数理解析研究所講究録
第 277 巻 1976 年 88-92

Rudvalis群について

北大 理　　吉田 知行
奥山 哲郎

Rudvalisによって発見された，位数 $2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$ の単純群（以下，Rd.と記す）について，involutionの中心化群の構造からの特徴付けが，Parrott（centralの場合），Dempwolff（non-centralの場合）によってなされています。

ここでは，2-Sylow群の構造からの特徴付けについて考えてみます。

定理A．Rd.の2-Sylow群と同型な2群をSylow群としてもつ有限単純群は，Rd.に限る。

定理Aは，Assaによって既に得られているようですが，より一般的に，次の定理が証明されます。

定理B．Gを $O^2(G)=G$ なる有限群とし，その2-Sylow群Tが，次の条件を満足するとする。

(a). $|T| \geqq 2^{14}$　　(b) $|Z_4(T)| = 2^4$

(c). $W = C_T(Z_3(T))$ とおくとき．$\Phi(W) \subseteq Z_3(T)$

(d). Aを $|W : A| \leqq 2^4$なるWの部分群とすると．$A \supseteq \Phi(W)$

このとき．次のいずれかが成立する。

(1) $G/O(G) \cong Rd$.　　あるいは.

(2) $G \triangleright O(G)W$, $G/O(G)W \cong GL(3.2)$

証明の概略を以下に記す。G, T, W を定理の仮定をみたす群とする。

1. Transfer 及び．$N_G(W')$ の構造.

補題1.1.

(1). $Z(W) \supseteq W' = \Phi(W) = Z_3(T) \cong \mathbb{Z}_2^3$

(2). $T/W \cong D_8$, $W/W' \cong \mathbb{Z}_2^8$, $T/W' \cong \mathbb{Z}_2 \wr D_8$, $|T| = 2^{14}$

(3). $G \ni g$ に対し．$|W : W \cap T^g| \leqq 2$なら $g \in N_G(W')$

(4). W : weakly closed in T w.r.to G.

補題1.2.

(1) $T \subseteq X \subseteq G$なる部分群 Xに対し．$T \cap X' = T \cap N_X(W')'$

(2). $N_G(W')/C_G(W') \cong GL(3.2)$

(1)は．1.1 (3) 及び．Yoshida のTransfer の適用による。(2)は．(1), $W' \cong \mathbb{Z}_2^3$ なることより得られる。

補題1.3.　$N_G(W') = N_G(W)\ O(N_G(W'))$

1.1.(2) より．Aut T が 2-群なること，及び，$N_G(W)/C_G(W)W$ が $GL(8.2)$ の部分群であることを用いて証明される。

2.　$N_G(W)$ 及び．W の構造．

$N = N_G(W)$，$\overline{N} = N_G(W)/O(N_G(W))$ とおくとき．補題1.2．1.3より．$\overline{N}/\overline{W} \cong GL(3.2)$ は．$W/W' \cong \mathbb{Z}_2^8$，$W' \cong \mathbb{Z}_2^3$ に．faithful に作用している。

補題2.1.　$\overline{N}/\overline{W}$ は．W/W'，W' へ既約に作用している。

W' へは．明らかで．W/W' のときは．$GL(3.2)$ の 2-modular 表現の理論を用いることができる（$GL(3.2)$ の既約な．2-modular 表現は．4個で次数が．1，3，3，8，すべて．$\mathbb{Z}_2$ 上で書ける）．

補題2.2．W の構造は．一意的に決定される。

W/W'，W' を．$GF(2)[GL(3.2)]$-加群と考える。このとき．$W/W' \otimes W/W' \ni x \otimes y \longmapsto [x, y] \in W'$ なる $GL(3.2)$-準同型を考えると．$W/W' \otimes W/W'$ の既約 factor module を調べることより．$[x, y]$ が一意的に定まる。さらに．$W/W' \ni x \mapsto x^2 \in W'$ なる写像を考えると．x^2 が一意的に決まることが示され．

Wの構造が決定される。

補題2.2の証明に使われる条件は、Rd.の2-Sylow群のWに相当する部分群についてもみたされており、以下においてDempwolffのいくつかの補題の結果を利用することができる。

補題2.3．rank $W = 5$，Wは．367個のinvolutionsをもつ

補題2.4．Nでのinvolutionsの共役類は．4個で．次のようにとれる。

$t \in T-W$ ，e，$u \in W-W'$，　$z \in W'$

$|C_{\bar{N}}(t)| = 2^8$，$|C_{\bar{N}}(u)| = 2^{11}$，$|C_{\bar{N}}(e)| = 2^8 \cdot 7$，$|C_{\bar{N}}(z)| = 2^{14} \cdot 3$

$C_T(e) \cong Z_2^2 \times Suz(8)_2$ は $C_G(e)$ の2-Sylow群．

これらは．Dempwolffの結果などから容易に導かれる。

3．involutionsのfusion及び中心化群の構造

W'が．strongly closed in T w.r. to Gのときは．Goldschmidtにより．Gが決定され．定理の(2)が成立する。以下．W'は．strongly closedでないとする。

補題3.1. t, u, e, z について.

$t \sim u \sim z \sim e$ in Gが成立する。

$\overline{N}/\overline{W} \cong GL(3.2)$ の order 3 の元の Wでの中心化群をQとおくと. $Q \cong Q_8$, $C_W(Q)=Y$ はZ_2^5 と同型となる。

このとき. 次が成立する。

補題3.2. $N_G(Y)/O_{2'2}(N_G(Y)) \cong S_5$

$C_G(Y)' = \langle z \rangle O_{2'}(N_G(Y)) \lhd N_G(Y)$

これより. $C_G(z)/O_{2'2}(C_G(z)) \cong S_5$ が導かれる。

補題3.3. $C_G(e)$: solvable または. $C_G(e)/O(C_G(e))$ は $Z_2^2 \times Suz(8)$ に同型

補題3.2, 3.3, 及び Gorenstein-Walter より $O(C_G(z)) = 1 = O(C_G(e))$ となり. Parrott, Dempwolff の結果から. Gが決定できる。