

On Some Non-Coercive Boundary Value Problems

東工大 理 平 良 和 昭

ここでは, Laplace 作用素に対する種々の境界値問題の Spectrum の所在と Resolvent の評価について考察する. 応用として, 熱方程式に対する混合問題と波動方程式に対する (自己共役な) 混合問題についてふれる. 詳細は [16], [17], [18] に発表される予定である.

§ 0. 記号

$\Omega = \mathbb{R}^n$ の有界な領域, $\Gamma = \Omega$ の滑らかな境界. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. $a, b, c = \Gamma$ 上の滑らかな実数値函数;
 $\alpha, \beta, \gamma = \Gamma$ 上の滑らかな実ベクトル場; $n = \Gamma$ の外向き単位法線ベクトル. $H^s(\Omega) = \Omega$ 上の s 次の Sobolev 空間, $\|\cdot\|_s = H^s(\Omega)$ の norm; $H^s(\Gamma) = \Gamma$ 上の s 次の Sobolev 空間, $\|\cdot\|_s = H^s(\Gamma)$ の norm.

§ 1. Laplace作用素に対する境界値問題

複素数 λ を含む次の問題を考える:

$$(*) \begin{cases} (\lambda + \Delta) u = f & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}u \equiv a \frac{\partial u}{\partial n} + (\alpha + i\beta)u + (b + ic)u \Big|_P = \phi & \text{on } P. \end{cases}$$

問題 (*) に付随して, $A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ なる非有界作用素を

$$\mathcal{D}(A) = \{ u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ and } \mathcal{B}u = 0 \},$$

$$Au = \Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

と定義する.

例 1 ([2], §7). $\beta \equiv 0$ とする. 次の仮定をおく.

(A-1) $\Gamma_0 = \{ x \in P; a(x) = 0 \}$ は P の $(n-2)$ 次元 regular 部分多様体.

(B-1) ベクトル場 α は Γ_0 に transversal.

(C-1) $t=0$ のとき $x_0 \in \Gamma_0$ を通る α の積分曲線に沿って, $a(x(t, x_0))$ は高々 $2k_0$ 次の偶数次の零点をもつ.

このとき

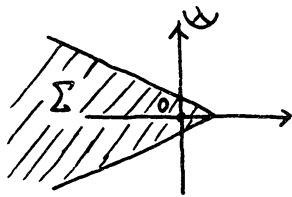
定理 1-1 ([18], Theorem). $\lambda = Re^{i\theta}$, $R \geq 0$, $0 < \theta < 2\pi$, $\delta_0 = \frac{1}{2k_0+1}$

とする. 仮定 (A-1), (B-1), (C-1) が成立すれば, 任意の整数 $s \geq 2$ に対して θ と s のみによる定数 $R_1(\theta) > 0$ が存在して, もし $|\lambda| = R \geq R_1(\theta)$ ならば任意の $f \in H^{s,2}(\Omega)$ と $\phi \in H^{s-k_0}(P)$ に対して一意的な (*) の解 $u \in H^{s-1+\delta_0}(\Omega)$ が存在して, 次の a priori 評価が成り立つ.

$$\|u\|_{s-1+\delta_0}^2 + |\lambda|^{s-1+\delta_0} \|u\|_0^2 \leq C_1 \left(\|f\|_{s-2}^2 + |\lambda|^{s-2} \|f\|_0^2 + |\phi|_{s-\frac{1}{2}}^2 + |\lambda|^{s-\frac{1}{2}} |\phi|_0^2 \right).$$

ここで, $C_1 > 0$ は θ と s のみによる定数 ■

系 1-2 ([10], 定理 4.12). $\mathcal{D}(A) \subset H^{1+\delta_0}(\Omega)$ であって, A の Resolvent $(\lambda - A)^{-1}$ が $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ (図参照) で存在し



$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C_1}{|\lambda|^{\frac{1+\delta_0}{2}}}$$

なる評価をみたす ■

例 2 ([3]). $a \equiv 1$ とする. 少し記号を導入する.

$T^*P = P$ の cotangent bundle, $(x, \xi) = T^*P$ の local coordinates.

$\alpha(x, \xi), \beta(x, \xi) =$ それぞれベクトル場 $\alpha(x)/h, \beta(x)/h$ の symbol.

$\operatorname{div} \alpha(x) =$ ベクトル場 $\alpha(x)$ の発散. $M(x) =$ 超曲面 $P \subset \mathbb{R}^n$ の平均曲率, $\omega_x(\cdot, \cdot) =$ 超曲面 P の第 2 基本形式.

次の仮定をおく.

