

ポアソン積分と微分方程式

日本女大 峰村 勝弘

ここでは, vector bundle におけるポアソン積分について
定義といくつかの性質を述べ, $SL(2, \mathbb{R})$ と $SL(2, \mathbb{C})$ における
計算結果を述べる。

§1. 記号

G を, 連結実半単純, 中心有限なリー群, \mathfrak{g} を G のリー環
 K を G の一つの極大コンパクト部分群, \mathfrak{k} を K のリー環,
 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を \mathfrak{g} の一つのカルタン分解, \mathfrak{a} を \mathfrak{p} における極大可
換部分空間, R を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関するルートの集合, R_+ を (一
つの順序を固定して) 正のルートの集合とする。 R_+ 中の α に対
して, α に対応するルートベクトルの空間を \mathfrak{g}_α と書く。

$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} (\dim \mathfrak{g}_\alpha) \alpha$, $\pi = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\bar{\pi} = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$
とあり, $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \pi, \bar{\pi}$ に対応する G の解析的部分群を
それぞれ K, A, N, \bar{N} と記す。岩沢分解 $G = KAN\bar{N}$ には

よる $g \in G$ の分解を $g = k(g) e^{H(g)} n(g)$ と記す。 $M = Z_H(A)$, $M' = N_K(A)$, $W = M'/M$, $P = MAN$ とおく。 K の既約表現 (の同値類) 全体を \hat{K} で表わす。

$(\tau, V) \in \hat{K}$ に対し τ の M の制限を τ_M と書く。 $\tau \in \hat{K}$ と $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ に対し τ (= associate L に G/K 上の vector bundle を E_τ , $P \ni man \mapsto e^{(\lambda+P)H(a)} \tau_M(m) \in GL(V)$ に associate L に G/P 上の vector bundle を F_{λ, τ_M} , τ_M (= associate L に K/M 上の vector bundle を F_{τ_M} と記す。

vector bundles $E_\tau, F_{\lambda, \tau_M}, F_{\tau_M}$ (=値を取る hyperfunction の (global) section の全体をそれぞれ $B_\tau(G/K), B_{\lambda, \tau_M}(G/P), B_{\tau_M}(K/M)$ と書けば "自然存同一視"):

$$B_\tau(G/K) = \{ f \in B(G) \otimes V \mid f(gk) = \tau(k^{-1}) f(g), g \in G, k \in K \}$$

$$B_{\lambda, \tau_M}(G/P) = \{ \psi \in B(G) \otimes V \mid \psi(gman) = e^{-(\lambda+P)H(a)} \tau_M(m^{-1}) \psi(g) \\ g \in G, m \in M, a \in A, n \in N \}$$

$$B_{\tau_M}(K/M) = \{ \varphi \in B(K) \otimes V \mid \varphi(km) = \tau(m^{-1}) \varphi(k), k \in K, m \in M \}$$

と存在。制限はつぎ自然に $B_{\lambda, \tau_M}(G/P) \cong B_{\tau_M}(K/M)$ 。

$G \ni g$ と $B(G) \otimes V \ni f$ に対し

$$(\pi(g)f)(g_0) = f(g^{-1}g_0) \quad (g_0 \in G)$$

と定めれば、 $\pi(g)$ は $B_\tau(G/K), B_{\lambda, \tau_M}(G/P)$ を不変にする。 $\pi(g)$ の $B_\tau(G/K), B_{\lambda, \tau_M}(G/P)$ の制限をそれぞれ

$\pi_\tau(g)$, $\pi_{\lambda, \tau_M}(g)$ と書く。 π_τ , π_{λ, τ_M} によりそれぞれ $\beta_\tau(G/K)$, $\beta_{\lambda, \tau_M}(G/P)$ は G -module と存する。

$\beta_{\lambda, \tau_M}(G/P) \cong \beta_{\tau_M}(K/M)$ により, $\beta_{\tau_M}(K/M)$ を G -module と考へよう。 $g \in G$ の作用を同じく $\pi_{\lambda, \tau_M}(g)$ と書く。
 $\tau \in \beta_{\tau_M}(K/M)$ に対し

$$(\pi_{\lambda, \tau_M}(g)\tau)(k) = e^{-\lambda(H(g^{-1}k))} \tau(k(g^{-1}k))$$

