

コンパクト群による接合積における
部分群と部分環の対応について

大阪教育大 長田 まり志

有限なフォン・ノイマン環 M と M 上の作用が自由な可算個の自己同型写像 α による離散的な群 G に対して、 M の G による接合積 $M \rtimes G$ を M で表わします。 M を含む G の M の全てのフォン・ノイマン部分環と、 G の全ての部分群との対応について、今まで知られている結果としましては、[3]、[4] 及び [8] が、あります。 [8] では、II₁-型ファクター M に対して、この対応が与えられています。 [3] では、 M は可換なフォン・ノイマン環で、 G に対して G の full な群 [4] を考え、[4] の全ての full な部分群と、 G の M を含む全てのフォン・ノイマン部分環の対応が与えられています。 [4] は [3] の結果と一般に有限なフォン・ノイマン環 M に対して、拡張したものです。

ここでは必ずしも有限とは限らないフォン・ノイマン環 M と M の自己同型写像 α による可換なコンパクト群 G に対して、 M を含む G の M のフォン・ノイマン部分環と G の閉部分群との

対応について、考えたいと思います。

§ 1. 正規な期待値と 離散な群による接合積

\mathcal{H} を可分なヒルベルト空間、 \mathcal{M} を \mathcal{H} のフォン・ノイマン環とし、 G を \mathcal{M} の自己同型写像のなす局所コンパクトな群とします。 \mathcal{H} の値をとる G 上の連続関数で、コンパクトな台をもつもの全体のなすベクトル空間 $\mathcal{K}(\mathcal{H}, G)$ に

$$(\xi, \eta) = \int_G (\xi(g), \eta(g)) dg, \quad \xi, \eta \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, G)$$

によって内積を定義します。ただし dg は G 上の左不変なヒル測度です。この内積に関して、 $\mathcal{K}(\mathcal{H}, G)$ を完備化したものを $L^2(\mathcal{H}, G)$ で表わします。

ヒルベルト空間 $L^2(\mathcal{H}, G)$ 上への \mathcal{M} の表現 π と、 G のユニタリ表現 λ を

$$(\pi(a)\xi)(g) = g^{-1}(a)\xi(g), \quad a \in \mathcal{M}, g \in G,$$

$$(\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad g \in G, \xi \in L^2(\mathcal{H}, G)$$

によって与えます。

π は正規な表現で、 π と λ は

$$Ad \lambda(g)(\pi(a)) = \lambda(g)\pi(a)\lambda(g)^* = \pi(g(a)), \quad (a \in \mathcal{M}, g \in G)$$

なる関係と充します。

$L^2(\mathcal{H}, G)$ 上の $\pi(\mathcal{M})$ と $\lambda(G)$ によって生成されるフォン・ノイマン環を、 \mathcal{M} の G による接合積とよび [9]、 $G \rtimes \mathcal{M}$ で表わします。

特に G が離散な群のときには、 G の \mathcal{M} から $\pi(\mathcal{M})$ の \mathcal{E} への忠実正規な期待値 e で、全 $g \in G (g \neq 1)$ に対して、 $e(\lambda(g)) = 0$ とみたすものが存在する事がよく知られていますが、この逆も成立します。すなわち

(1.1) \mathcal{M} をフォン・ノイマン環 \mathcal{A} のフォン・ノイマン部分環とし、 G を \mathcal{M} の自己同型写像のなす離散な群とする。 \mathcal{A} を G の \mathcal{A} の中への \mathcal{E} 表現とし、 \mathcal{A} は \mathcal{M} と $u(G)$ によって生成されているとする。もし \mathcal{A} から \mathcal{M} の \mathcal{E} への忠実正規な期待値 e で、 $e(u(g)) = 0$ と全 $g \in G (g \neq 1)$ に対してみたすものが存在するならば、 \mathcal{A} は G の \mathcal{M} と同型で、その同型写像 σ は

$$\sigma(x) = \pi(x), \quad (x \in \mathcal{M}), \quad \sigma(u(g)) = \lambda(g), \quad (g \in G)$$