(A-2) $|\beta(x)| \leq 1$ on P . ($|\beta(x)|$ は接ベクトル $\beta(x)$ の長さ)

(B-2) 定数 $C_2 > 0$ が存在して

$$|d(x, \xi)| \leq C_2 (|\xi| - \beta(x, \xi)) \quad \text{on } T^*P \setminus 0.$$

(C-2) $|\beta(x)| = 1$ なる $x \in P$ では, P の Riemann 計量による同一視によつて $\beta(x) \in T_x P$ に対応する $\xi \in T_x^* P$ に対し

$$\begin{aligned} \widetilde{\operatorname{Tr}}_{|\xi| - \beta(x, \xi)} H(x, \xi) + 2b(x) - \operatorname{div} \alpha(x) + \omega_x(\beta(x), \beta(x)) \\ - (n-1)M(x) > 0. \end{aligned}$$

\Rightarrow で, $\tilde{T}_r H_{|31-\beta(x,3)}(x,3)$ は $p(x,3) = |31-\beta(x,3)$ ((A-2) によつて $p \geq 0$ on $T^*P(0)$) の「Hessian」 \in Symplectic 構造によつて表現した行列^(†) の固有値 (= λ は 0 か 純虚数とその共役からなる) の $\sqrt{2}$ 倍のうち正のものとの和 ([13], §2).

このとき

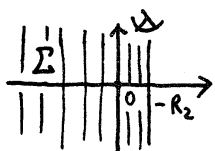
定理 2-1 ([17], Theorem 3). 仮定 (A-2), (B-2), (C-2) が成立すれば, 任意の整数 $s \geq 2$ に対し $(\lambda$ にも s にもよる) 定数 $R_2 \leq 0$ が存在して, もし $\operatorname{Re} \lambda < R_2$ ならば任意の $f \in H^{s^2}(\Omega)$ と $\phi \in H^{s-\frac{1}{2}}(P)$ に対し一意的な (*) の解 $u \in H^{s-1}(\Omega)$ が存在する。

定理の証明は次の系を含んでいる。

系 2-2 ([17], Corollary 1). $\mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$ であり, $\mathcal{D}(A)$

$$-\operatorname{Re}(Au, u) \geq R_2 \|u\|_0^2, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

従つて, A の Resolvent $(\lambda - A)^{-1}$ が半平面 $\{\lambda; \operatorname{Re} \lambda > -R_2\}$ で存在し



$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda + R_2} \quad \blacksquare$$

さらに

系 2-3 ([17], Corollary 2). A の共役 $A^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ は次で

与えられる。

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ v \in H^1(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega) \text{ and } \frac{\partial v}{\partial n} + (-d + i\beta)v + (b - \operatorname{div} d - ic + i \operatorname{div} \beta)v \Big|_P = 0 \right\},$$

$$A^* v = \Delta v, \quad v \in \mathcal{D}(A^*) \quad \blacksquare$$

^(†) [9] では基本行列, [4], [5] では Hamilton map とよばれている。

例 3 ([11]). $\alpha = a\gamma$, $\beta \equiv 0$ とする. 次を仮定する.

$$(A-3) \quad a(x) \geq 0 \quad \text{on } P.$$

$$(B-3) \quad b(x) > 0 \quad \text{on } P_0 = \{x \in P; a(x) = 0\}.$$

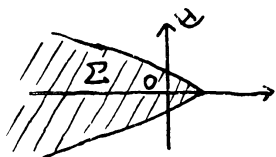
このとき

定理 3-1 ([16], Theorem 1). $\lambda = R e^{i\theta}$, $R \geq 0$, $0 < \theta < 2\pi$ とする. 仮定 (A-3), (B-3) が成立すれば, 任意の整数 $s \geq 2$ に対し θ と s のみによる定数 $R_s(\theta) > 0$ が存在して, もし $|\lambda| = R \geq R_s(\theta)$ ならば任意の $f \in H^{s-2}(\Omega)$ と $\phi \in H^{s-\frac{1}{2}}(P)$ に対し一意的な Δ の解 $u \in H^s(\Omega)$ が存在して, 次の a priori 評価が成り立つ.

$$\|u\|_s^2 + |\lambda|^s \|u\|_0^2 \leq C_3 (\|f\|_{s-2}^2 + |\lambda|^{s-2} \|f\|_0^2 + |\phi|_{s-\frac{1}{2}}^2 + |\lambda|^{s-\frac{1}{2}} |\phi|_0^2).$$

ここで, $C_3 > 0$ は θ と s のみによる定数 ■

系 3-2 ([16], Theorem 2). $\mathcal{D}(A) \subset H^2(\Omega)$ であって, A の Resolvent $(\lambda - A)^{-1}$ が $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ で存在し



$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C_3}{|\lambda|} \quad \blacksquare$$

系 3-3 ([16], Corollary). 次を仮定する.

$$(C-3) \quad \operatorname{div} \gamma(x) \equiv 0 \quad \text{on } P.$$

このとき A の共役 $A^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ は次で与えられる.