と存する。

§ 2. ホアソノ積 (詳しくは [2], [3] 参照)

Def. $\beta_{\lambda, \tau_M}(G/P) \ni \psi$ に対し ψ のホアソノ積

$\mathcal{P}_{\lambda, \tau}(\psi) \in \beta_\tau(G/K)$ を

$$\mathcal{P}_{\lambda, \tau}(\psi)(g) = \int_K \tau(k) \psi(gk) dk$$

で定める。但し, dk は K 上の (normalized) Haar measure

明らかり $\mathcal{P}_{\lambda, \tau}$ は $\beta_{\lambda, \tau_M}(G/P)$ から $\beta_\tau(G/K)$ への G -hom. である。

$\beta_{\lambda, \tau_M}(G/P) \cong \beta_{\tau_M}(K/M)$ により $\mathcal{P}_{\lambda, \tau} \in \beta_{\tau_M}(K/M)$ から $\beta_\tau(G/K)$ への map と考へる。

Lem. $\beta_{\tau_M}(K/M) \ni \varphi$ に対し, φ のホアソノ積

$\mathcal{P}_{\lambda, \tau}(\varphi) \in \beta_\tau(G/K)$ は

$$P_{\lambda, \tau}(\varphi)(g) = \int_K e^{(\lambda - \rho)(H(g^{-1}k))} \tau(K(g^{-1}k)) \varphi(k) dk$$

と与えられる。

$P_{\lambda, \tau}(g, k) = e^{(\lambda - \rho)(H(g^{-1}k))} \tau(K(g^{-1}k))$ とおき, $P_{\lambda, \tau} \in$ (一般化された) ホアソニ核と呼ぶ。

§3. ホアソニ核の満たす微分方程式

$(\tau_1, V_1), (\tau_2, V_2) \in \hat{K}$ とし, vector bundle E_{τ_1} の S vector bundle E_{τ_2} への G -invariant な微分作用素の全体を $\text{Diff.}(E_{\tau_1}, E_{\tau_2})$ と書く。複素1-環 \mathbb{C} に対してその展開環を $\mathbb{C}\langle t \rangle$ と書く。 $\mathcal{G} = \mathbb{C}\langle t \rangle \otimes \mathfrak{g}$, $\mathcal{K} = \mathbb{C}\langle t \rangle \otimes \mathfrak{k}$, $\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle t \rangle \otimes \mathfrak{a}$, $\mathcal{G}^{\mathcal{K}} = \{u \in \mathcal{G} \mid [u, \mathfrak{K}] = 0\}$ とおく。 $(\tau, V) \in \hat{K}$ に対してその反復表現を (τ^*, V^*) と書く。又 τ の微分表現を $d\tau$ で表わし \mathcal{K} の表現に拡張しておく。

$(\tau_1, V_1), (\tau_2, V_2) \in \hat{K}$ に対して

$$\begin{aligned} & (V_1^* \otimes V_2 \otimes \mathcal{G})^{\mathcal{K}} \\ &= \{z \in V_1^* \otimes V_2 \otimes \mathcal{G} \mid \tau_1^*(k) \otimes \tau_2(k) \otimes \text{Ad}(k)z = z, \forall k \in K\} \end{aligned}$$

とおく。このとき自然な写像 ν_{τ_1, τ_2} :

$$\nu_{\tau_1, \tau_2} : (V_1^* \otimes V_2 \otimes \mathcal{G})^{\mathcal{K}} \longrightarrow \text{Diff.}(E_{\tau_1}, E_{\tau_2})$$

は、 K が compact であることにより onto となる。([4] 第 5 章第 4 節参照) $\iota \subset (\tau_1, V_1) = (\tau_2, V_2) = (\tau, V)$ のとき $Q^k \ni u \mapsto \text{id} \otimes u \in (V^* \otimes V \otimes Q)^k$ という写像により

$$Q^k \hookrightarrow (V^* \otimes V \otimes Q)^k \longrightarrow \text{Diff}(E_\tau)$$

