数理解析研究所講究録
第280巻 1976年 31-49

Amenable位相群の表現について

鹿児島大学教養部　酒井幸吉

Amenable局所コンパクト群Gはその多くの性質によって，そうでない群と区別される．このことはG上にHaar測度が存在することと，不変平均が存在することの重ね合せの結果として理解できる（F. P. Greenleaf [5], H. Reiter [9, ch. 8]）．一般に位相群G上に不変平均の存在だけを仮定した場合はどうであろうか．たとえば次の結果は不変平均を用いて示される典型的なものである（J. Dixmier [3], M. M. Day [2], M. Nakamura and Z. Takeda [7]）："amenable群GのHilbert空間$\mathfrak{H}$上への一様有界かつ強連続な表現$T: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$はunitary表現に相似になる．すなわちinvertible, selfadjoint, positiveな$B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$が存在して$U_g \equiv BT_gB^{-1}$ $(\forall g \in G)$はunitaryになる．"

この報告では，amenable群G上のベクトル値及び線形作用値関数の不変平均に関する積分を考え，Gの線形表現のいくつか特徴的な性質についてのべる．以下Gは常に位相群を表

わし，文中で扱う位相線形空間はHausdorff的であり，その係数体は実又は複素数体であるとする．

§1　Amenable群

$B(G)$ [$CB(G)$] は G 上の複素数値有界［かつ連続］な関数全体のつくる（Supノルムに関する）Banach空間とする．$\mathfrak{A}$ は $B(G)$ の閉線形部分空間で次の(1.1)～(1.3)をみたすものとする：

(1.1)　定数値関数 $I_G(g)=1$ $(g\in G)$ は $\mathfrak{A}$ に属する，

(1.2)　$f\in\mathfrak{A}\Rightarrow\bar{f}\in\mathfrak{A}$，ただし $\bar{f}(g)=f(g)$ の共役複素数 $(g\in G)$，

(1.3)　$f\in\mathfrak{A},\ s\in G\Rightarrow {}_sf,\ f_s\in\mathfrak{A}$，ただし ${}_sf(g)=f(sg)$，$f_s(g)=f(gs)$ $(g\in G)$ とする．

たとえば $CB(G)$ は(1.1)～(1.3)をみたしている．いま $\varphi\in\mathfrak{A}^*$ が次の(1.4)(1.5)をみたすとき，φ は<u>$\mathfrak{A}$上の平均</u>という：

(1.4)　$\varphi\geqq 0$，

(1.5)　$\|\varphi\|=\varphi(I_G)=1$．

平均 φ は次の性質をもつことが上の(1.4)，(1.5)より導かれる：

(1.6)　$\varphi(\bar{f})=\overline{\varphi(f)}$　$(\forall f\in\mathfrak{A})$

(1.7)　$\inf\{f(g);g\in G\}\leqq\varphi(f)\leqq\sup\{f(g);g\in G\}$　（$\forall$ 実数値関数 $f\in\mathfrak{A}$）．

いま $s_1,s_2,\cdots,s_n\in G$ 及び $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$，$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ を与えて，$\varphi=\sum_{i=1}^n\lambda_i\delta_{s_i}$ i.e., $\varphi(f)=\sum_{i=1}^n\lambda_i f(s_i)$ $(f\in\mathfrak{A})$ によって定まる平均を<u>$\mathfrak{A}$上の有限平均</u>という．$\mathfrak{A}$上の平均及び有限平

均の全体をそれぞれ $M(\mathfrak{A})$, $M_f(\mathfrak{A})$ とかくことにする．$\forall s\in G$ 及び $\forall\varphi\in\mathfrak{A}^*$ に対して，$s\varphi$, $\varphi s\in\mathfrak{A}^*$ を $s\varphi(f)=\varphi({}_sf)$, $\varphi s(f)=\varphi(f_s)$ ($\forall f\in\mathfrak{A}$) によって定義する．いま

$$\mathrm{LIM}(\mathfrak{A})=\{\varphi\in M(\mathfrak{A});\ s\varphi=\varphi\ (\forall s\in G)\},$$

$$\mathrm{RIM}(\mathfrak{A})=\{\varphi\in M(\mathfrak{A});\ \varphi s=\varphi\ (\forall s\in G)\}$$

とおき，$\mathrm{LIM}(\mathfrak{A})$ [$\mathrm{RIM}(\mathfrak{A})$] の元を $\mathfrak{A}$ 上の左[右]不変平均，特に $\mathrm{LIM}(\mathfrak{A})\cap\mathrm{RIM}(\mathfrak{A})$ の元を $\mathfrak{A}$ 上の両不変平均という．

<u>定義 1</u>　$\mathrm{LIM}(\mathfrak{A})\neq\phi$ [$\mathrm{RIM}(\mathfrak{A})\neq\phi$] のとき，$\mathfrak{A}$ は left [right] amenable であるといい，更に $\mathrm{LIM}(\mathfrak{A})\neq\phi$ かつ $\mathrm{RIM}(\mathfrak{A})\neq\phi$ のとき $\mathfrak{A}$ は amenable であるという．特に $CB(G)$ が amenable のとき，位相群 G は amenable ((A)群と略記) であるという．