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ v \in H^2(\Omega); a \left(\frac{\partial v}{\partial n} - \gamma v \right) + (b - ic)v \Big|_P = 0 \right\},$$

$$A^* v = \Delta v, \quad v \in \mathcal{D}(A^*) \quad \blacksquare$$

§ 2. 熱方程式に対する混合問題

次の問題を考える:

$$(**) \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) u = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (T > 0) \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \mathcal{B}u \equiv a \frac{\partial u}{\partial n} + (\alpha + i\beta)u + (b + ic)u = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, T). \end{cases}$$

以下 $I \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\Sigma_t^j(I; X) = \{I \text{ 上の } X\text{-値 ; 回連続的微分可能函数}\}$$

を表す. (X は Banach 空間)

例 1 $\beta \equiv 0$ とする. 系 1-2 と Krein [12] の定理 6.8 より

定理 1-3 (A-1), (B-1), (C-1) を仮定する. もし $f(x, t) \in \Sigma_t^0([0, T]; L^2(\Omega))$ であり, $Af(x, t) \in \Sigma_t^0([0, T]; L^2(\Omega))$ ならば, 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ に対して一意的な (***) の解 $u(x, t) \in \Sigma_t^1((0, T]; L^2(\Omega)) \cap \Sigma_t^0((0, T]; H^{1+\delta_0}(\Omega)) \cap \Sigma_t^0([0, T]; L^2(\Omega))$ が存在する ■

例 2 $a \equiv 1$ とする. 系 2-2 と 溝畑 [15] の定理 5.6 より

定理 2-4 (A-2), (B-2), (C-2) を仮定する. もし $f(x, t) \in \Sigma_t^0([0, T]; L^2(\Omega))$ であり, $Af(x, t) \in \Sigma_t^0([0, T]; L^2(\Omega))$ ならば, 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ に対して一意的な (***) の解 $u(x, t) \in \Sigma_t^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \Sigma_t^0([0, T]; H^1(\Omega))$ が存在する ■

例 3 $\alpha = \alpha_0$, $\beta \equiv 0$ とする. 系 3-2 と 溝畑 [15] の定理 5.8 より

定理 3-4 (cf. [16], Theorem 3). (A-3), (B-3) を仮定する.

もし 定数 $C_4 > 0$ が存在して

$$\|f(x, t) - f(x, t')\|_0 \leq C_4 |t - t'|^\varepsilon \quad (0 < \varepsilon \leq 1)$$

ならば, 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ に対して一意的な (***) の解 $u(x, t) \in \mathcal{E}_t^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{E}_t^0([0, T]; H^2(\Omega))$ が存在する ■

§ 3. 波動方程式に対する混合問題

次の問題を考える:

$$(***) \begin{cases} \square u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1, \\ \mathcal{B}u \equiv a \frac{\partial u}{\partial n} + (\alpha + i\beta)u + (b + ic)u = 0 & \text{on } P \times (0, T). \end{cases}$$

以下では例 2 と例 3 の 自己共役 になる場合を考察する。

例 2' $a \equiv 1, \alpha \equiv 0$ とする。次を仮定する。

$$(A-2) \quad |\beta(x)| \leq 1 \quad \text{on } P.$$

(C-2)' $|\beta(x)| = 1$ なる $x \in P$ では, P の Riemann 計量による同一視によ, $\beta(x) \in \mathbb{T}_x P$ に対応する $\xi \in \mathbb{T}_x^* P$ に対して

$$\tilde{\mathbb{T}}_x H_{|\beta| - \beta(x, \xi)}(x, \xi) + 2b(x) + \omega_x(\beta(x), \beta(x)) - (n-1)M(x) > 0.$$

$$(D-2) \quad c(x) = \frac{1}{2} \operatorname{div} \beta(x) \quad \text{on } P.$$

このとき系 2-2 と系 2-3 より $A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ は上に有界な自己共役作用素である。 $-A > 0$ としてよ。

$$B = \sqrt{-1} (-A)^{1/2}$$

と置く。 $(B^2 = A)$ よく知られた推論により (cf. [6])

定理 2-5 (A-2), (C-2)', (D-2) を仮定する. このとき

1° (Energy 不等式) $u(x, t) \in \Sigma_t^0([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap \Sigma_t^1([0, T]; \mathcal{D}(B))$
 $\cap \Sigma_t^2([0, T]; L^2(\Omega))$ に対して

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_0 + \|Bu(t)\|_0 + \|u'(t)\|_0 \\ & \leq C_5 \left[\|u(0)\|_0 + \|Bu(0)\|_0 + \|u'(0)\|_0 + \int_0^t \|\square u(s)\|_0 ds \right]. \end{aligned}$$

ここで, $C_5 > 0$ は T のみによる定数.