と充す。

(証明) \mathcal{M} の忠実正規な state φ に対して、 $\psi = \varphi \circ e$ とおくと、 ψ は \mathcal{A} の忠実で正規な state となる。 ψ による \mathcal{A} の表現空間 \mathcal{H} で \mathcal{A} を考える事によつて、 \mathcal{A} に対する cyclic な \mathcal{H} の元 ξ で

$$(u(g)x\xi, \xi) = 0 \quad (\forall g \in G, \forall x \in \mathcal{M})$$

をみたすものが存在する事と仮定してもよい。

\mathcal{M} の生成するヒルベルト空間を \mathcal{H}_0 と表わすと、 ξ の性質によつて、 \mathcal{H}_0 は直和空間 $\sum_{g \in G} u(g)\xi$ と表わされる。

よつて、 \mathcal{H}_0 から $\ell^2(\mathcal{H}_0, G)$ への写像 ω を

$$\omega\left(\sum_{g \in G} u(g) \xi(g)\right) = \sum_{g \in G} \varepsilon(g) \otimes \xi(g), \quad (\xi(g) \in \mathfrak{L}_g)$$

(ただし、 $\varepsilon(g)$ は g の特性函数)

で、定義する。 \mathcal{A} の元 x に対して、 $\sigma(x) = \omega x \omega^*$ とおくと、 σ は \mathcal{A} から $G \otimes \mathcal{M}$ の \mathfrak{A} への同型写像で、

$$\sigma(x) = \pi(x), \quad (x \in \mathcal{M}), \quad \sigma(u(g)) = \lambda(g), \quad (g \in G)$$

を充している。

群 G がコンパクトなとき、(1.1) の \mathcal{A} と $G \otimes \mathcal{M}$ が同型になるための十分条件は [5] で、求められています。

次に G が局所コンパクト可換群とします。 G の共役群 \hat{G} の $L^2(\mathfrak{L}_g, G)$ へのユニタリ表現 μ を

$$\mu(p) \xi(g) = \overline{\langle g, p \rangle} \xi(g), \quad \xi \in L^2(\mathfrak{L}_g, G), \quad g \in G, \quad p \in \hat{G}$$

(ただし、 $\langle g, p \rangle$ は、 p の g での値)

と与えらる。次の二つの関係が成立します。

$$\mu(p) \pi(a) \mu(p)^* = \pi(a), \quad a \in \mathcal{M}, \quad p \in \hat{G},$$

$$\mu(p) \lambda(g) \mu(p)^* = \overline{\langle g, p \rangle} \lambda(g), \quad p \in \hat{G}, \quad g \in G.$$

従って、

$$p(x) = \mu(p) x \mu(p)^*, \quad p \in \hat{G}, \quad x \in G \otimes \mathcal{M},$$

とおいて、 \hat{G} は $G \otimes \mathcal{M}$ の自己同型写像の可換群と見なすことができます。同様にして、 $\mathfrak{A} = (G \otimes \mathcal{M})'$ の自己同型写像の可換群とも考えらることに致します。

(1.2). \mathcal{M} をフォン・ノイマン環, \mathcal{G} を \mathcal{M} の自己同型写像
 の正ユニタリ可換群とし, \mathcal{G} は才 = 可算公理をみたす
 ものとすると, $\pi(\mathcal{M})'$ は $(\mathcal{G} \rtimes \mathcal{M})'$ の $\hat{\mathcal{G}}$ による接合積
 $\hat{\mathcal{G}} \rtimes (\mathcal{G} \rtimes \mathcal{M})'$ と同型である.

(証明) [9] の双対定理により,

$$\pi(\mathcal{M}) = (\mathcal{G} \rtimes \mathcal{M}) \cap \mathcal{M}(\hat{\mathcal{G}})'$$

が成り立つから, $\pi(\mathcal{M})'$ は $(\mathcal{G} \rtimes \mathcal{M})'$ と $\mathcal{M}(\hat{\mathcal{G}})$ によって生成さ
 れている. $d\mathcal{G}$ を, 群 \mathcal{G} の正規化されたハール測度とし,
 $\pi(\mathcal{M})'$ の元 χ に対して,

$$e(\chi) = \int_{\mathcal{G}} \chi(g) \chi(g)^* d\mathcal{G}$$

とおく. e は $\pi(\mathcal{M})'$ から $(\mathcal{G} \rtimes \mathcal{M})'$ の \mathbb{C} への忠実正規正
 期待値と下って, $e(\chi(p)) = 0$ を全 $p \in \hat{\mathcal{G}}$ ($p \neq 1$) に対し
 て, 充す. 従って, (1.1) によって, $\pi(\mathcal{M})'$ は $\hat{\mathcal{G}} \rtimes (\mathcal{G} \rtimes \mathcal{M})'$
 と同型である.