<u>注意</u>．(1) $\mathfrak{A}$ が次の (1.8) をみたすとする：

(1.8)　$f\in\mathfrak{A}\Rightarrow\check{f}\in\mathfrak{A}$．ただし $\check{f}(g)=f(g^{-1})$ ($g\in G$)．

このとき，$\mathrm{LIM}(\mathfrak{A})\neq\phi\Leftrightarrow\mathrm{RIM}(\mathfrak{A})\neq\phi$ であるから，$\mathfrak{A}$ が left 又は right amenable ならば，自動的に $\mathfrak{A}$ は amenable になる．$CB(G)$ は (1.8) をみたすから，$\mathrm{LIM}(CB(G))\neq\phi$ 又は $\mathrm{RIM}(CB(G))\neq\phi$ ならば，G は amenable になる．

(2)　$CB(G)$ の代りに $B(G)$ が amenable であるとき，G は amenable であると呼ばれることもある．このときは amenable 群のクラスはやや せまくなり，位相群であることの意味から

すらぐことになる．従ってこの報告では定義1のように amenable 群を定めることにする． ∎

<u>(A)群の例</u>　(1) コンパクト群，可解群は(A)群である．特に可換群は(A)群である．

(2) G は局所コンパクトで，G_0 は G の単位元の連結成分，N は G_0 の最大連結可解正規部分群（G_0 の根基）とする．いま G/G_0 はコンパクトであるとする．このとき G が(A)群であるための必要十分条件は G/N がコンパクトになることである（N. W. Rickert [10]）．従って，連結半単純群（i.e. $N=\{$単位元$\}$）が amenable になるのはコンパクトのときにかぎる．

§2 ベクトル値及び線形作用素値関数の平均に関する積分

$\mathcal{V}$ は局所凸位相線形空間（LCTV空間と略記）とする．$A\subset\mathcal{V}$ の convex hull 及びその closure を $Co(A)$ 及 $\overline{Co}(A)$ とかくことにする．写像 $f: G\ni g\mapsto f(g)\in\mathcal{V}$ で次の (2.1)(2.2) をみたすものの全体を $C(G,\mathcal{V})$ と表わす：

(2.1)　$C(f)\equiv\overline{Co}(f(g);g\in G)$ は弱コンパクト，

(2.2)　$\forall z\in\mathcal{V}^*$ に対して，G 上の関数 $\langle f(g),z\rangle$ は連続．

また $M(CB(G))$, $M_f(CB(G))$ を簡単のためそれぞれ $M(G)$, $M_f(G)$ とかくことにする．

<u>補題1</u>　$f\in C(G,\mathcal{V})$ とする．$\forall\varphi\in M(G)$ に対して，$\varphi(f)\in C(f)$ で (2.3) をみたすものが一意的に存在する．

(2.3) $\langle \varphi(f), z \rangle = \varphi(\langle f(g), z \rangle)$ $(\forall z \in V^*)$.

この <u>$\varphi(f)$ を f の φ に関する積分</u>という.

<u>証明</u> $\varphi(f)$ の一意性は (2.3) より明らかだから, その存在をいえばよい. まず $\varphi \in M_f(G)$ で $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{s_i}$ ($\lambda_i > 0$, $s_i \in G$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ で $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$) とする. $\forall z \in V^*$ に対して

$$\varphi(\langle f(g), z \rangle) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle f(s_i), z \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i f(s_i), z \rangle$$

であるから $\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(s_i) \in C(f)$ とすればよい. 次に $\varphi \in M(G)$ とする. $M_f(G)$ は $M(G)$ の中で w^*-dense だから $\varphi = w^*\text{-}\lim_\alpha \varphi_\alpha$ なるネット $\{\varphi_\alpha\} \subset M_f(G)$ が存在する. 上でみたことより, 各 φ_α に対して (2.3) をみたす $\varphi_\alpha(f) \in C(f)$ が対応する. いま $C(f)$ は弱コンパクトだから $\{\varphi_\alpha(f)\}$ の部分ネット $\{\varphi_\beta(f)\}$ である点 $f_0 \in C(f)$ に弱収束するものがある. このとき, $\forall z \in V^*$ に対して

$$\begin{aligned}\langle f_0, z \rangle &= \lim_\beta \langle \varphi_\beta(f), z \rangle = \lim_\beta \varphi_\beta(\langle f(g), z \rangle) \\ &= \lim_\alpha \varphi_\alpha(\langle f(g), z \rangle) = \varphi(\langle f(g), z \rangle).\end{aligned}$$

従って $\varphi(f) = f_0$ とすればよく, $\varphi(f) = w\text{-}\lim_\alpha \varphi_\alpha(f)$ である. QED.

