

2-Sylow-subgroup の index 2 の subgroup に関する fusion について

北大 理 福島博

§ 1

Glauberman によつて, 有限群 G において S を 2-Sylow-subgroup とし, t を S の involution とするとき, t が t 以外の S のどの元とも G において共役でないとき, $[t, G] \leq O(G)$ となることが証明された。これに関連して次の問題が考えられる。即ち S_0 を S の subgroup で $|S:S_0|=2$ とする。 t を S_0 の involution で, t が t 以外の S_0 のどの元とも G において共役でないとき群 G はどんな群となるか。 実際 S_0 が cyclic group のときは, この条件は成立するから, 2-Sylow-subgroup が dihedral や semi-dihedral である群は, この性質を満たすことがわかる。 よつて Glauberman の場合においては, G が非可換な単純群となることはなかったのに対して, この場合は非可換な単純群が存在することがわかる。ここでは, さらに強い条件のもとで群 G の構造を決定する。

§ 2

定理 G : 有限群 $Z^*(G) = 1$ $O^2(G) = G$

S : 2-Sylow-subgroup of G

仮定(★) $\left\{ \begin{array}{l} \exists S_0: \text{subgroup of } S, |S_0| \leq 2 \\ S_0 = T_1 * T_2 * \dots * T_n \quad (* \text{ は中心積を表わす。}) \\ \{x^g\} \cap S_0 \leq \langle x \rangle \quad \text{for } \forall x \in T_i (i=1, \dots, n) \quad \forall g \in G \end{array} \right.$

then S : dihedral or semi-dihedral-2-group.

系. G : 有限単純群

G は仮定(★)を満すとする。

then $G \cong L_2(q)$ $q = \text{odd}$, A_7 , $L_3(q)$ $q \equiv 1(4)$

$U_3(q)$ $q \equiv 1(4)$, M_{11}

注) 定理において $O^2(G) \neq G$ なる条件を除くと S_0 がその反例となっている。

定理の証明

conjugation family) に関する Solomon の結果を用いると次のことがわかる。

補題1. G : 有限群 S : 2-Sylow-subgroup

$\exists T$: non-abelian subgroup of S_0 $|S_0| \leq 2$

$\{x^g\} \cap S_0 \leq \langle x \rangle$ for $\forall x \in T, \forall g \in G$ then $Z^*(G) \neq 1$

証明) 条件より $\forall x \in T$ に対して $\langle x \rangle \trianglelefteq T$

よって $T \cong Q_8$ としてよいことがわかる。

$$T = \langle x, y \mid x^4=1, x^2=y^2, x^y=x^{-1} \rangle \quad Z = \langle x^2 \rangle \text{ とおく。}$$

$$Z^* \text{-theorem により } \exists g \in G \quad Z \neq Z^g \in S \text{ (Syl}_2(G))$$

Solomonの結果より $g \in N(H)$, ただし $H=S$ 或 $N(H)/H$: 2-isolated

$$N_S(H) \in \text{Syl}_2(N_G(H)) \quad C_S(H) \leq H$$

$$H=S \text{ のとき } g \in N(S) \quad g \in N(S') \quad Z \in Q' \leq S' \leq S_0 \text{ 矛盾}$$

$$\text{一方 } T \leq N(H) \quad \therefore \forall R \in H \quad R^2 = R \text{ 或 } ZR \in H$$

$$H \neq S \text{ より } N(H)/H \text{ ; 2-isolated}$$

$L = N(H)/H$ とおく。 Bender により群の構造は知られている。

即ち L の 2-Sylow-gp の normalizer の中に involution に conjugate に act する odd order element k が存在する。

$$T^k \leq S \quad |T^k \cap S_0| \geq 4 \quad \text{ie } \exists x \in T \quad |x|=4 \quad x^k \in S_0$$

$$\text{よって } k \text{ fix } \bar{x} \in L \quad \therefore x \in H$$

$$Z^g = (x^g)^2 \in S_0 \quad Z^g = Z \text{ となり矛盾。}$$

このことより $T_i (i=1, \dots, n)$; cyclic group としてよい。

補題 2. 以下 G は定理の counter-example とする。

S_0 ; weakly closed in S w.r.t G

証明) もし S_0 が S で weakly closed でないとする。

$$\exists g \in G \quad S_0 \neq S_0^g \in S \quad \langle S, S_0^g \rangle = S$$

$$S_0 \cap S_0^g \leq Z(S) \quad \text{このとき } \exp T_i \leq 4 \quad (i=1, \dots, n)$$

$\Rightarrow \exp T_i > 4$ とすると $|T_i \cap S_0^{\mathfrak{g}}| \geq 4$ i.e. $\exists x \in T_i, x \in Z(S)$ $|x|=4$
 これより $x^2 \in Z^*(G)$ となり矛盾を生じる。

さらに $S - S_0$ の元は involution となることより $|T_i| = 2 (i=1, \dots, n)$
 となり S は elementary abelian group

Bender により S は four-group, これは G ; counter-example に反する。

補題 3.

