数理解析研究所講究録
第 281 巻 1976 年 1-19

線形無限次元系の実現理論について

名大　工学部　　松尾　強

1. はじめに

本資料において，著者が確立した線形無限次元系の基礎論を概説する。紙数の都合により，証明は与えない。主な成果は，力学写像の表現定理と正準実現の一意性定理（特に位相決定）であるが，それらを得るための基本的概念の定義が重要である。第2節で，力学空間の定義を与え，重要な例を述べる。力学空間の概念は，R.E. Kalman の K[z]-モジュールと Hille-吉田の作用素半群の拡張である。第3節で，力学写像の定義とその表現定理を与える。第1の表現定理は L. Schwartz の核定理の拡張型のものであり，第2の表現定理は力学空間をある位相代数上のモジュールと考え，モジュール準同型を使用してのものである。第4節で，入出力写像を定義し，表現定理により，入出力写像を表わす。第5節で，入

出力写像 $f : \Omega \to \Gamma$ に対する実現および実現間の状態写像を定義し，正準実現間の同型問題を検討する。第6節において，実現を樽型空間とした場合の我々の閉グラフ定理と開写像定理を述べる。証明は［1］を，位相線形空間の基本的事項は，［2］，［3］，［4］を参照されたい。なお本論文では，時間集合として，実数 $R = [-\infty, \infty]$ と，$R^+ = [0, \infty]$ を考える。又，すべての線形空間は，実数又は，複素数体上のものと仮定する。

2．（線形）力学空間

<u>（2．1）定義</u>　X を分離的局所空間とし，$L(X)$ を線形連続作用素の代数とする．$\Phi : R^+ \to L(X)$ を作用素の結合に関するモノイド準同型，すなわち，$\Phi(0) = I$，$\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$，とする．この時（$X$, Φ）を（線形）力学空間といおう。

空間 $L(X)$ に対し，色々な局所凸位相が考えられる。各有界集合においての一様収束の位相を一様位相，各点における位相を，強位相，X の位相を $\sigma(X, X')$ と考えての強位相を弱位相（i.e. $\sigma(L(X), X \otimes X')$）といおう。$\Phi : R^+ \to L(X)$ が，一様位相（強位相，弱位相）に関して，連続ならば Φ は一様連続（強連続，弱連続）といおう。　もし X が半完備空間であり，Φ：

$R^+ \to L(X)$が強連続かつ局所等連続な時，力学空間(X, Φ)は(C_0)族の作用素半群であり，Hille-吉田型の定理が成立する。([7], [8])
その場合，生成作用素をAとすれば，力学空間(X, Φ)を(X, A)とみなしてもよい。Xが準完備樽型空間である力学空間は，局所等連続である。力学空間でも，位相線形空間と同様に 部分空間，積空間，商空間を考えることができる。

(2.2) 例　($F(R^+), S_\ell$)　　$F(R^+)$として，R^+上で定義された全ての実(複素)関数の集合とする。$F(R^+)$は 各点加法と各点によるスカラー積により，実(複素)線形空間である。各$t \in R^+$に対し，左移動作用素$S_\ell(t)$: $F(R^+) \to F(R^+)$を$(S_\ell(t)\varphi)(\tau) = \varphi(\tau + t)$，$\forall \varphi \in F(R^+)$，により定義する。そこで，$(F(R^+), S_\ell)$は力学空間となる．ところで $F(R^+)$の位相として 各点収束の位相，i.e. 線形汎関数$e_t : \varphi \to \varphi(t)$, $t \in R^+$ が連続となる一番あらい位相を考える．これは 積位相R^{R^+}であり，完備である．

(2.3) 例　($C(R^+), S_\ell$)　　さて　$C(R^+) = \{\varphi \in F(R^+);$
$\varphi : R^+ \to R\ (C)$ は連続$\}$とする．$C(R^+)$は 左移動作用素$\{S_\ell(t)\}_{t \in R^+}$ に対して閉じているから $(C(R^+), S_\ell)$は　$(F(R^+), S_\ell)$の部分空間である。　$C(R^+)$に対し，　　セミノルム系