V_1, V_2 は LCTV 空間とし, V_1 から V_2 への連続線形写像の全体を $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ とする. $A \subset \mathcal{L}(V_1, V_2)$ に対して $Co(A)$ の weak operator 位相に関する closure を wop-$\overline{Co}(A)$ とかく. 写像 $T: G \ni g \to T_g \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ は弱連続 i.e.,

(2.4) $\forall v \in V_1, \forall z \in V_2^*$ に対して, $G \ni g \mapsto \langle T_g v, z \rangle$ は連続,

であり, 更に weakly almost periodic (wap と略記) i.e., (2.5) $\forall v \in \mathcal{V}_1$ に対して $\overline{Co}(T_g v; g \in G)$ は弱コンパクト，

であるとする．このとき，$\forall v \in \mathcal{V}_1$ に対して写像 $G \ni g \mapsto T_g v \in \mathcal{V}_2$ は $C(G, \mathcal{V}_2)$ に属するから，これに補題1を適用すると次の補題が従う．

<u>補題2</u>　写像 $T: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ は弱連続かつ wap であるとする．$\forall \varphi \in M(G)$ に対して，$\mathcal{V}_1$ から $\mathcal{V}_2$ への線形写像 $\varphi(T)$ 及びネット $\{T_\alpha\} \subset Co(T_g; g \in G)$ が存在し次の (2.6), (2.7) が成立する：

$$(2.6) \quad \langle \varphi(T)v, z \rangle = \varphi(\langle T_g v, z \rangle) \quad (\forall v \in \mathcal{V}_1, \forall z \in \mathcal{V}_2^*),$$

$$(2.7) \quad \varphi(T)v = w\text{-}\lim_\alpha T_\alpha v \in \overline{Co}(T_g v; g \in G) \quad (\forall v \in \mathcal{V}_1).$$

この<u>$\varphi(T)$ は一意的であり，T の φ に関する積分</u>という．

<u>補題3</u>　写像 $T: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ は弱連続，wap かつ $\{T_g; g \in G\}$ は同等連続であるとする．このとき $\varphi \in M(G)$ に関する T の積分 $\varphi(T)$ は連続写像になり wop-$\overline{Co}(T_g; g \in G)$ に属する．

<u>証明</u>　$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ はそれぞれ $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ の原点における基本凸近傍系とする．$\forall U_2 \in \mathcal{N}_2$ に対して，$W_2 \in \mathcal{N}_2$ 及び $U_1 \in \mathcal{N}_1$ を $W_2 + W_2 \subseteq U_2$, $T_g(U_1) \subseteq W_2$ $(\forall g \in G)$ なるようにえらぶことができる．このとき $T_0(U_1) \subseteq W_2$ $(\forall T_0 \in Co(T_g; g \in G))$ になる．$v \in U_1$ とすると，$\varphi(T)v \in \overline{Co}(T_g v; g \in G)$ だから，$T_0 \in Co(T_g; g \in G)$ で $\varphi(T)v - T_0 v \in W_2$ なるものが存在する．従って，

$$\varphi(T)v = (\varphi(T)v - T_0 v) + T_0 v \in W_2 + W_2 \subseteq U_2$$

故に $\varphi(T)(\Pi_1)\subseteq \Pi_2$ となり，(2.7) より $\varphi(T)\in$ wop-$\overline{C_0}(T_g; g\in G)$. QED.

いま写像 $T: G\ni g\mapsto T_g\in\mathcal{L}(V_1, V_2)$ が<u>一様有界</u>であるとは，V_1, V_2 が Banach 空間であり，$\sup\{\|T_g\|; g\in G\}<\infty$ のときをいう．このとき $\{T_g: g\in G\}$ は同等連続だから補題2, 3 より次の補題をえる．

<u>補題4</u>　写像 $T: G\ni g\mapsto T_g\in\mathcal{L}(V_1, V_2)$ は弱連続，wap かつ一様有界であるか，V_1, V_2 が Hilbert 空間で T は弱連続かつ一様有界であるとする．このとき $\varphi\in M(G)$ に関する T の積分 $\varphi(T)$ は wop-$\overline{C_0}(T_g; g\in G)$ に属し，$\|\varphi(T)\|\leqq\sup\{\|T_g\|; g\in G\}$ をみたす．

<u>補題5</u>　写像 $T: G\ni g\mapsto T_g\in\mathcal{L}(V_1, V_2)$ は弱連続かつ一様有界であるとする．このとき $\forall\varphi\in M(G)$ に対して，$\varphi(T^*)\in\mathcal{L}(V_2^*, V_1^*)$ で次の (2.8), (2.9) をみたすものが一意的に存在する：

(2.8)　$\langle v, \varphi(T^*)z\rangle=\varphi(\langle T_g v, z\rangle)$　$(\forall v\in V_1, \forall z\in V_2^*)$,

(2.9)　$\|\varphi(T^*)\|\leqq\sup\{\|T_g\|; g\in G\}$.

