数理解析研究所講究録
第280巻 1976年 122-132

フーリエ変換のspherical means

東北大 理　猪狩 惺

d次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^d$上の函数fに対して、フーリエ変換$\hat{f}$を

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,d}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

によって、d重単位円周$\mathbb{T}^d$上の函数uに対して、フーリエ係数を

$$\hat{u}_\mu = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} u(x) e^{-i\mu x} dx, \quad \mu \in \mathbb{Z}^d$$

によって定義する。ここで$\mathbb{Z}^d$は各成分が整数であるような$\mathbb{R}^d$の点である。

函数uのフーリエ級数の収束性を調べる場合、一つの方法は球形和

$$S_R^0(u)(x) = \sum_{|\mu|<R} \hat{u}_\mu e^{i\mu x}$$

を考察することである。これはラプラシアンに関する固有値の大きさの順に並べた和である。我々はこれに限って考えることにする。後程述べるように、S_R^0はしばしば不都合を生じ

るので Riesz - Bochner 平均

$$s_R^{\delta}(u)(x) = \sum_{|\mu|<R} \left(1-\frac{|\mu|^2}{R^2}\right)^{\delta} \hat{u}_\mu e^{i\mu x}$$

を扱う. フーリエ変換の Riesz - Bochner 平均も同様にして定義される. それを $S_R^{\delta}(f)$ とかくことにする.

II. 平均収束. 先ず, フーリエ変換と級数の L^p-ノルム収束は同値であることを示す. 以下 $1 \leq p \leq \infty$ とする.

R^d 上の有界函数 φ に対して

$$S_R^{\varphi}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{R^d} \varphi\left(\frac{1}{R}\xi\right) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

$$s_R^{\varphi}(f)(x) = \sum_{\mu} \varphi\left(\frac{1}{R}\mu\right) \hat{u}_\mu e^{i\mu x}$$

とおく.

$$\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(R^d)} = \|S_R^{\varphi}\|_{L^p(R^d)\mapsto L^p(R^d)}, \quad \|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(Z^d)} = \|s_R^{\varphi}\|_{L^p(T^d)\mapsto L^p(T^d)}$$

と定義する. 次の事実は容易に確かめられる:

1) $\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(R^d)} = \|\varphi(\cdot)\|_{M_p(R^d)}$ $(R>0)$,

2) $\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p} = \|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_{p'}}$, $(1/p + 1/p' = 1)$,

3) φ は R^d の原点の近傍で連続, $\varphi(0) = 1$, $p < \infty$ とする. そのとき任意の $u \in L^p(T^d)$ に対して $s_R^{\varphi}(u) \longrightarrow u$ in L^p となるための必要十分条件は,

$$\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} \le const < \infty .$$

フーリエ変換に対しては，更に最初のいくつかの α に対して $D^\alpha\varphi = 0$ ならば，$\|\varphi\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \le const$ が必要十分条件である．

$\mathbb{R}^d$ 上の函数 φ が regulated であるとは，$L^1(\mathbb{R}^d)$ のノルム ≤ 1 なる単位元の近似 $\{a_\varepsilon\}$ が存在して，すべての $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して $\lim \varphi * a_\varepsilon(\xi) = \varphi(\xi)$ をみたすことである．

<u>定理</u> 1 (K. de Leeuw [4]). φ が $\mathbb{R}^d$ 上の regulated な函数ならば，

$$\|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} \le \|\varphi\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \quad (R > 0).$$

<u>定理</u> 2 (猪狩 [8]). φ は $\mathbb{R}^d$ 上の不連続点の集合が零集合であるような函数ならば，

$$\|\varphi\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \le \varliminf_{R\to\infty} \|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} .$$

従って，特に φ が regulated かつ不連続点の集合が零集合ならば，

$$\|\varphi\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = \lim_{R\to\infty} \|\varphi(R^{-1}\cdot)\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} .$$

以上の事柄から，我々の問題は

$$\varphi(\xi) = \varphi_\delta(\xi) = \begin{cases} (1-|\xi|^2)^\delta & (|\xi| < 1) \\ 0 & (|\xi| \ge 1) \end{cases}$$

とおくとき，

$$\|\varphi_\delta\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} < \infty \qquad (1)$$

が成立するかという問題に帰着される．以下 $d \ge 2$ とする．

これについて知られている結果を列挙すると,

1° (C. Fefferman [5]) $p \neq 2$ のとき (1) は $\delta = 0$ に対して成りたたない.