$P_K : R^+ \to L(C(R^+))$　　　　K: R^+の任意のコンパクト集合

により定義される局所凸空間を考える．$C(R^+)$ は フレッシェ空間である、更に，$S_\ell : R^+ \to L(C(R^+))$ は強連続であり，従って S_ℓ は局所等連続となり 局所等連続な強連続力学空間となる．そこで Hille−吉田型の定理が成立する．S_ℓ の生成作用素は $\frac{d}{dt} : C(R^+) \to C(R^+)$ となり，$(C(R^+), S_\ell)$ を $(C(R^+), \frac{d}{dt})$ と考えることができる．

(2.4) 定義　(X, Φ) を力学空間とする．X' を X の共役空間とする．全ての $t \in R^+$ に対し，$\Phi'(t) = (\Phi(t))$ とすれば $\Phi' : R^+ \to L(X')$ は モノイド準同型である．(X', Φ') を (X, Φ) の共役力学空間という。

(2.5) 命題　(X, Φ) が力学空間であれば，(X', Φ') は 弱位相 $\sigma(X', X)$，コンパクト位相 $c(X', X)$，マッキィー位相 $\tau(X', X)$，有界位相 $\beta(X', X)$ に対し，力学空間となる。

(2.6) 例　$(A(R^+), S_r) = (F(R^+)', S_\ell')$　さて $A(R^+) = F(R^+)' = \{ \varphi \in F(R^+) ;\ \mathrm{supp}(\varphi)$ は有限集合$\}$ とする。
$A(R^+)$ は $\beta(A(R^+), F(R^+))$ により 樽型空間となる．ここで $A(R^+)$ は直和位相の空間 $R^{(R^+)}$ と考えられ $A(R^+)$ に対し定義される局所凸位相の中で最も細いものである．ここで，$^\forall \tau \in R^+$ に対し

右移動作用素は $\omega=\sum\omega(t)e_t \longrightarrow S_\ell(\tau)\omega=\sum\omega(t)e_{t+\tau}$

となる．積 $*$: $A(R^+)\times A(R^+)\longrightarrow A(R^+)$ を

$$(\sum\omega(t)e_t)*(\sum\bar{\omega}(\tau)e_\tau)=\sum_{t,\tau}\omega(t)\bar{\omega}(\tau)e_{t+\tau}$$

と定義すれば，$A(R^+)$ は実数（複素数）上の可換な単位元付代数（線形環）となる．$^\forall t,\tau\in R^+$ に対し $e_t*e_\tau=e_{t+\tau}$，$S_\ell(t)\omega=\delta_t*\omega$ に注目されたい．代数 $A(R^+)$ はモノイド代数といわれるもので，任意の代数 A と任意の写像 $f: R^+\to A$ に対し モノイド準同型 $A(R^+)\to A$ が一意に存在する．

<u>（2．7） 例</u>　$(M_c(R^+), S_r)=(C(R^+)', S_\ell')$

さて　$M_c(R^+)=C(R^+)'=\{R^+$ のコンパクトな台を持った測度$\}$ とする．$M_c(R^+)$ に対し，たたみこみ $*$: $M_c(R^+)\times M_c(R^+)\to M_c(R^+)$ を　$\langle\varphi,\mu*\nu\rangle:=\langle\tilde{\varphi},\mu\otimes\nu\rangle=\iint\varphi(t+s)\,d\mu(t)\,d\nu(s)$, $^\forall\varphi\in C(R^+)$ により定義することができる．これにより $M_c(R^+)$ は可換な単位元付き代数となる．このたたみこみにより，右移動作用素 $S_r(t)$ が $S_r(t)\nu=\delta_t*\nu$ $(^\forall\nu\in M_c(R^+))$ となることに注目されたい．位相として $C(M_c(R^+), C(R^+))$ をとる．[$C(M_c(R^+), C(R^+))$ は $C(R^+)$ の任意のコンパクト集合上での一様収束の位相]