すなわち、 $u \in Q$ に対して $u - u' \in \pi_c Q$ と存在する $u' \in \mathcal{A}$ が unique に定まるが、自然同型 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ により $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ の元とみなして u' を $\omega(u)$ と書く。 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ は自然に algebra となる。 ω を Q^k に制限したとき Q^k から $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^m$ ($\mathcal{A}^m = \{u \in \mathcal{A} \mid [u, m] = 0, m \text{ は } M \text{ の } 1\text{-元環}\}$) への anti-aly. iso である。([1] Prop. 9.2.3, Prop. 9.2.8)。

$G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ から導かれる Q の anti-ante. を $*$ と表わす。

Lem. $\pi = (* \otimes *) \circ \omega : Q^k \xrightarrow{\omega} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^m \xrightarrow{* \otimes *} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^m$ とおけば、 π は Q^k から $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^m$ への algy. iso である。

$\lambda \in \mathcal{A}_c^*$, $(\tau, V) \in \hat{K}$ に対して $\chi_{\lambda, d\tau} \in \text{Hom}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \text{End}(V))$ を、 $\chi_{\lambda, d\tau}(H \otimes Y) = \lambda(H) d\tau(Y)$ ($H \in \mathcal{A}_c, Y \in \mathcal{K}_c$) と定める。

Lem. $f(g) = e^{\lambda(H(g^{-1}))} \tau(K(g^{-1}))$ とおくと $f \in \beta_\tau(\mathbb{C}/K)$ であり、 $u \in Q^k$ に対して $uf = f \circ \chi_{\lambda, d\tau}(\pi(u))$ を満たす。

Cor $G^k \ni u = \lambda + i\tau + i^2$

$$u P_{\lambda, \tau}(g, k) = P_{\lambda, \tau}(g, k) \circ \chi_{\lambda - \rho, d\tau}(\pi(u))$$

§4. $SL(2, \mathbb{R})$

$$G = KAN$$

$$K = SO(2) = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R_+ = \{ \alpha \} \quad \text{且 } \alpha: H = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \mapsto 2$$

$$\text{且 } \rho = \frac{1}{2} \alpha: H \mapsto 1$$

$$\hat{K} = \{ \tau_m \mid \tau_m(k_\theta) = e^{im\theta} \}$$

\mathcal{O}_C^* を $\mathbb{C} \ni s \mapsto sp \in \mathcal{O}_C^*$ として、 \mathbb{C} を同一視する。 τ_m は associate (to vector (実数 line) bundle) to E_m と書く。以下同様にして $P_{s,m}, F_m, F_{s,m}$ 等と書く。

$$\bar{N}A \cong G/K \cong H_+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0 \}$$

$$\bar{n}a \leftrightarrow \bar{g}k \leftrightarrow \bar{g}(0) \quad \text{且 } g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

したがって $B_m(G/K)$ を $B(H_+)$ と同一視する。

$X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。 Ω は Casimir element
とあり、

$$\Omega = \frac{1}{4}(X_\alpha X_{-\alpha} + X_{-\alpha} X_\alpha + \frac{1}{2} H^2)$$

$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし、 $k_0 = e^{tY}$ の $d\tau_m(Y) = im$.

これより $\omega = 2\Omega$ とし、 $V(\omega) \in \mathcal{D}_m(\mathfrak{H}(E_m))$ と調べる。

$$\omega = \frac{1}{4} H^2 + \frac{1}{2} H + X_\alpha^2 - X_\alpha Y$$

より $V(\omega) = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + imy \frac{\partial}{\partial x}$ $x+iy \in \mathfrak{H}_+$

を得る。

次に $\chi_s, d\tau_m(\pi(\omega))$ と調べる。容易に

$$\omega = \frac{1}{4} H^2 - \frac{1}{2} H + X_\alpha^2 + X_\alpha Y \equiv \frac{1}{4} H^2 - \frac{1}{2} H \pmod{\pi_c \mathfrak{g}}$$

を得る。従って $\pi(\omega) = \frac{1}{4} H^2 + \frac{1}{2} H$ とあり、

$$\chi_s, d\tau_m(\pi(\omega)) = \frac{1}{4}(s-1)^2 + \frac{1}{2}(s-1) = \frac{s+1}{2} \frac{s-1}{2}$$

従ってホップソング核 $P_{s,m}$ は微分方程式

$$\left\{ y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + imy \frac{\partial}{\partial x} - \frac{s+1}{2} \frac{s-1}{2} \right\} P_{s,m} = 0$$

