数理解析研究所講究録
第280巻 1976年 59-64

有限体上のユニタリ群の複素既約指標について

阪大・理　川中　宣明

まず，比較のために，複素数体$\mathbb{C}$上の一般線形群$GL_n(\mathbb{C})$とユニタリ群$U_n(\mathbb{C})$の有限次元既約表現の間の関係を，復習してみる．良く知られているように，

命題1．Rを$GL_n(\mathbb{C})$の正則な有限次元既約表現とすると，$R|U_n(\mathbb{C})$は，$U_n(\mathbb{C})$の既約表現である．しかも対応$R \mapsto R|U_n(\mathbb{C})$は，$GL_n(\mathbb{C})$の正則な有限次元既約表現の同値類の集合から$U_n(\mathbb{C})$の既約表現の同値類の集合への全単射である．

σを次式で定義される$GL_n(\mathbb{C})$の自己同型とする：

$$(x_{ij})^\sigma = (\overline{x_{ji}})^{-1} \qquad ((x_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})).$$

$U_n(\mathbb{C})$は，$GL_n(\mathbb{C})$のσ-固定点全体のなす群である．さて，$GL_n(\mathbb{C})$の任意の既約有限次元表現Tは，正則な有限次元既約表現Rと，反正則な有限次元既約表現Sとによって

$$T = R \otimes S$$

と，（同値性を除いて）一意的に書くことができ，逆にこの

ようにして得られるTは$GL_n(\mathbb{C})$の既約表現であることも良く知られている．従って，$GL_n(\mathbb{C})$のσ-不変な有限次元既約表現は，同値を除けば，

$$T = R \otimes (R \circ \sigma)$$

（Rは，正則な有限次元既約表現）の形に一意的に書ける．

このことと，命題1から，$GL_n(\mathbb{C})$のσ-不変な有限次元既約表現の同値類の集合から，$U_n(\mathbb{C})$の有限次元既約表現の同値類の集合への全単射が得られることになる．ここでは，この型の定理が，有限体上の一般線型群と，ユニタリ群に対しても成立することを示したい．

§1． 主定理．

まず，Gを任意の有限群，$A=\langle\sigma\rangle$を有限巡回群であるとする．AがGに作用しているとし，GAをGとAとの半直積とする．GAにおける積は

$$x^{\delta} = \delta x \delta^{-1} \quad (x \in G,\ \delta \in A)$$

によって定める．

補題1． χをGの既約指標で，σ-不変（即ち，$\chi(x) = \chi(x^{\sigma})$ $(\forall x \in G)$）とする．この時，GAの既約指標$\tilde{\chi}$で，$\tilde{\chi}|G = \chi$となるものが存在する．

証明． Tを，その指標がχであるような，Gの既約表現とする．条件より，$I_{\sigma} T(x) I_{\sigma}^{-1} = T(x^{\sigma})$ $(\forall x \in G)$と

なるような（Tの表現空間における）作用素I_σが存在する．$I_\sigma^m = 1$　($m=|A|$) となるようにI_σを normalize し，

$$\tilde{T}(x\sigma^l) = T(x)I_\sigma^l \qquad (x \in G)$$

によって$\tilde{T}$を定義すると，$\tilde{T}$は，GAの既約表現となる．

さて，以下Kを標数$p>0$の代数的閉体とし，kを元数q（$=p^*$）のKの部分体，自然数mに対してk_mをkのm次拡大体とする．σを次式で定義される$\mathfrak{G}=GL_n(K)$の自己同型とする：

$$(x_{ij})^\sigma = (x_{ji}^q)^{-1} \qquad ((x_{ij}) \in \mathfrak{G})$$

自然数mに対して，$\mathfrak{G}_{\sigma^m} = \{x \in \mathfrak{G}\ ;\ x^{\sigma^m} = x\}$ とおくと，

$$\mathfrak{G}_{\sigma^m} = \begin{cases} GL_n(k_m) & (m\text{が偶数のとき}) \\ U_n(k_{2m}) & (m\text{が奇数のとき}). \end{cases}$$

以下，mをひとつ固定して $G=\mathfrak{G}_{\sigma^m}$ とおく．σのGへの制限を簡単のため，やはりσと書き，Gの自己同型σで生成されるm次巡回群をAと記すことにする．