<u>証明</u>　$\forall z\in V_2^*$ に対して，w^*-$\overline{C_0}(T_g^*z; g\in G)\subset V_1^*$ は w^*-コンパクトだから，写像 $G\ni g\mapsto T_g^*z\in V_1^*$ に補題1を適用すると，(2.8) をみたす $\varphi(T^*)\in\mathcal{L}(V_2^*, V_1^*)$ が一意的に定まる．更に (2.8), (1.5) より $\varphi(T^*)$ は (2.9) をみたしている．　QED.

以下 CB(G) 上の左又は右不変平均に関する G 上のベクトル値又は線形作用素値関数の積分を考えることによって導かれるいくつかの結果をのべる．

§3 Amenable群のCohomology

$\mathbb{V}$はLCTV空間とする．Gの$\mathbb{V}$上への表現$T: G \ni g \to T_g \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) = \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$は弱連続かつwapであるとする．$Z(G, T, \mathbb{V})$は$f \in C(G, \mathbb{V})$（(2.1), (2.2)参照）で

$$(3.1) \qquad f(sg) = T_s f(g) + f(s) \quad (\forall s, g \in G)$$

をみたすものの全体とする．$v \in \mathbb{V}$に対して$\partial v \in C(G, \mathbb{V})$を$\partial v(g) = T_g v - v$ $(g \in G)$によって定めると，$\partial v \in Z(G, T, \mathbb{V})$になり，写像$\partial: \mathbb{V} \ni v \to \partial v \in Z(G, T, \mathbb{V})$が定義される．

<u>定理1</u>　(A)群Gの表現$T: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$は弱連続かつwapであるとする．このとき$\forall f \in Z(G, T, \mathbb{V})$に対して，$v \in C(f) = \overline{Co}(f(g); g \in G)$が存在して$f = -\partial v$になる．従って写像$\partial: \mathbb{V} \to Z'(G, T, \mathbb{V})$はsurjectiveである．

<u>証明</u>　$\varphi \in LIM(CB(G))$とする．$f \in Z(G, T, \mathbb{V})$とし，$f$の$\varphi$に関する積分を$v \in C(f)$とすると，$\forall s \in G, \forall z \in \mathbb{V}^*$に対して，(2.3), (3.1), (1.5)及びφの左不変性より

$$\begin{aligned}\langle -\partial v(s), z \rangle &= \langle v - T_s v, z \rangle = \langle v, z - T_s^* z \rangle \\ &= \varphi_g(\langle f(g), z - T_s^* z \rangle) = \varphi_g(\langle f(g) - T_s f(g), z \rangle) \\ &= \varphi_g(\langle f(g) - f(sg) + f(s), z \rangle) = \langle f(s), z \rangle .\end{aligned}$$

よって$f = -\partial v$である．　　QED.

<u>注意</u>　A. Guichardet [6]はコンパクト群のunitary表現に対して定理1が成立することを示し，更に(A)群のunitary表現に

ついても同様であることを注意している．一方任意の位相群 G に対して，その弱連続，wap かつ同等連続な表現 $T: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(V)$ に対応する写像 $\partial: V \ni v \to \partial v \in Z(G,T,V)$ は surjective になる（酒井［12］）．これは G 上の弱概周期関数の全体 $WAP(G)$ が amenable であること（R. B. Burckel［1］）及び，$\forall z \in V^*$, $\forall f \in Z(G,T,V)$ に対して，$\langle f(g), z \rangle \in WAP(G)$ になることからえられる． ∎

G の表現 $T: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(V)$ は wap かつ次の (3.2) をみたすとする：

(3.2)　$G \times V \ni (g,v) \mapsto T_g v \in V$ は連続．

このとき Cochain 複体 $\{C^n(G,T,V), \partial^n\}_{n=0,1,\ldots}$ を次のように定める：$C^0(G,T,V) = V$ とし，$n \geq 1$ のとき $C^n(G,T,V)$ は写像 $f: G^n = \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n\text{個}} \to V$ で次の (3.3), (3.4) をみたすものの全体のつくる線形空間とする．

(3.3)　$\overline{Co}(T_g f(g_1,\cdots,g_n);\ g, g_1,\cdots,g_n \in G)$ は弱コンパクト，

(3.4)　$\forall \varepsilon > 0$, $\forall z \in V^*$, $1 \leq {}^\forall k \leq n$ 及び $g_1,\cdots,g_{k-1} \in G$ に対して，G の単位元の近傍 W が存在して

$$\sup_{s \in W,\ h_k,\cdots,h_n \in G} |\langle f(g_1,\cdots,g_{k-1}, sh_k, h_{k+1},\cdots,h_n), z \rangle - \langle f(g_1,\cdots,g_{k-1}, h_k,\cdots,h_n), z \rangle| < \varepsilon$$

となる．

一方線形写像 $\partial^n: C^n(G,T,V) \ni f \mapsto \partial^n f \in C^{n+1}(G,T,V)$ は

(3.5)　$\partial^n f(g_1,\cdots,g_{n+1}) = T_{g_1} f(g_2,\cdots,g_{n+1}) +$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}f(g_1,\cdots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\cdots,g_{n+1})+(-1)^{n+1}f(g_1,\cdots,g_n)$$