2° (L. Carleson - P. Sjölin [1]) $d = 2$ とする. $4/3 \leq p \leq 4$ ならば, 任意の $\delta > 0$ に対して (1) は成りたつ.

2° の別証明として, L. Hörmander [7], C. Fefferman [6], A. Cordoba [3], P. Sjölin [11] があるが, いずれも本質的に $d = 2$ である.

<u>問題</u> $d > 2$ とする. $2d/(d+1) \leq p \leq 2d/(d-1)$ ならば, 任意の $\delta > 0$ に対して (1) が成りたつか?

現在知られている最もよい結果は P. A. Tomas [14] による.

1° と E. M. Stein の定理 [13] と定理2を合せると,

3° $d \geq 2$, $p < 2$ ならば, $u \in L^p(\mathbb{T}^d)$ が存在して $S_R^0(u)(x)$ は殆んどすべての点で発散する.

3° と同様な論法によって, d 次元球上の函数の球面調和函数展開の発散が $L^p(S^d)$ ($p < 2$, $d \geq 2$) に対して示される (猪狩 [9], J.-L. Clerc [2] 参照).

2. Littlewood - Paley の函数. 一変数フーリエ級数の収束問題に対しては Littlewood - Paley の補助函数は決定的な結

果を与えていない．しかし多変数の場合は概念の問題と補助函数の有界性は同値である．

G を $GL(d, R)$ の閉部分群，dg を G 上の不変測度，$H = L^2(G, dg)$ とおく．$t \in L^1_{loc} \cap \mathcal{S}'(R^d)$ に対して

$$T_g(x) = \det g \ t(gx) \qquad x \in R^d,\ g \in G$$

とおく．このとき Littlewood-Paley の函数を

$$g_t(f)(x) = \| T_g * f(x) \|_H , \qquad f \in C_c^\infty(R^d)$$

で定義する．猪狩一倉坪 [11] と同様な方法によって次の定理を証明することができる．

<u>定理</u> 3．$t \in L^1_{loc} \cap \mathcal{S}'(R^d)$ は次の条件をみたすとする；

a) $\| \widehat{T_g}(\xi) \|_H = const \neq 0 \quad$ a.e. ξ

b) $\displaystyle\int_{|x|>c|y|} \| T_g(x+y) - T_g(x) \|_H \, dx < c^{-1}, \qquad y \in R^d,$

ここに $c > 0$ は定数である．そのとき $1 < p < \infty$ に対して

$$\| f \|_{L^p} \sim \| g_t(f) \|_{L^p} .$$

上のような Littlewood-Paley 函数から我々の目的に沿う場合を導びこう．

G として
$$\begin{pmatrix} g & & 0 \\ & g & \\ 0 & & \ddots \ g \end{pmatrix}, \quad g > 0$$

なる元からなる部分群とする．上の元を再び g であらわせば，$dg = g^{-1} dg$ である．

$K^\delta = \widehat{\varphi_\delta}$, $\delta = \sigma + i\tau$, $\sigma > -1$ とおく。

$$K^\delta(x) = 2^\delta \Gamma(\delta+1) V_{\frac{d}{2}+\delta}(|x|), \quad V_\mu(s) = \frac{J_\mu(s)}{s^\mu}$$

である。$\psi(x) = \psi^\delta(x) = K^\delta(x) - K^{\delta-1}(x)$ とおく。$\sigma > (d+1)/2$ のとき ψ^δ は定理3の条件をみたすことが示される。一方 $S_R^{\varphi_\delta} = S_R^\delta$ とおくとき

$$T_\rho(f) = T_\rho^\delta(f) = S_\rho^\delta(f) - S_\rho^{\delta-1}(f)$$

であるから，定理3によって，$1 < p < \infty$, $\sigma > (d+1)/2$ のとき，

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \sim \left\| \left(\int_0^\infty |S_\rho^\delta(f)(\cdot) - S_\rho^{\delta-1}(f)(\cdot)|^2 \frac{d\rho}{\rho} \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad (2)$$

(2) と Plancherel の定理によって (2) は $2d/(d+2\sigma-1) < p < 2d/(d-2\sigma+1)$, $1/2 < \sigma < (d+1)/2$ に対して成りたつことが導かれる（猪狩－倉坪 [　] 参照）。

次に，$g_t(f)$ を変形しよう。$q \geq 1$ に対して

$$G_{\delta,q}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |T_\rho^\delta(f)(x)|^q \frac{d\rho}{\rho} \right)^{1/q}, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