__主定理.__　$(m, p)=1$と仮定する．χをGのσ-不変な既約指標，$\tilde{\chi}$を$\tilde{\chi}|G=\chi$ となるようなGAの既約指標とする．$G_\sigma = U_n(k_2)$ の既約指標ψ_χで次式を満たすようなものが（一意的に）存在する：

$$\tilde{\chi}(x\sigma) = \pm\zeta\,\psi_x(n(x)) \qquad (x \in G),$$

ただし，ζは1のm乗根 $n(x)$ は $C_G(N(x)) \cap G_\sigma$ の任意の元（$N(x) = xx^\sigma x^{\sigma^2}\cdots x^{\sigma^{m-1}}$ とする）である．さらに，$\chi \to \psi_\chi$ はGのσ-不変な既約指標全体から，G_σ の既約指標全体への全単射である．

次の補題は，$(m, p) = 1$ という仮定なしで成立する．

補題2．(a) x をGの任意の元とする．Gにおける $N(x)$ の共役類 $C_G(N(x))$ は G_σ の元を含み，$C_G(N(x)) \cap G_\sigma$ は，G_σ のひとつの共役類をなす．

(b) x, y をGの元で $x\sigma$ と $y\sigma$ がGAの元として共役であるとする．このとき，$C_G(N(x)) \cap G_\sigma = C_G(N(y)) \cap G_\sigma$.

(c) $\mathcal{N}(C_{GA}(x\sigma)) = C_G(N(x)) \cap G_\sigma \qquad (x \in G)$

で定義される $\mathcal{N}$ は $G\times\{\sigma\}$ のGA-共役類全体から G_σ の共役類全体への全単射である．

(d) $|C_{GA}(x\sigma)|\,|G|^{-1} = |C_G(N(x)) \cap G_\sigma|\,|G_\sigma|^{-1}$

が，任意の $x \in G$ に対して成立する．

注意． τを $(x_{ij})^\tau = (x_{ij}^q)$ $((x_{ij}) \in \mathfrak{G})$ で定義される $\mathfrak{G}$ の自己同型とする．上の主定理と補題は，σをτで置きかえても成立する．実際，この場合は $(m, p) = 1$ の仮定なしに，新谷卓郎氏が既に証明した．筆者の証明は，σの場

合でも適用できるかわりに，(今の所) m が p で割れない，という仮定が必要になる．

§2. 証明の方針．

主定理および補題2の形の命題が成立するような有限群 G と巡回群 A の組の例をいくつか挙げてみよう：

例I.「$(|G|, m) = 1$ $(m = |A|)$ かつ

$x^\sigma = x$ $(\forall x \in G)$」の場合．

この場合は，主定理と補題2は，良く知られた諸結果の言い換えに過ぎない．

例I'.「$(|G|, m) = 1$」で A の G への作用が trivial とは限らない場合も，同様のことが成立する．(G. Glauberman: Canad. J. Math. 20 (1968) 1465-1488，参照).

例II.「H を任意の有限群，$G = H \times H \times \cdots \times H$ (m 個) σ を $(h_1, h_2, \cdots, h_m)^\sigma = (h_m, h_1, h_2, \cdots, h_{m-1})$ $(h_i \in H)$ で定義」この場合は，G の任意の既約表現が，H の既約表現のテンサー積で書けることから主定理が出る．

例II'. 少し違うが，序で述べた $GL_n(\mathbb{C})$ と $U_n(\mathbb{C})$ の場合も，例IIの系統であろう．

例II''. 例II'とほぼ同のことが，主定理の G と G_σ のモジュラー表系(標数 p の体 K 上の表現)に対して成立．

例III. 「$G=k_m^*$, $x^\sigma=x^q$ ($x\in k_m^*$)」の場合. このとき, Gの既約指標(=一次元表現)χがσ-不変なら

$$\chi(x)=\chi(x^\sigma) \qquad (x\in G)$$

すなわち, $\chi(xx^{-\sigma})=1 \qquad (x\in G)$.

ところが, Hilbertの定理90より

$$\{xx^{-\sigma}\ ;\ x\in G\}=\{\mathrm{Norm}_{k_m/k}(x)=1\ ;\ x\in G\}.$$

このことと, $\mathrm{Norm}_{k_m/k}$がkの上への写像であることから

$$\chi=\psi_\chi\circ\mathrm{Norm}_{k_m/k}$$

なる$G_\sigma=k^*$の既約指標ψ_χが一意的に存在する. このことを主定理の形に言い換えることができる.

主定理の証明には, Brauer の characterization of characters を用いて, 主定理を local な問題 すなわち G_σ の elementary subgroups についての問題に帰着する. local な所では, 上の例I～例III のどれかが使えることがわかる. それらをつないで global な結果を出せば良いわけである. 詳細は筆者の論文: On the irreducible characters of the finite unitary groups (to appear) を, 見て下されば幸いです.