によって定める．Tがwapかつ(3.2)をみたすことより $\partial^n f \in C^{n+1}(G,T,V)$ であることがわかる．また代数的計算によって $\partial^{n+1}\cdot\partial^n=0$ $(n\geq 0)$ が之られる．従って

$$Z^n(G,T,V)=\mathrm{Ker}\,\partial^n,\quad B^n(G,T,V)=\mathrm{Im}\,\partial^{n-1}\quad(n\geq 1)$$

とおくと，$B^n(G,T,V)\subseteq Z^n(G,T,V)$ であり，$H^n(G,T,V)\equiv Z^n(G,T,V)/B^n(G,T,V)$ $(n\geq 1)$ とおく．

<u>定理2</u>　(A)群Gのwapかつ(3.2)をみたす表現 $T: G\ni g\mapsto T_g\in\mathcal{L}(V)$ に対して，$H^n(G,T,V)=\{0\}$ $(n\geq 1)$ である．

<u>証明</u>　$\varphi\in LIM(CB(G))$，$f\in Z^n(G,T,V)$ とする．$g_1,\cdots,g_{n-1}\in G$ に対して，$\tilde{f}(g_1,\cdots,g_{n-1})\in V$ は $f(g_1,\cdots,g_{n-1},h)$ を $h\in G$ の関数とみなしての φ に関する積分値とする．このとき $\tilde{f}\in C^{n-1}(G,T,V)$ であることは容易に検証できる．(3.5)，$\partial^n f=0$ 及び φ の左不変性に注意して $\partial^{n-1}\tilde{f}$ を計算すると，$\forall z\in V^*$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \partial^{n-1}\tilde{f}(g_1,\cdots,g_n),z\rangle &= \varphi_h(\langle T_{g_1}f(g_2,\cdots,g_n,h),z\rangle)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\varphi_h(\langle f(g_1,\cdots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\cdots,g_n,h),z\rangle)\\
&+(-1)^n\varphi_h(\langle f(g_1,\cdots,g_{n-1},h),z\rangle)\\
&=(-1)^{n+1}\varphi_h(\langle f(g_1,\cdots,g_{n-1},g_nh),z\rangle)+(-1)^n\varphi_h(\langle f(g_1,\cdots,g_{n-1},g_n),z\rangle)\\
&\quad+(-1)^n\varphi_h(\langle f(g_1,\cdots,g_{n-1},h),z\rangle)\\
&=(-1)^n\langle f(g_1,\cdots,g_n),z\rangle
\end{aligned}$$

$\therefore\ f=(-1)^n\partial^{n-1}\tilde{f}\qquad\therefore\ H^n(G,T,V)=\{0\}.$　　QED.

§4 性質P

Gの Hilbert 空間$\mathfrak{H}_i$上への連続な unitary 表現$T^i: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_i)$ $(i=1,2)$に対して，T^1とT^2に関する intertwining 作用素の全体を$I(T^1,T^2)$とする．すなわち$I(T^1,T^2)=\{B\in\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2);\ BT_g^1=T_g^2B\ (\forall g\in G)\}$とする．また$\mathfrak{H}_1$から$\mathfrak{H}_2$への Hilbert-Schmidt 線形作用素の全体を$HS(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$とし，$A\in HS(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$の Hilbert-Schmidt ノルムを$|||A|||$で表わす．

<u>定理3</u>　$T^i: G\ni g\mapsto T_g^i\in\mathcal{L}(\mathfrak{H}_i)$ $(i=1,2)$は(A)群Gの Hilbert 空間$\mathfrak{H}_i$上への連続な unitary 表現とする．このとき$\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$上の線形写像$P$で次の性質(4.1)～(4.4)をみたすものが存在する：$\forall A\in\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$に対して

(4.1)　$P(A)\in \text{wop-}\overline{\mathrm{Co}}\,(T_g^2AT_{g^{-1}}^1;\ g\in G)$，$\|P(A)\|\le\|A\|$，

(4.2)　$P(A)\in I(T^1,T^2)$，　$P(P(A))=P(A)$，

(4.3)　$P(B_2AB_1)=B_2P(A)B_1$　$(\forall B_i\in I(T^i,T^i)\ (i=1,2))$．

(4.4)　$A\in HS(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)\Rightarrow P(A)\in HS(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$，$|||P(A)|||\le|||A|||$．

<u>証明</u>　$\varphi\in LIM(CB(G))$，$A\in\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$とする．補題4より，写像$G\ni g\mapsto T_g^2AT_{g^{-1}}^1\in\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$の$\varphi$に関する積分を$P(A)$とすると，(4.1)をみたし，次の(4.5)が成立する：

(4.5)　$\langle P(A)v,z\rangle=\varphi(\langle T_g^2AT_{g^{-1}}^1v,z\rangle)$　$(\forall v\in\mathfrak{H}_1,\forall z\in\mathfrak{H}_2)$．