この位相により $M_c(R^+)$ は準完備な空間となる。位相代数ともなる。（$*$: $M_c(R^+)\times M_c(R^+)\longrightarrow M_c(R^+)$ が各変数に対し線形連続となるような分離的局所凸空間）。この位相の特徴は

モノイド準同型 $R^+ \longrightarrow M_c(R^+) : t \to \delta_t$ が位相的に同型であり $\{\delta_t\}_{t\in R^+}$ の線形結合が $M_c(R^+)$ で稠密であることである。

$M_c(R^+)$ に対するもう一つの有用な位相は $\beta(M_c(R^+), C(R^+))$ である。この位相をもった $M_c(R^+)$ を $M_c^b(R^+)$ と表わす。$M_c^b(R^+)$ も準完備な位相代数である。$(M_c^b(R^+)', S_r') = (\overline{C(R^+)}, S_\ell)$ 但し，$\overline{C(R^+)}$ は全てのコンパクトな台を持つ測度に対し局所有界な可測関数の集合である。([1])

3. 力学写像の表現定理

力学空間を考えるならば、それらの空間間の適切な写像を考えなければならない。

<u>(3.1) 定義</u>　(X, Φ) (Y, Ψ) を力学空間とする。写像 $f : X \to Y$ は線形写像であり，全ての $t \in R^+$ に対し

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \Phi(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi(t)} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

が可換な場合，力学写像であるという。

次の定理は我々の Schwartz 型核定理である。

<u>(3.2) 定理</u>　(X, Φ) を力学空間，$f : X \to F(R^+)$

を連続な力学写像とする。そこで　$a \in X'$ が一意に存在し
全ての　$x \in X$，$t \in R^+$ に対し　$(f(x))(t) = (a \triangle x)(t) := \langle \Phi(t)x, a \rangle$
が成立する。　逆に全ての $a \in X'$ に対し　$f : x \longmapsto a \triangle x$
は連続な力学写像 $X \to F(R^+)$ である。

<u>（3.3）　命題</u>　　（X, Φ）を弱連続な力学空間，X を樽型空間とする。全ての $a \in X'$ に対し　$f : x \longmapsto a \triangle x$ は連続な力学写像：$X \to C(R^+)$ である。

次に力学空間（X, Φ）をある単位元を持つ可換位相代数 A 上のモジュールと考えることを試みよう。というのは　モジュール準同型に対し　次の命題があるからである。但し，X が　分離的局所凸空間であり，$\Phi : A \to L(X)$ が連続な代数準同型のとき　（X, Φ）を位相的 A－モジュールという。

<u>（3.4）　命題</u>　　A を単位元を持つ可換代数，（X, Φ）を位相的 A－モジュールとする。任意の連続な A－線形写像 $G : A \to X$ は　$g = G(1)$ により　全ての $a \in A$ に対し

$$G(a) = \Phi(a)g$$

と表わされる。

逆に　全ての $g \in X$ に対し　　$\Phi(\cdot)g : a \longmapsto \Phi(a)g$ は連続な A－線形写像である。

<u>(3.5) 命題</u>　全ての力学空間(X, Φ)に対し モノイド準同型$\Phi : R^+ \to L(X)$を 連続な代数準同型$\tilde{\Phi} : A(R^+) \to L(X)$に拡張できる. i.e. $(X, \tilde{\Phi})$が位相的$A(R^+)$−モジュールとなる.

$$
\begin{tikzcd}
A(R^+) \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] & L(X) \\
R^+ \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

但し, $i : R^+ \to A(R^+) : t \mapsto e_t$ は モノイド準同型である。

逆に，全ての位相的$A(R^+)$−モジュール$(X, \tilde{\Phi})$は合成 $\Phi = i \circ \tilde{\Phi}$により 力学空間$(X, \Phi)$となる。

次に 位相代数$A(R^+)$をより広い位相代数Aに埋め込むことを考える。包含写像$i_1 : A(R^+) \to A$に関し $A(R^+)$がAで稠密であり $\tilde{\Phi} : A(R^+) \to L(X)$が Aから誘導された位相に関して 連続であり，$L(X)$に都合のよい完備性があれば $\tilde{\Phi}$を $\tilde{\Phi} : A \to L(X)$に拡張することができる。