ここに $\qquad T_\rho^\delta(f) = S_\rho^\delta(f) - S_\rho^{\delta-1}(f)$,

$$g_{\delta,q}(u)(x) = \left(\int_0^\infty |t_\rho^\delta(u)(x)|^q \frac{d\rho}{\rho} \right)^{1/q} \quad u \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$$

ここに $\qquad t_\rho^\delta(u) = s_\rho^\delta(u) - s_\rho^{\delta-1}(u)$,

とおく．

3．概収束問題と Littlewood-Paley 函数．煩雑になるのを避けるため $d \geq 2$, $2 \geq p > 2d/(d+1)$ とする．

$$S_*^\delta(f)(x) = \sup_R |S_R^\delta(f)(x)| \qquad f \in L^1(R^d)$$

とおく．$s_*^\delta(u)$ も同様にして定義される．

命題 1．$\|S_*^\delta(f)\|_{L^p} \leq \mathrm{const}\, \|f\|_{L^p}$, $f \in L^p(R^d)$ ならば，$S_R^\delta(f) \to f$ a.e. $(R \to \infty)$．

仮定は，$\mathrm{Re}\,\delta > (d-1)/2$, $1 \leq p \leq \infty$ に対して成りたつ．命題は S^δ を s^δ でおきかえても成りたつ．（E. M. Stein [12] 参照）．

命題 2．$\alpha, \beta > 0$, $2\alpha > \beta - \alpha + 1 > 0$ とする．(A) ⇒ (B) である．

(A)　$\sigma > \alpha$, $1/(\beta - \alpha + 1) > q > 1$ ならば，

$$\|G_{\sigma,q}(f)\|_{L^p} \leq c\, \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(R^d).$$

(B)　$\sigma > \beta$ ならば，

$$\|S_*^{\sigma+i\tau}(f)\|_{L^p} \leq c' e^{\pi|\tau|} \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(R^d), \quad \tau \in R,$$

ここに c は τ, f に無関係な定数である．

証明の概略．

$$R^{2\beta+2i\tau} S_R^{\beta+i\tau}(f) = \frac{2\Gamma(\beta+i\tau+1)}{\Gamma(\beta-\sigma+i\tau+1)\Gamma(\sigma)} \int_0^R (R^2-r^2)^{\beta+i\tau-\sigma} r^{2\sigma-1} S_r^{\sigma-1}(f)\, dr.$$

$1/q + 1/q' = 1$ に対して Hölder の不等式を用いると

$$|S_R^{\sigma'+i\tau}(f)| \leq c R^{-2\sigma'} \left[\int_0^R (R^2 - r^2)^{(\sigma'-\sigma)q'} r^{(2\sigma-1)q'} dr \right]^{1/q'} \left[\int_0^R |S_r^{\sigma-1}(f)|^q dr \right]^{1/q}.$$

上の式で $\sigma' > \beta$ ととり $\sigma > \alpha$ を十分 α に近くとれば，$q > 1/(\sigma' - \sigma + 1)$，$q > 1/(2\sigma)$ となるから

$$|S_R^{\sigma'+i\tau}(f)| \leq c \left[\frac{1}{R} \int_0^R |S_r^{\sigma-1}(f)|^q dr \right]^{1/q}$$
$$\leq c \left\{ G_{\sigma,q}(f) + \cdots + G_{\sigma+M,q}(f) + S_*^{\sigma+M}(f) \right]$$

となる．M を十分大きくとって，仮定(A)と命題1を用いると(B)が得られる．　　　　　　　　　　　　(証明終)

特に，$\alpha = \frac{1}{2} + d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ のときを考えてみよう．

<u>命題</u> 3．$d \geq 2$，$2 > p > 2d/(d+1)$，$\alpha = \frac{1}{2} + d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ とする．

(A)　$\sigma > \alpha$ そして $1/(1-\alpha) > q \geq 2$ ならば，

$$\|G_{\sigma,q}(f)\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^p}, \qquad f \in L^p(R^d).$$

(B)　$\sigma > 0$ ならば，

$$\|S_*^{\sigma+i\tau}(f)\|_{L^p} \leq c' e^{\pi|\tau|} \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(R^d), \ \tau \in R^d.$$