従って$A\to P(A)$は線形であり，これが求めるものである．実際$\forall s\in G$に対して，(4.5)とφの左不変性より

$$\langle T^2_s P(A)v, z\rangle = \langle P(A)v, \quad \rangle = \varphi(\langle T^2_g A T'_{g^{-1}} v, T^2_{s^{-1}} z\rangle)$$
$$= \varphi(\langle T^2_{sg} A T'_{g^{-1}} v, z\rangle)$$
$$= \varphi(\langle T^2_{sg} A T'_{(sg)^{-1}} \cdot T'_s v, z\rangle)$$
$$= \langle P(A) T'_s v, z\rangle \quad (\forall v \in \mathfrak{H}_1, \forall z \in \mathfrak{H}_2).$$

故に $P(A) \in I(T^1, T^2)$ である．$B \in I(T^1, T^2)$ のときは (4.1) より $P(B) = B$ になることより，$P(P(A)) = P(A)$ をえる．よって (4.2) が成立する．(4.3) も (4.5) より明らかである．最後に (4.4) を示そう．$A \in HS(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ とし，$\{v_i ; i \in I\}$, $\{z_j ; j \in J\}$ はそれぞれ $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ の完全正規直交系とする．I_0, J_0 を I, J の任意の有限部分集合とする．このとき

$$\sum_{i \in I_0, j \in J_0} |\langle P(A) v_i, z_j\rangle|^2 = \sum_{I_0} \sum_{J_0} |\varphi(\langle T^2_g A T'_{g^{-1}} v_i, z_j\rangle)|^2$$
$$\leqq \sum_{I_0} \sum_{J_0} \varphi(|\langle T^2_g A T'_{g^{-1}} v_i, z_j\rangle|^2)$$
$$= \varphi\left(\sum_{I_0} \sum_{J_0} |\langle T^2_g A T'_{g^{-1}} v_i, z_j\rangle|^2\right) \leqq |||A|||^2.$$

故に $|||P(A)||| \leqq |||A|||$ であり，$P(A) \in HS(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ をえる．QED.

<u>注意</u>　(1)　(A)群 G に対して，$LIM(CB(G))$ 及び $RIM(CB(G))$ は一般に多の元を含む．いま $f \in CB(G)$ に対して，定数 α が存在して，$\varphi(f) = \alpha$ $(\forall \varphi \in LIM(CB(G)) \cup RIM(CB(G)))$ であるとき，<u>f は α に almost convergent</u> であるといい，α を $m(f)$ で表わすことにする．$\psi \in RIM(CB(G))$ とし，定理3の記号の下に，$A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ に対して $Q(A) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ を

(4.6)　$\langle Q(A)v, z\rangle = \psi(\langle T^2_{g^{-1}} A T'_g v, z\rangle)$　$(\forall v \in \mathfrak{H}_1, \forall z \in \mathfrak{H}_2)$

によって定めると $Q(A)\in I(T^1,T^2)$ になる．いま T^1 と T^2 は disjoint i.e. $I(T^1,T^2)=\{0\}$ であるとき，行列要素系 $\{\langle T_g^1 v_1, v_2\rangle;\ v_i\in\mathfrak{H}_1\ (i=1,2)\}$ 及び $\{\langle T_g^2 z_1, z_2\rangle;\ z_i\qquad (i=1,2)\}$ に対して次の直交関係が成立する：

$$(4.7)\qquad m\left(\langle T_g^1 v_1, v_2\rangle\overline{\langle T_g^2 z_1, z_2\rangle}\right)=0.$$

これは (4.5), (4.6) にて A としてランク 1 のものを代入し，$P(A)=Q(A)=0$ なることよりえられる．

(2) G が (A) 群でなくても，定理 3 の記号の下で次のことが成立する（酒井 [12]）："$\forall A\in HS(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$ に対して $HS\text{-}\overline{Co}(T_g^2 A T_{g^{-1}}^1;\ g\in G)\cap I(T^1,T^2)$ は一点 $P(A)$ になり，写像 $A\to P(A)$ は線形である．ここで $HS\text{-}\overline{Co}(B)$ は $Co(B)\subset HS(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)$ の Hilbert-Schmidt ノルムに関する closure である．" ∎

いま Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann 作用素代数 $\mathfrak{A}$ にて，$\mathfrak{A}$ に属する unitary 作用素の全体を $\mathfrak{A}^u$，$\mathfrak{A}$ の commutant を $\mathfrak{A}'$ とする．

<u>定義 2</u>　$\mathfrak{A}$ が性質 P をもつとは，$\forall A\in\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ に対して，$wop\text{-}\overline{Co}(UAU^*;\ U\in\mathfrak{A}^u)$ が $\mathfrak{A}'$ と共通点をもつときをいう．(J. Schwartz [14] による)． ∎