$A = M_c(R^+)$ の場合のこの条件は 次の定理である。

<u>(3.6) 定理</u>　力学空間(X, Φ)が有界強連続であり Xが準完備な樽型空間ならば，モノイド準同型$\delta : R^+ \to M_c(R^+) : t \mapsto \delta_t$により (X, Φ)は位相的$M_c(R^+)$−モジュール$(X, \tilde{\Phi})$となる。　逆に 全ての位相的$M_c(R^+)$−モジュール$(X, \tilde{\Phi})$

は，写像 f により，強連続な力学空間 (X, Φ) と考えられる。

連続力学写像 $f:(M_c(R^+), S_r) \to (X, \Phi)$ に対し，定理(3.6)および例(2.7)により 連続 $M_c(R^+)$－線形写像 $f_m : M_c(R^+) \to (X, \hat{\Phi})$ を考えることができる。

$$\begin{tikzcd} M_c(R^+) \arrow[r, "f_m"] & (X, \hat{\Phi}) \\ (M_c(R^+), S_r) \arrow[u, dashed] \arrow[r, "f"] & (X, \Phi) \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

逆に 連続 $M_c(R^+)$－線形写像 $f_m : M_c(R^+) \to (X, \hat{\Phi})$ に対し，連続な力学写像 $f:(M_c(R^+), S_r) \to (X, \Phi)$ を考えることもできる。又 f_m は命題(3.4)により，インパルス応答 $g \in X$ により

$f(a) = \hat{\Phi}(a) g$ と表わされるから 連続力学写像が上式により表現されると考えることができる。

4. 入出力写像

出力力学空間として，力学空間 $(F(R^+), S_l)$ の部分空間 (Γ, S_l) であり，包含写像 $i : \Gamma \to F(R^+)$ が連続なものを考える。入力力学空間 (Ω, S_l) として $(M_c(R^+), S_r)$ の拡張，又は縮小となっているものを考える．（入力力学空間としては $(\Omega(-\infty, 0], S_l)$ i.e. 過去の入力関数空間と左移動作用素

を考えるべきであるが，$t \mapsto -t$ の変換を施し，$(\Omega[0,\infty), S_r)$ を入力力学空間と考えることにする．

<u>(4.1) 定義</u>　入出力写像 $f:\Omega\to\Gamma$ は 入力力学空間 (Ω, S_r) から 出力力学空間 (Γ, S_ℓ) への連続な力学写像である．

<u>(4.2) 例</u>　$f: A(R^+)\to F(R^+)$. $(\Omega, S_r) = (A(R^+), S_r)$ $(\Gamma, S_\ell) = (F(R^+), S_\ell)$ とする．　定理 (3.2) により 全ての入出力写像 f に対し　$a\in F(R^+)$ (インパルス応答) が一意に存在し　$f\omega = a\Delta\omega = \hat{S}_\ell(\omega)a$ となる．　逆に 全ての $a\in F(R^+)$ に対して，$f = a\Delta = \hat{S}_\ell(\cdot)a$ は 入出力写像である．

<u>(4.3) 例</u>　$f: M_c(R^+)\longrightarrow C(R^+)$, $(\Omega, S_r) = (M_c(R^+), S_r)$　$(\Gamma, S_\ell) = (F(R^+), S_\ell)$ とする。前節最後の説明により 入出力写像 f に対し インパルス応答 $g\in\Gamma$ が存在し

$$f = \hat{S}_\ell(\cdot)g \quad , \quad f(\omega) = \hat{S}_\ell(\omega)g = \int S_r(t)g\,d\omega$$

と表わされる。　逆に 全ての $g\in\Gamma$ に対し $f = \hat{S}_\ell(\cdot)g$ は 入出力写像である。この例の場合 (3.3) 型の命題 (命題 (3.3) は使用出来ないが，これを少し精密にすれば) により　$a\in C(R^+)$ が存在し，$f(\omega) = a\Delta\omega$, $(f\omega)(t) = \langle S_r(t)\omega, a\rangle = \langle$