§. 2. 部分群と部分環の対応

\mathcal{M} を II₁-型ファクター, \mathcal{G} を \mathcal{M} の外部自己同型写像の正
 離散群とすると, $\pi(\mathcal{M})$ を含む \mathcal{G} の \mathcal{M} の全 \mathcal{G} のフォン・ノイマン
 部分環 \mathcal{N} と, \mathcal{G} の全 \mathcal{G} の部分群 K とは

$$\mathcal{N} = (\lambda(K) \cup \pi(\mathcal{M}))'', \quad K = \{g \in \mathcal{G}; \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$$

という形で, 1対1に対応する = とが [8] によって, 知ら

れています。

ファクター M が有限であるという条件を除くと、この結果は次のような形になります。

(2.1) M をファクターとし、 G を M への作用が自由な自己同型写像の下で離散な可換群とする。 M を含む G の M のフォン・ノイマン部分環を、 G の M からの忠実な正規な期待値の値域である N と、 G の部分群 K との間に 1 対 1 の対応が付き、部分環 N に対応する群は

$$K(N) = \{ g \in G; \lambda(g) \in N \}$$

となり、部分群 K に対応する部分環は

$$N(K) = (\pi(M) \vee \lambda(K))''$$

となる。

(証明) N を条件を満たす G の M のフォン・ノイマン部分環とする。 e_N, e_M とそれぞれ G の M から $N, \pi(M)$ の上への忠実な正規な期待値とすると、全ての $g, h \in G$ と全ての $a \in \pi(M)$ に対し、

$$\begin{aligned} e_M(e_N(\lambda(g))\lambda(h))a &= e_M(e_N(\lambda(g))h(a)\lambda(h)) \\ &= e_M(e_N(gh(a)\lambda(g))\lambda(h)) = gh(a)e_M(e_N(\lambda(g))\lambda(h)) \end{aligned}$$

が成り立つ。仮定により、 G の元への作用が自由であるから、

$gh \neq 1$ ならば $e_M(e_N(\lambda(g))\lambda(h)) = 0$ である。又、

$gh = 1$ ならば、 M がファクターであることより、 $e_M(e_N(\lambda(g))\lambda(h))$ はスカラーとなるから $e_N(\lambda(g))$ は全ての $g \in G$ に対し、

$\lambda(g)$ のスカラー一倍と可なり。従って $\lambda(g) \in \mathcal{N}$ ならば、
 $e_{\mathcal{N}}(\lambda(g)) = 0$ である。 \mathcal{N} の元は $\sum_{g \in G} \lambda(g) \chi(g)$ と展開される事
より、 $K(\mathcal{N}) = \{g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$ とおくと、 \mathcal{N} は $\lambda(K(\mathcal{N}))$ と
 $\pi(\mathcal{M})$ によって生成されていることがわかる。

逆に、 G の部分群 K に対して、 $\mathcal{N}(K) = (\lambda(K) \cup \pi(\mathcal{M}))'$ とお
く。 $K^0 = \{p \in G; \langle g, p \rangle = 1, \forall g \in K\}$ とおき、 d_p は K^0 の正規
化されたハール測度とする。 G の \mathcal{M} の元 x に対して、

$$e(x) = \int_{K^0} \mu(p) x \mu(p)^* dp$$

とおくと、 e は G の \mathcal{M} から $\mathcal{N}(K)$ の上への忠実正規な期待値とな
る。 $g \in G$ が、 $\lambda(g) \in \mathcal{N}$ を充たすならば、上の部分の証明と同
様にして、 $e_{\mathcal{M}}(\lambda(g) \lambda(k)) = 0$ が全ての $k \neq g$ なる $k \in K$ に対
して成り立ち、更に $g = k$ がある $k \in K$ に対して成り立つ。従
って元の群 K は $K = \{g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N}(K)\}$ を充たしている。

次に群 G がコンパクト可換群のときを考えると、部分群と
部分環の対応は次のようになります。

(2.2) \mathcal{M} をフォン・ノイマン環、 G を \mathcal{M} の自己同型写像の
コンパクト可換群とし、 $\sigma =$ 可算公理をみたすものとする。
もし、 G の \mathcal{M} が、 Γ -群として、 G の作用が G の \mathcal{M} 上で、
自由だとすると、 G の部分群 K と、 G の \mathcal{M} の $\pi(\mathcal{M})$ を含む
フォン・ノイマン部分環 \mathcal{N} で、 \mathcal{N}' が $\pi(\mathcal{M})'$ からの忠実正規な