G の unitary 表現 $T: G\ni g\mapsto T_g\in\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ に対して，$\{T_g;\ g\in G\}$ によって生成される von Neumann 作用素代数を $\mathfrak{A}(T)$ とかくことにすると，

$$(4.9)\qquad \mathfrak{A}(T)=\{T_g;\ g\in G\}'',\quad \mathfrak{A}(T)'=I(T,T),\quad \{T_g;\ g\in G\}\subseteq\mathfrak{A}(T)^u$$

である．

<u>定理4</u>　(A)群Gの連続なunitary表現$T: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$に対して，$\mathfrak{A}(T)$は性質Pをもつ．

<u>証明</u>　定理3より，$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$上の線形写像Pで，$\forall A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$に対して，$P(A) \in \text{wop-}\overline{Co}(T_g A T_{g^{-1}}; g \in G) \cap I(T,T)$なるものが存在する．従って(4.9)より

$$P(A) \in \text{wop-}\overline{Co}(UAU^*; U \in \mathfrak{A}(T)^u) \cap \mathfrak{A}(T)'$$

となり，$\mathfrak{A}(T)$は性質Pをもつ．　QED.

<u>注意</u>　デスクリート群Gが(A)群であるための条件はGの左正則表現によって生成されるVon Neumann作用素代数が性質Pをもつことである．これはS. Sakai [13, p. 210]で示されている．

§5　Glicksberg-Reiterの等式及びinvariant extension property

§§3，4の結果はいずれも$CB(G)$上の左不変平均に関する積分を考えることによって得られたものである．この§では$CB(G)$上の右不変平均の応用例を紹介する．以下この§では$\mathfrak{V}$はBanach空間で，Gの表現$T: G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$は弱連続かつ

$$(5.1) \qquad \sup\{\|T_g\|; g \in G\} \leq 1$$

をみたすものとする．この様な表現Tに対して，$\{T_g v - v; g \in G, v \in \mathfrak{V}\}$より生成される$\mathfrak{V}$の閉線形部分空間を$H(T,\mathfrak{V})$，$\forall v \in \mathfrak{V}$

に対して，$C_G(v) \equiv \overline{Co}(T_g v ; g \in G)$とおく．このとき$\forall v \in V$に対して　$Co(T_g v ; g \in G) \subseteq v + H(T, V)$ であるから，次の不等式(5.2)が成立する：

(5.2)　$d(v, H(T,V)) \leqq d(0, C_G(v))$　$(\forall v \in V)$.

ここでdはVのノルムによって定義される距離である．

<u>定義3</u>　Gの表現Tに対して，次の等式(Glicksberg-Reiterの等式)：

(5.3)　$d(v, H(T,V)) = d(0, C_G(v))$　$(v \in V)$

が成立するとき，表現Tは性質(GR)をもつという．

<u>定理5</u>（Glicksberg [4], Reiter [8]）　(A)群Gの表現$T : G \ni g \mapsto T_g \in \mathcal{L}(V)$は性質(GR)をもつ．

<u>証明</u>　(5.2)より(5.3)にて"$\geqq$"が成立することをみればよい．更に$v \in V$に対して，$d_0 \equiv d(0, C_G(v)) > 0$の場合に限ってよい．このとき$z_0 \in V^*$で

(5.4)　$\mathrm{Re}(\langle f, z_0 \rangle) \geqq 1$　$(\forall f \in C_G(v))$，$\| z_0 \| = 1/d_0$

なるものが存在する．(H. Reiter [8, Lemma A])．一方$\varphi \in RIM(CB(G))$とすると，補題5より，$\varphi(T^*) \in \mathcal{L}(V^*)$で

(5.5)　$\langle v, \varphi(T^*) z \rangle = \varphi(\langle T_g v, z \rangle)$　$(\forall (v, z) \in V \times V^*)$，$\| \varphi(T^*) \| \leqq 1$

なるものが存在する．φの右不変性より，$\forall (f, z) \in V \times V^*$及び$\forall s \in G$に対して

$$\langle T_s f - f, \varphi(T^*) z \rangle = \varphi_g(\langle T_{gs} f - T_g f, z \rangle) = 0.$$

従って $\langle h, \varphi(T^*)z\rangle = 0 \quad (\forall h\in H(T,V), \forall z\in V^*)$. このことと (5.4), (5.5), (1.6) より, $\forall h\in H(T,V)$ に対して

$$\|v-h\| \geqq d_0 |\langle v-h, \varphi(T^*)z_0\rangle| = d_0 |\langle v, \varphi(T^*)z_0\rangle|$$
$$\geqq d_0 \operatorname{Re}\langle v, \varphi(T^*)z_0\rangle = d_0 \operatorname{Re}\varphi(\langle T_g v, z_0\rangle)$$
$$= d_0 \varphi(\operatorname{Re}\langle T_g v, z_0\rangle) \geqq d_0$$

故に $d(v, H(T,V)) = \inf\{\|v-h\|; h\in H(T,V)\} \geqq d_0 = d(0, C_G(v))$. QED.