$S_l(H)\, q, w>$　とも書ける。　$a=g$ が容易に求められる。

5. 実現と状態射

入力力学空間 (Ω, S_r)　出力力学空間 (Γ, S_l) と 入出力写像 $f : \Omega \to \Gamma$ が与えられたとする．

(5.1) 定義　入出力写像 f に対する実現は　力学系 $\Sigma_f = (X, G, H)$ である．但し $X((X, \Phi))$ は　力学空間で状態空間といわれ，$G : \Omega \to X$　$H : X \to \Gamma$　は　各々連続力学写像であり　次の図が可換なものである。

G と H は　各々　入力写像，出力写像といわれる。

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "G"'] & & \Gamma \\
& X \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}
$$

(5.2) 例　入出力写像 $f : \Omega \to \Gamma$ に対し　標準的分解

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f^s"] & \Gamma \\
\Omega/\mathrm{Ker} f \arrow[ur, "f^i"] \arrow[r, dash, "f^b"'] & \mathrm{Im} f \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
$$

が存在する。ここで $\Omega/\mathrm{Ker} f$ は商空間　$\mathrm{Im} f$ は Γ の部分空間であり，各々．力学空間である。$\Sigma^{in} = (\Omega, I_\Omega, f)$, $\Sigma^{o} = (\Gamma, f, I_\Gamma)$

$\Sigma^{q}=(\Omega/\ker f,\ \pi,\ f^{s})$, $\Sigma^{i}=(\mathrm{Im} f,\ f,\ j)$ は 各々 実現である。Σ^{in} と Σ^{o} は自明な実現であり Σ^{q} は商実現 Σ^{i} は像実現である。

<u>(5.3) 定義</u> 一つの実現 $\Sigma_1=(X_1, G_1, H_1)$ からもう一つの実現 $\Sigma_2=(X_2, G_2, H_2)$ への状態射は 次の条件を満たす関係 $T_{12}: X_1 \to X_2$ である。

$$Gr(T_{12}^{min}) \subseteq Gr(T_{12}) \subseteq Gr(T_{12}^{max})$$

但し $T_{12}^{min}=G_2 G_1^{-1}$ $T_{12}^{max}=H_2^{-1} H_1$ であり, $Gr(T_{12})$ は 関係 T_{12} のグラフである。

この状態射の定義は S. Eilenberg[10] の状態射の定義を修正したものである。 次の補題は重要である。

<u>(5.4) 補題</u> $Gr(T_{12}^{max})$ は

a) 積力学空間 $(X_1 \times X_2, \Phi_1 \times \Phi_2)$ の部分力学空間であり,

b) 閉集合 である。

<u>(5.5) 定義</u> 力学系 $\Sigma=(X, G, H)$ は G が全射のとき 到達可能であり, H が単射のとき 観測可能であるという。到達可能で 観測可能な実現を 正準実現という。

<u>（5.6） 命題</u>　$\Sigma_1=(X_1, G_1, H_1)$ が到達可能であり，$\Sigma_2=(X_2, G_2, H_2)$ が観測可能であれば

a) $T_{12}^{max}=T_{12}^{min}$ であり，唯一の状態射 $T_{12}: X_1\to X_2$ が存在し

b) T_{12} は力学写像であり

c) $Gr(T_{12})$ は閉である。

<u>（5.7） 定理</u>　Σ_1 と Σ_2 が 共に 正準実現であれば

a) T_{12} は 全単射であり

b) T_{12} は 力学写像である。

定理(5.7)により 代数的には 正準形の一意性が得られた。しかし 我々の目標は位相的にも T_{12} が同型であると結論することである。次にその条件を求めよう。

<u>（5.8） 命題</u>　任意の二つの正準形が位相的に同型であるための必要十分条件は Σ^i と Σ^g が位相的に同型（入出力写像 f が細射）であることである。

<u>（5.9） 命題</u>　Ω をノルム空間 X を分離的な局所凸空間とする。$f: \Omega\to X$ が 絶対連続な全射であれば f が細射であるための必十条件は，X が有限次元である事であ