$Z: T_i$ の involution とすると $\Omega_1[S_0, t] = \langle Z \rangle$ となる。 $\exists t \in S - S_0$

証明) 一般に $B \not\subseteq S_0$, $B \not\subseteq S_0$ とすると $\exists g \in G$, s.t. $B^g \subseteq S_0$

$N_S(B)^g \subseteq S$ となることから S_0 が weakly closed なることより言える。

Z^* -theorem より $\exists R \in G$ $Z^R \in S - S_0$. $t = Z^R$ とおく。 $|S_0 \cap S_0^{\mathfrak{g}}| = \max$ と

なるように R をとる。 $A = S_0 \cap S_0^{\mathfrak{g}}$ とおく。 $C = N_{S_0}(\langle A, t \rangle)$

前記のことから $S \cong \langle A, t \rangle^{g_i} \subseteq S_0$. $C^{g_i} \subseteq S$, $A \subseteq S_0 \cap S_0^{g_i^{-1}}$

A の maximality より $A = S_0 \cap S_0^{g_i^{-1}}$

$$C/A \cong C^{g_i}/A^{g_i} = C^{g_i}/C_{C^{g_i}}(S_0) \subseteq S/C_S(S_0) \quad |S/C_S(S_0)| = 2$$

$$D = C_{S_0}(t), \quad E = \{x \in S_0 \mid [x, t] \in D\} \quad \text{then } C \subseteq E$$

$E \xrightarrow{\varphi} F = \Omega_1([S_0, t])$ このとき φ は onto homo となる。

$$x \mapsto [x, t] \quad \text{ker } \varphi = C_E(t) = D$$

$$E/D \cong F, \quad m(E/D) = m(E/C) + m(C/D)$$

$$E/C \cong E/F \cap A \subseteq D/A \quad \text{よって } m(E/D) \leq m(C/D) + m(D/A)$$

$$|C/A| \leq 2 \quad \text{よって } m(E/D) = 1 \quad \text{即ち } |\Omega_1([S_0, t])| = 2$$

補題4. $|T_1|=|T_3|=\dots=|T_n|=2$ としよ.

証明) $|T_1|=2^k$ $|T_2|=2^m$ $k, m \geq 2$ とする.

$$T_1 = \langle x \rangle, \quad T_2 = \langle y \rangle \quad x_i = x^{2^{i-2}} \quad x_{i1} = x$$

$[S_0, t] = \text{cyclic group}$ より $\langle x^2 \rangle \geq \langle y^2 \rangle$ or $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$

$\langle x^2 \rangle \geq \langle y^2 \rangle$ としよ. $y^2 = (x^2)^k$, \therefore このとき $yx = x_1 x^{-k} y^k$, $yx^k = x^k$
 $v^t = v$ or v^{-1} $v^t = v^k$ とするときは $\in Z^*(G)$ となり矛盾.

$$(v x_1)^k = v^k x_1^k = v x_1 \in Z(S) \quad T_1 * T_2 = \langle x \rangle * \langle v x_1 \rangle$$

$(v x_1)^k \in S_0$ とする. $S_1(S_0) \in Z(S)$ より $k \in N(S)$, k : odd order とし
 てよ. S_0 : weakly closed より $k \in N(S_0)$ より $z(v x_1)^k \neq v x_1$ とす
 ると $(v x_1)^k = z v x_1$ $(v x_1)^{k^2} = v x_1$ k と $v x_1$ は可換となり矛盾.

$T_2 = \langle v x_1 \rangle$ とあるためにおきかえよ. $|T_1|=|T_3|=|T_5|=2$ とし
 てよ.

補題5. $O^2(G) \neq G$ または $Z^*(G) \neq 1$

証明) $T_1 = \langle x \rangle$ $T_i = \langle z_i \rangle (i=2, \dots, n)$ $A = \langle z_2 \rangle * \dots * \langle z_n \rangle$ としよ.

$\langle x \rangle \langle t \rangle = \langle z \rangle$ より $\langle t \rangle \langle x \rangle$: dihedral or semi-dihedral-grp.

$\langle t \rangle \langle x \rangle$: dihedral のときを考える.

$U = \{t x^k, z \mid k: \text{even}\}$ $V = \{t x^k \mid k: \text{odd}\}$ U, V の involutions は、これ
 ぞれみな共役である. S の involution の集合は $U \cup_{a \in A} U_a \cup V \cup_{b \in A} V_b \cup A^{\neq}$

$t = z^k \in S - S_0$. S_0 : weakly closed より $[A, t] = 1$ としよ.

よって U_a の元も V_a の元もそれぞれみな共役である.

$n=1$ とすると S : dihedral or semi-dihedral となり G の counter-

-example に反する。よって $n \geq 2$ としよ。

Σ^* -theorem より $\exists R \in N(H)$ $C_S(H) \leq H$ 特に $\langle Z \rangle \times A \leq H$ $Z_2^R \in S-S$ 。

$Z_2^R \in Ua$ とすると $Z_2 \sim Z_2 a$ となり矛盾 $\therefore Z_2^R \in V_a \exists b \in A$

このとき $Z_2^R = Z$ とすると $Z_2 \sim Z Z_2$ となり矛盾。

よって $\forall a \in A$ $a^R \neq a$ or $(aZ)^R \neq aZ$

即ち a or Ua の元は $V_c \exists c \in A$ と共役である。 $V_a (b \in A)$ の個数を数えることにより、 Z_2 は $V_a \exists b \in A$ の元とのみ共役であることがわかる。このことより Z_2 はある S の index 2 の subgroup の元には fuse しないことがわかり、Thompson の fusion lemma より $O^2(G) \neq G$ となり矛盾を生じる。

$\langle t \rangle \langle x \rangle$; semi-dihedral のときは、前記の証明より $Z_2 \in Z^*(G)$ がわかる。よっていずれの場合も矛盾を得る。

§ 3.

問題 G ; 有限単純群

S ; 2-Sylow-subgroup of G $|S: S_0| = 2$

$\exists t \in S_0$ $|t| = 2$

$\{t^g\} \cap S_0 \leq \langle t \rangle$ for $\forall g \in G$

このとき G は、どんな群となるか。