期待値の値域と対応しているものとの間に、1対1の対応が
つき、部分群 K に対応する部分環は

$$\mathcal{N}(K) = (\pi(\mathcal{M}) \cup \lambda(K))''$$

となり、部分環 \mathcal{N} に対応する部分群は

$$K(\mathcal{N}) = \{g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$$

とつづ。

(証明) \mathcal{N} を条件をみたす G の \mathcal{M} の \mathcal{F} ン・ノイマン部分環
とすると、(1.2) によつて、 \mathcal{N}' は、 \hat{G} の $(G \rtimes \mathcal{M})'$ の $\pi((G \rtimes \mathcal{M})')$ に
含まれる \mathcal{F} ン・ノイマン部分環と同型にうつる。 \mathcal{N}' に対して、
 $F = \{p \in \hat{G}; \mu(p) \in \mathcal{N}'\}$ とおくと、(2.1) によつて、 \mathcal{N}' は
 $\mu(F)$ と $(G \rtimes \mathcal{M})'$ によつて生成される。 \mathcal{N} に対して、
 $K(\mathcal{N}) = \{g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$ とおくと、

$$K(\mathcal{N}) = F^\circ = \{g \in G; \langle g, p \rangle = 1, \forall p \in F\}$$

をみたす。従つて、

$$\mathcal{N}' = (\mu(F) \cup (G \rtimes \mathcal{M})')'' = \lambda(K(\mathcal{N}))' \cap \pi(\mathcal{M})'$$

となり、 $\mathcal{N} = (\lambda(K(\mathcal{N})) \cup \pi(\mathcal{M}))''$ が得られる。

逆に、 K は G の部分群とすると、 $\mathcal{N}(K)$ は $\lambda(K)$ と $\pi(\mathcal{M})$ に
よつて生成された \mathcal{F} ン・ノイマン環とすると、 \hat{G} の元 p に対し
て、 $p \in K^\circ$ であることと、 $\mu(p) \in \mathcal{N}(K)'$ であることとは同値
であり、 $\mu(p) \in \mathcal{N}(K)'$ であることと、 $p \in K(\mathcal{N}(K))^\circ$ であること
とは同値である。従つて、元の群 K は、 $K = \{g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N}(K)\}$

とみたしてゐる。

極く最近、[2]の定理4.1において、 M をファクター、 G を局所コンパクトな可換群としたとき、 $\pi(M)$ を含む G の M のフォン・ノイマン部分環 N で、 $P(N) = N$ を全ての $p \in \hat{G}$ に対してみたすものと、 G の閉部分群 \hat{H} の間に、1対1の対応がたつき、その対応のもとで

$$N(\hat{H}) = G \rtimes M \cap \mu(\hat{H})', \quad \hat{H}(N) = \mu(\hat{G}) \cap N'$$

とたつてゐる事が示されています。

従つて、(2.2)の N に対する条件； $P(N) = N$ ($\forall p \in \hat{G}$) と、(2.2)における N に対する条件； N' は $\pi(M)'$ からの忠実正規期待値の値域である、とは同値な条件であることがわかります。

—— 参考文献 ——

- [1] M. Choda ; Normal expectations and crossed products of von Neumann algebras, proc. Japan Acad., 50 (1974), 738 - 742.
- [2] A. Connes and M. Takesaki ; The flow of weights on factors of type III, preprint.
- [3] H. A. Dye ; On groups of measure preserving

transformations II, Amer. J. Math., 85 (1963),
551 - 576.

- [4] Y. Haga and Z. Takeda ; Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 24 (1972),
781 - 789.
- [5] Y. Haga ; Crossed product of von Neumann algebras by compact groups, preprint.
- [6] R. R. Kalman ; A generalization of free action, Duke Math. J., 36 (1969), 781 - 789.
- [7] M. B. Landstad ; Duality theory for covariant systems, preprint.
- [8] M. Nakamura and Z. Takeda ; On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 489 - 492.
- [9] M. Takesaki ; Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type II, Acta Math., 131 (1973), 249 - 310.
- [10] G. Zeller - Meier ; Produits croisés d'une C^* -algèbre par un groupe d'automorphismes, J. de Math. Pures et Appliquées, 47 (1968), 101 - 239.