る。

(5.10) 反例 $(\Omega, S_r) = (M_b^b(R^+), S_r)$ $(\Gamma, S_\ell) = (C_\infty(R^+), S_\ell)$とする. $C_\infty(R^+) \triangleq \{\varphi \in C(R^+) ; \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0\}$, $M_b(R^+) \triangleq C_\infty'(R^+)$. $M_b^b(R^+)$として $M_b(R^+)$に$\beta(M_b(R^+), C_\infty(R^+))$の位相を持った空間とする。全ての$a \in C_\infty(R^+)$に対し, $\omega \mapsto \hat{S}_\ell(\omega)a$は $M_b^b(R^+) \longrightarrow C_\infty(R^+)$への入出力写像である。この写像を$f_a$とする。アスコリ・アルチェラの定理([11])により, f_aが絶対連続であることがいえる。このような入出力写像に対しては有限次元系以外では,正準形の位相の一意性定理を得ることができない。

反例により 我々は 実現の空間Xに何らかの条件を付け加えねばならない。

6. 閉グラフ定理. 開写像定理. 位相同型定理

正準実現の位相同型定理を得るためには 状態解の位相的性質を利用しなければならない。それは命題(5.6)である。

(6.1) 閉グラフ性質 到達可能実現$\Sigma_r = (X_r, G_r, H_r)$

と　観測可能実現$\Sigma_o = (X_o, G_o, H_o)$に対し　閉グラフを持つ力学写像$T_{ro}: X_r \to X_o$が連続であるとき，対$(\Sigma_r, \Sigma_o)$は　閉グラフ性質を，持つという。

X_r, X_oが共にフレッシェ空間であれば　Banachの閉グラフ定理により　対(Σ_r, Σ_o)は　閉グラフ性質を持つ。

<u>(6.2)　定理</u>　　Σ_1とΣ_2が正準実現で　対(Σ_1, Σ_2)と対(Σ_2, Σ_1)が共に　閉グラフ性質を持てば　Σ_1とΣ_2は位相的にも同型である。

定理(6.2)から　閉グラフ性質が正準実現に対する位相同型定理が成立するための十分条件であることがわかる。

<u>(6.3)　開写像性質</u>　　(Ω, S_r)を入力力学空間　$\Sigma_r = (X_r, G_r, H_r)$を到達可能実現とする。入力写像$G_r: \Omega \to X_r$が開写像であるとき，$G_r$は　開写像性質を持つという。

ΩとX_rが　共にフレッシェ空間であれば，Banachの開写像定理により，写像G_rは開写像である。

(6.4) 定理　$\Sigma_1=(X_1, G_1, H_1)$と$\Sigma_2=(X_2, G_2, H_2)$を$G_1:\Omega\to X_1$, $G_2:\Omega\to X_2$が共に開写像性を満たす正準実現とする．そこで，Σ_1とΣ_2は位相的にも同型となる。

この定理により，開写像性質が正準実現に対する位相同型定理が成立するための十分条件であることがわかる。

以上により，問題は，何時，閉グラフ性質と開写像性質が成立するかである。今後，我々は到達可能実現を樽型空間に限定する。その理由は，第1に　樽型空間は非常に良い性質（例えば，Banach-Steinhausの定理が成立する．等）第2に　樽型空間は重要な空間を含んでいる（バナッハ空間，フレッシェ空間，ベール空間 等）からである。　又 我々は到達可能実現が樽型空間であれば，閉グラフ性質と開グラフ性質が共に　正準実現に対する位相同型定理が成立するための必要条件であることを示すことができる。（[1]）

次に　我々の閉グラフ定理と開写像を述べよう。

(6.5) 閉グラフ定理　Σ_0を観測可能実現とすると次の条件は等価である。

1)　全ての樽型到達可能実現$\Sigma_r=(X_r, G_r, H_r)$は，閉グラ

つ性質（6.1）を持つ。（この性質のことを X_0 が観測位相を持つということう。）

2) X_0 の位相は次の等価な条件を満たす.

a) $H_0^{-1}: (\mathrm{Im} f)^b \longrightarrow X_0$ が連続.

b) $H_{oc}: (X_{oc})^b \longrightarrow (\mathrm{Im} f)^b$ は位相同型.

c) $(\mathrm{Im} f)' \xrightarrow{H_{oc}'} X_{oc}' \xrightarrow{(H_{oc}^{-1})'} \overline{(\mathrm{Im} f)'}$ は弱位相で連続.