を満たす。

ホップソング核の explicit 形式は、次の通り。 $\bar{N} \rightarrow \bar{\pi}$ に対して

$\kappa(\bar{\pi})$ を行なうと、 $P_{s,m}(g, \bar{\pi})$ と書く。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \in \bar{N}A \quad \text{と} \quad z = x+iy$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ を } \xi \in \frac{1}{\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \text{ と}$$

$$P_{S,m}(z, \bar{z}) = i^m \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^{\frac{-s+1}{2}} (z - \bar{z})^{\frac{s-1}{2} + \frac{m}{2}} (\bar{z} - z)^{\frac{s-1}{2} - \frac{m}{2}}$$

Rem τ_m の表現空間を $V_m (\cong \mathbb{C})$ と書く。 $\alpha \in \mathfrak{g}$

$$D_+ = iX_{-\alpha} + \frac{1}{2}H - \frac{i}{2}Y \in (V_m^* \otimes V_{m+2} \otimes \mathfrak{g})^K$$

$$D_- = iX_{-\alpha} - \frac{1}{2}H - \frac{i}{2}Y \in (V_m^* \otimes V_{m-2} \otimes \mathfrak{g})^K$$

$H_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ の座標で書く。

$$V_{m,m+2}(D_+) = (z - \bar{z})D_{\bar{z}} - \frac{m}{2} \quad D_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$V_{m,m-2}(D_-) = (z - \bar{z})D_z - \frac{m}{2} \quad D_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

容易に

$$\left\{ (z - \bar{z})D_{\bar{z}} - \frac{m}{2} \right\} P_{S,m} = \left(-\frac{s-1}{2} + \frac{m}{2} \right) P_{S,m+2}$$

$$\left\{ (z - \bar{z})D_z - \frac{m}{2} \right\} P_{S,m} = \left(\frac{s-1}{2} + \frac{m}{2} \right) P_{S,m-2}$$

からわかる。 $\xi \in \mathbb{R}, z = a + i\epsilon$ と

$$\left\{ y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + imy \frac{\partial}{\partial x} - \frac{s+1}{2} \frac{s-1}{2} \right\} P_{S,m} = 0$$

から導かれる。

§5. $SL(2, \mathbb{C})$

$$G = SU(2) \times A \times N = \bar{N} \times A \times SU(2) \quad K = SU(2)$$

組。

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-t} & \\ & e^t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$

$\tau \in \hat{K}$ を $\tau(k) = k$ $k \in K$ と定む。 G/K の座標を

$$g = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix} \longleftrightarrow gK \in G/K$$

τ の λ は $\lambda = a + b\tau$

$$P_{s, \tau}(g, e) = \left(\frac{t}{z\bar{z} + t^2} \right)^{-s+1} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{z\bar{z} + t^2}} & \frac{-z}{\sqrt{z\bar{z} + t^2}} \\ \frac{\bar{z}}{\sqrt{z\bar{z} + t^2}} & \frac{t}{\sqrt{z\bar{z} + t^2}} \end{pmatrix}$$

Ω は Casimir element とする。 $\omega = 4\Omega$ とおく。

$$\chi(\omega) = t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4t^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - t \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2t \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ -2t \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \chi_{s, \tau}(\pi(\omega)) = (s+1)(s-1) + \frac{1}{4}$$

従ってポアソン核は次の微分方程式を満たす。

$$\left[t^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right) - t \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & 2t \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ -2t \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} - (s+1)(s-1) \right] P_{s, \tau} = 0$$

Rem 上の τ の場合 $\chi_{\lambda, \tau}(\pi(\omega))$ は scalar operator となる。これは τ の効用による。一般的に $u \in \mathfrak{g}^K$ に対して $\chi_{\lambda, \tau}(\pi(u))$ は semisimple となる条件等を調べることは重要である。

References

- [1] Dixmier, J., *Algèbres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974.
- [2] Kashiwara, M., A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, *Eigenfunctions of Invariant Differential Operators on a Symmetric Space*, to appear.
- [3] Okamoto, K., *Harmonic analysis on homogeneous vector bundles*, *Lecture notes in Math.*, Springer-Verlag, 266 (1972), 387-436.
- [4] Wallach, N. R., *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Dekker, 1973.