いま G の表現 $T: G\ni g\mapsto T_g\in\mathcal{L}(V)$ に対して, W は V の閉線形部分空間で $T_g(W)\subseteq W \quad (\forall g\in G)$ なるものとし, $z_0\in W^*$ は $\langle T_g f, z_0\rangle = \langle f, z_0\rangle \quad (\forall g\in G, \forall f\in W)$ なるものとする. このとき $\{W, z_0\}$ を表現 T の不変系ということにする.

定義 4　G の表現 $T; G\ni g\to T_g\in\mathcal{L}(V)$ の任意の不変系 $\{W, z_0\}$ に対して, $z\in V^*$ で

(5.6)　$\langle T_g v, z\rangle = \langle v, z\rangle \quad (\forall g\in G, \forall v\in V)$

(5.7)　$z|_W = z_0, \quad \|z\| = \|z_0\|$

なるものが存在するとき, 表現 T は invariant extension property ((IEP) と略記) をもつという.

定理 6　(A) 群 G の表現 $T: G\ni g\mapsto T_g\in\mathcal{L}(V)$ は (IEP) をもつ.

証明　$\{W, z_0\}$ は表現 T の不変系とすると, Hahn-Banach の定理より $\tilde{z}\in V^*$ で $\tilde{z}|_W = z_0$, $\|\tilde{z}\| = \|z_0\|$ なるものが存在する. いま $\varphi\in RIM(CB(G))$ とし, $\varphi(T^*)\in\mathcal{L}(V^*)$ は (5.5) で与えられるものとする. このとき $z = \varphi(T^*)\tilde{z}\in V^*$ が求める z_0

の拡張になっている．実際 $\forall s \in G$ 及び $\forall f \in V$ に対して

$$\langle T_s f, z \rangle = \varphi_g(\langle T_{gs} f, \tilde{z} \rangle) = \varphi_g(\langle T_g f, \tilde{z} \rangle) = \langle f, z \rangle$$

だから z は (5.6) をみたす．また $f \in W$ とすると

$$\langle f, z \rangle = \varphi(\langle T_g f, \tilde{z} \rangle) = \varphi(\langle T_g f, z_0 \rangle) = \varphi(\langle f, z_0 \rangle)$$
$$= \langle f, z_0 \rangle$$

より $z|_W = z_0$ である．更に $\| z_0 \| \leqq \| z \| = \| \varphi(T^*)\tilde{z} \| \leqq \| \tilde{z} \| = \| z_0 \|$ より $\| z \| = \| z_0 \|$ となり (5.7) が成立する．　QED.

<u>注意</u>　R. J. Silverman [15] は，B(G) が amenable になる群について，定理6よりもより一般的な invariant extension property を論じている．

おわりに

この報告では CB(G) が amenable になる場合，G の線形表現のもつ特徴的な性質を論じてきたが，一般に B(G) の (1.1)～(1.3) をみたす閉線形部分空間 $\mathfrak{O}$ が left or right amenable になっているとき，$\mathfrak{O}$ 上の左又は右不変平均に関する積分を考えることにより §3～§5 と類似の議論を展開することができる（酒井 [11]）．更にこの理論と WAP(G) がいつも amenable になることを結合すると任意の位相群 G のある種の線形表現に対して成立するいくつかの性質が導かれる（酒井 [12]）．

References

[1] Burckel,R.B.: Weakly almost periodic functions on semigroups, Gordon and Breach, New York, (1970).

[2] Day,M.M.: Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semigroups, Trans.Amer.Math. Soc., 69(1950), 276-291.

[3] Dixmier,J.: Les moyennes invariantes dans les semigroupes et leur applications, Acta Sci.Math.(Szeged), 12(1950), 213-227.

[4] Glickesberg,J.: On convex hulls of translates, Pacific J. Math., 13(1963), 97-113.

[5] Greenleaf,F.P.: Invariant means on topological groups, Van Nostrand, New York, (1969).

[6] Guichardet,A.: Sur la cohomologie des groupes topologiques, Bul.Sci.Math., 95(1971), 161-176.

[7] Nakamura,M. and Z.Takeda,: Group representation and Banach Limit, Tôhoku Math.J., 3(1951), 132-135.

[8] Reiter,H.: On some properties of locally compact groups, Indag.Math., 27(1965), 697-701.

[9] ______: Classical harmonic analysis and locally compact groups, Oxford Mathematical monographs, (1968).

[10] Rickert,N.W.: Some properties of locally compact groups, J.Austral.Math.Soc., 7(1967), 433-454.

[11] Sakai,K.: On linear representations of amenable groups, (to appear in Science Report of Kagoshima Univ. 25(1976)).

[12] ______: Applications of the invariant mean on WAP(G), (to appear).

[13] Sakai,S.: C*-algebras and W*-algebras, Springer, (1971).

[14] Schwartz,J.: Two finite, non-hyperfinite, non-isomorphic factors, Comm. Pure Appl.Math., 16(1963), 19-26.

[15] Silverman,R.J.: Means on semigroups and the Hahn-Banach extension property, Trans.Amer.Math.Soc., 83(1956), 222-237.