3) $H_{oc}'(\Gamma') \subset L$ となる X_{oc}' の任意の部分力学空間 L に対し，$\overline{L} \cap X_{oc}' = L = X_{oc}'$ が成立する。

ここで，$X_{oc} = H_0^{-1}(\mathrm{Im} f)$，$H_{oc}$ は H_0 の X_{oc} への制限，X^b は X に附随する樽型位相（X の位相よりも強い樽型位相の中で一番弱いもの），$\overline{X}$ は X の弱位相における準完備化である。

定理（6.5）により，樽型正準実現 Σ_c が観測位相を持つための必要十分条件は，X_c が $(\mathrm{Im} f)^b$ と位相的に同型であること，すなわち，樽型正準実現間に位相同型定理が成立するための必要十分条件は，X_c，$(\mathrm{Im} f)^b$ が位相同型であることとなる。

<u>（6.6）開写像定理</u>　Ω を入力空間とすれば，次の条件は等価である。

1) 任意の樽型到達可能実現 $\Sigma_r = (X_r, G_r, H_r)$ に対し，

$G_r : \Omega \to X_r$ が開写像性質を持つ。(このことを Ω が入力位相を持つといおう.)

2) S は $\ker f$ の閉部分空間であり, Ω/S は商空間位相よりも弱く Γ より誘導される位相より強い樽型位相 $\mathcal{T}_b$ を持っているとする. そこで

$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega/S\ (\mathcal{T}_b)$

$f_S : \Omega/S \longrightarrow (\mathrm{Im} f)^b$

は細射である.

3) $f'(\overline{(\mathrm{Im} f)'})$ を含む Ω' の任意の部分空間 L が次の性質を満たすと仮定する。$\sigma(\Omega', \Omega)$ で閉有界な全ての L の部分集合は, 等連続であり, $\sigma(\Omega', \Omega)$ コンパクトである。そこで, L は $\sigma(\Omega', \Omega)$ の位相で閉となる。

定理(6.6)により もし樽型正準実現 Σ_c が一つでも存在すれば, それは $\Omega/\ker f$ と $(\mathrm{Im} f)^b$ に位相的に同型であることになる。バナッハ空間 フレッシェ空間, LF 空間は入力位相を持つ. 又, フレッシェ空間 Γ の共役空間 $\Omega = \Gamma'$ は $\sigma(\Omega, \Gamma) < \mathcal{T} < \tau(\Omega, \Gamma)$ なる任意の位相 $\mathcal{T}$ に対し入力位相となる.

REFERENCE

[1] T.Matsuo, Realization Theory of Linear Topological Systems, Ph.D.Dissertation, Univ. of Florida, U.S.A.1976

[2] Bourbaki 「位相線形空間」 東京図書

[3] G.Köthe, "Topological Vector Spaces 1" Springer, 1969

[4] H.H.Schaefer "Topological Vector Spaces" Macm.

[5] R.E.Kalman, P.L.Falb and M.A.Arbib "Topics in Mathemat. System Theory" McGraw-Hill, 1969

[6] K.Yoshida,"Functional Analysis" Springer, 1965

[7] T.Komura, Semi-Groups of Operators in Locally Convex Spaces, J.Funct.Analy.2 1968

[8] S.Ouchi, Semi-Groups of Operators in Locally Convex Spaces, J.Math.Soc.Jap.Vol.25,No.2 1973

[9] Hille and Phillips, "Functional Analysis and Semi-Groups" Amer.Mat.Soc.Colloq. 1957

[10] S.Eilenberg,"Automata,Languages and Machines,Vol.A" Academic Press, 1974

[11] Bourbaki 「位 相」 東京図書