langle J\rangle$. $\{(w)\mid w\in W_J\}$ を次の様な剰余類の代表元とする. $(w_i)\in U_iV_iU_i$, $w_i\in J$ かつすべての $w,w'\in W_J$ に対して $(w)(w')(ww')^{-1}\in H_J$

$(H_J = \langle {}^w H_i \mid w \in W_J,\ w_i \in J \rangle$. $\chi : B \to \tilde{k}^*$ への準同型ですべての $w_i \in J$ に対して $\mathrm{Ker}\,\chi \supset H_i$ なる物とする. 今 $H_\chi = \sum_{h \in H} \chi(h^{-1}) h$ とすれば

$$[m] = \sum_{w \in W_J} \overline{U^-_{w_0 w}} H_\chi (w^{-1})(w_0) \overline{U}$$ は weight element

でその weight は $(\chi, \tilde{\mu}_1, \cdots, \tilde{\mu}_n)$ である. 但し $\tilde{\mu}_i = -1 \Leftrightarrow w_i \notin J\ \&\ \chi | H_i = 1$, かつ $\tilde{\mu}_i \neq -1 \Rightarrow \tilde{\mu}_i = 0$.

定理5の(iii)より $\{(\chi, J)\}$ と{既約 $\tilde{k}G$－加群の同値類}が一対一に対応する事がわかる.

2. 1_U^G の G－自己準同型環

(G, B, N, S, U) を標数 p, rank n の split (B,N)－pair とする. $e = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} u$ とすれば, kGe は kG－加群として 1_U^G と kG－同型な表現を与える. $E = ekGe$ とする. 今 E の元 $a_n = (\mathrm{ind}\, n) ene$, 但し $n \in N$ で $\mathrm{ind}\, n = |U / U \cap U^n|$, の全体 $\{a_n \mid n \in N\}$ は E の k－基底となっている. そこで $E' = \sum_{n \in N} R_{\mathfrak{p}} a_n$ とすれば E' は環となり, $\mathbb{E} = E' / \pi E'$ は, E が $\mathrm{End}_{kG}(kGe)$ と反同型となるのと同じ様に, $[R_{\mathfrak{p}} Ge] = R_{\mathfrak{p}} Ge / \pi R_{\mathfrak{p}} Ge$ とした時 $\mathrm{End}_{\tilde{k}G}([R_{\mathfrak{p}} Ge])$ と反同型になる, i.e.,

$$E \cong \mathrm{End}_{kG}(kGe) \quad \& \quad \mathbb{E} \cong \mathrm{End}_{\tilde{k}G}([R_{\mathfrak{p}} Ge])$$
$$\alpha \longmapsto \alpha_R \qquad\qquad \alpha \longmapsto \alpha_R$$

但し $\alpha_R : x \mapsto x\alpha$ (see T.V. Fossum, Ill. J. Math., 16 (1972)).

今 $[R_pG_e]$ は $\tilde{K}G$－加群として 1_U^G と $\tilde{K}G$－同型な表現を与えるから E 及び $\tilde{E}$ はそれぞれ 1_U^G の K 上及び $\tilde{K}$ 上の G－自己準同型環と考えられる．

E の構造定数は次の命題より与えられる．

命題 6 (c.f. T. Yokonuma, C. R. Acad. Sci. Paris, 264 (1967); H. Sawada, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21 (1974)).

(i) $a_h a_n = a_{hn}$ & $a_n a_h = a_{nh}$ for $\forall h \in H$ & $\forall n \in N$.

(ii) $a_{(w_i)} a_n = a_{(w_i)n}$ if $l(w_i w) > l(w)$ 但し $w = nH$.

$a_n a_{(w_j)} = a_{n(w_j)}$ if $l(ww_j) > l(w)$.