このとき，(A) ⇒ (B)．逆に(B)がすべての $2 > p > 2d/(d+1)$ に対して成りたてば，(A)が成りたつ．

<u>証明</u>の概略．前半は命題2の特別な場合である．後半を示す．2の(2)によって

$\sigma_0 > 1/2$ ならば

$$\| G_{\sigma_0+i\tau,2}(f) \|_{L^2} \le c \, \| f \|_{L^2} . \qquad (3)$$

$\sigma_1 > 1$, $p_1 = 2d/(d+1)$ ならば,

$$\| G_{\sigma_1+i\tau,2}(f) \|_{L^{p_1}} \le c e^{\pi|\tau|} \| f \|_{L^{p_1}} . \qquad (4)$$

任意の $q_1 \ge 2$ に対して

$$G_{\sigma_1+i\tau,q_1}(f) = \left[\int_0^\infty | S_R^{\sigma_1+i\tau}(f) - S_R^{\sigma_1-1+i\tau}(f) |^{q_1} \frac{dR}{R} \right]^{1/q_1}$$

$$\le \left[S_*^{\sigma_1+i\tau}(f) + S_*^{\sigma_1-1+i\tau}(f) \right]^{(q_1-2)/q} \left[\int_0^\infty | S_R^{\sigma_1+i\tau}(f) - S_R^{\sigma_1-1+i\tau}(f) |^2 \frac{dR}{R} \right]^{1/q_1} .$$

ゆえに (B) と (4) によって

$$\| G_{\sigma_1+i\tau,q_1}(f) \|_{L^{p_1}} \le c e^{\pi|\tau|} \| f \|_{L^{p_1}} . \qquad (5)$$

(3) と (5) に Stein の補間定理を用いると (A) が得られる. (証明終)

従って, フーリエ変換の Riesz-Bochner 平均の収束の上で述べた問題は, 命題 3 (A) を示すことに帰着された. 上で述べた議論はすべてフーリエ級数に対しても成りたつ. すなわち S_R^δ を s_R^δ で, $G_{\delta,q}$ を $g_{\delta,q}$ でおきかえることが出来る. 更に,

<u>命題</u> 4. $1 \le p, q < \infty$, $\mathrm{Re}\,\delta > -1$ とする. そのとき (A) $\Longleftrightarrow$ (B).

(A) $\quad \| G_{\delta,q}(f) \|_{L^p} \le c \, \| f \|_{L^p} \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^d).$

(B) $\quad \| g_{\delta,q}(u) \|_{L^p} \le c \, \| u \|_{L^p} \qquad u \in L^p(\mathbb{T}^d),$

ここで (A), (B) の定数 c は等しい.

証明は, (A) ⇒ (B) は K. de Leeuw [4] の方法で, (B) ⇒ (A) は猪狩 [8] の方法でなされる.

命題 4 の (A) が成りたつよう現在知られている最もよい結果は,

$$1 < p \leq 2, \quad \sigma > \frac{1}{2} + d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right), \quad p/(p-1) > q \geq 2$$

である.

引用文献

[1] L.Carleson and P.Sjölin, Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc, Studia Math.,44(1972), 287-299.

[2] J.-L.Clerc, Les sommes partielles de la decomposition en harmoniques spheriques, C.R.Acad.Sc.Paris, 274(1972), 59-61.

[3] A.Cordoba, The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers, to appear.

[4] K.de Leeuw, On L^p-multipliers, Ann.of Math.,81(1965)364-379.

[5] C.Fefferman, The multiplier problem for the ball, Ann.of Math.,94 (1971)330-336.

[6] ———, A note on spherical summation multipliers, Israel J.M., 15 (1973)44-52.

[7] L.Hörmander, Oscillatory integrals and multipliers in FL^p, Ark.för Math., 11(1973)1-11.

[8] S.Igari, Functions of L^p-multipliers, Tohoku M.J., 21(1969)304-320.

[9] 猪狩惺, 多重フーリエ級数の収束問題, 数学 25(1973)14-23.

[10] S.Igari and S.Kuratsubo, A sufficient condition for L^p-multipliers, Pacific J.M., 38(1971)85-88.

[11] P.Sjölin, Fourier multipliers and estimates of Fourier transform of measures carried by smooth curve, Studia Math., 51(1974)169-182.

[12] E.M.Stein Localozation and summability of multiple Fourier series, Acta Math., 100(1958)93-147.

[13] E.M.Stein, On limit of sequences of operators, Ann.of Math., 74 (1961)140-170.

[14] P.A.Tomas, A restriction theorem for the Fourier transform,B.A.M.S., 81(1975)477-478.