(iii) $a_{(w_i)}^2 = ind(w_i) a_{(w_i)^2} + (\sum_{u \in U_i^*} a_{h_i(u)}) a_{(w_i)}$，但し $U_i^* = U_i - \{1\}$，h_i は $(w_i) u (w_i) = f_i(u) h_i(u) (w_i) g_i(u)$ ($u \in U_i^*$, $f_i(u) \in U_i^*$, $h_i(u) \in H$, $g_i(u) \in U$) で定義される U_i^* から H への写像．

注意 I. $ind(w_i) = |U_i|$ となり $p \mid ind(w_i)$．

II. この命題 6 の証明は T. Yokonuma が G が有限 Chevalley 群の場合について，H. Sawada が有限 Steinberg 群の場合について Case by case check により証明しているが，U の部分群 U_w^- 達の性質より Split (B, N)-pair 一般について統一的に証明できる．

3.定理の略証

$J\subset S$, λをBからK^*への準同型で$\mathrm{Ker}\,\lambda\supset U$かつすべての$w_i\in J$に対して$\mathrm{Ker}\,\lambda\supset H_i$なる物とし組$(\lambda,J)$を考える．この時$(w_i)$達及び$\{(w)\mid w\in W_J\}$を定理5の(iii)の様にとり，

$$m(\lambda,J)=\sum_{w\in W_J}\overline{U^-_{w_0w}}\,H_\lambda(w^{-1})(w_0)\,\overline{U}\in R_pG \quad ,$$

$$m^*(\lambda,J)=\varepsilon_\lambda\sum_{w\in W_J}a_{(w^{-1})(w_0)}\in E'$$

とおく但し，$\varepsilon_\lambda=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\lambda(h^{-1})a_h$．$|B|\,m^*(\lambda,J)=m(\lambda,J)$ なる関係がある．今 $[m(\lambda,J)]=m(\lambda,J)+\mathfrak{p}R_pG$ とすれば，定理5の(iii)において $(\chi,J)=(\tilde{\lambda},J)$ とした時 $[m]=[m(\lambda,J)]$ となる．但し $\tilde{\lambda}(b)=\lambda(b)+\mathfrak{p}R_p$, $b\in B$．同様に$[m^*(\lambda,J)]=m^*(\lambda,J)+\mathfrak{p}E'\in\bar{E}$ とおけば，$\tilde{K}G$−加群として

$$\rho:[R_pGe][m^*(\lambda,J)]\cong\tilde{K}G[m(\lambda,J)]$$

$$\Big(\sum_{g\in G}\alpha_g ge\Big)m^*(\lambda,J)+\mathfrak{p}R_pGe\longmapsto\Big(\sum_{g\in G}\alpha_g g\Big)m(\lambda,J)+\mathfrak{p}R_pG$$

となる．$nH=w$ とした時 $\rho(a_n m^*(\lambda,J)+\mathfrak{p}R_pGe)=\overline{U^-_{w^{-1}}}\,n\,[m(\lambda,J)]$ となっている．この事から$[m^*(\lambda,J)]$が$\bar{E}$の一次元左$\bar{E}$−加群を生成する事がわかる．

さらに$\bar{E}$の任意の一次表現φが与えられた時命題6及びC.W. Curtis (1970)の命題(5.1)より $\varphi([a_{(w_i)}])=0$又は-1，

$\varphi([a_{(w_i)}]) \neq 0 \ni \chi | H_i = 1$ となり定理5及び C.W. Curtis (1970) より weight $(\chi, \varphi([a_{(w_1)}]), \cdots, \varphi([a_{(w_m)}]))$ なる weight element $[m(\lambda, J)]$ が存在し単一加群 $\langle [m^*(\lambda, J)] \rangle$ と φ が同値になる．但し $\chi(h) = \varphi([a_h])$，$h \in H$．さらに

$$\{(\lambda, J)\} \underset{1:1}{\rightleftarrows} \{(\tilde{\chi}, J)\} \underset{1:1}{\rightleftarrows} \{\check{K}G[m(\lambda, J)] = [R_E G e][m^*(\lambda, J)]\}$$

$\underset{1:1}{\rightleftarrows} \{m^*(\lambda, J)\}$ より定理は証明される．