2° (存在定理) 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $u_1 \in \mathcal{D}(B)$, $f(x, t) \in \Sigma_t^1([0, T]; L^2(\Omega))$ に対して一意的存在 (***) の解 $u(x, t) \in \Sigma_t^0([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap \Sigma_t^1([0, T]; \mathcal{D}(B)) \cap \Sigma_t^2([0, T]; L^2(\Omega))$ が存在して次の Energy 不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_0 + \|Au(t)\|_0 + \|u'(t)\|_0 + \|Bu'(t)\|_0 + \|u''(t)\|_0 \\ & \leq C_6 \left[\|u(0)\|_0 + \|Au(0)\|_0 + \|u'(0)\|_0 + \|Bu'(0)\|_0 + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0 ds \right]. \end{aligned}$$

ここで, $C_6 > 0$ は T のみによる定数 ■

注意 2-6 $|\beta(x)| < 1$ on Γ の場合は, Agemi [1], Miyatake [4] の研究がある.

例 3' ([7], [8]) $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 0$, $c \equiv 0$ とする. (A-3), (B-3) を仮定する. このとき定理 3-1 と系 3-3 より $A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ は上に有界な自己共役作用素である. 従って例 2' と同様に

定理 3-5 (A-3), (B-3) を仮定する. このとき

1° (Energy 不等式) $u(x, t) \in \Sigma_t^0([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap \Sigma_t^1([0, T]; \mathcal{D}(B))$
 $\cap \Sigma_t^2([0, T]; L^2(\Omega))$ に対して

$$\|u(t)\|_0 + \|Bu(t)\|_0 + \|u'(t)\|_0$$

$$\leq C_7 \left[\|u(0)\|_0 + \|Bu(0)\|_0 + \|u'(0)\|_0 + \int_0^t \|\square u(s)\|_0 ds \right].$$

ここで, $C_7 > 0$ は T のみによる定数.

2° (存在定理) 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $u_1 \in \mathcal{D}(B)$, $f(x, t) \in \Sigma_t^1([0, T]; L^2(\Omega))$ に対して一意的な (***) の解 $u(x, t) \in \Sigma_t^0([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap \Sigma_t^1([0, T]; \mathcal{D}(B)) \cap \Sigma_t^2([0, T]; L^2(\Omega))$ が存在して次の Energy 不等式が成り立つ.

$$\|u(t)\|_2 + \|u'(t)\|_0 + \|Bu'(t)\|_0 + \|u''(t)\|_0$$

$$\leq C_8 \left[\|u(0)\|_2 + \|u'(0)\|_0 + \|Bu'(0)\|_0 + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0 ds \right].$$

ここで, $C_8 > 0$ は T のみによる定数 ■

注意 3-6 $b = 1 - a \geq 0$ on P の場合は, $\mathcal{D}(B)$ を具体的に記述することはできる ([7]).

References

- [1] Agemi, R.: Remarks on L^2 -well-posed mixed problems for hyperbolic equations of second order, Hokkaido Math. J., II (1973), 214-230.
- [2] Egorov, Ju.V., and V.A. Kondrat'ev: The oblique derivative problem, Math. USSR Sb., 7 (1969), 139-169.
- [3] Fujiwara, D., and K. Uchiyama: On some dissipative boundary value problems for the Laplacian, J. Math. Soc. Japan, 27 (1971), 625-635.
- [4] Hörmander, L.: On the Cauchy problem for differential equations

- with double characteristics (to appear).
- [5] Hörmander, L.: A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics (to appear).
- [6] Ikawa, M.: Mixed problems for hyperbolic equations of second order, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 580-608.
- [7] Inoue, A.: On a mixed problem for \square with discontinuous boundary condition (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21 (1974), 85-92.
- [8] 伊藤清三 偏微分方程式 培風館 (1966).
- [9] Ivrii, V.Ia., and V.M. Petkov: Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations, Usp. Mat. Nauk, 19 (1974), 3-70.
- [10] 鍛治明 Non-coercive 境界値問題について, 東京大学修士論文 (1973).
- [11] Kaji, A.: On the degenerate oblique derivative problems, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 1-5.
- [12] Krein, S.G.: Banach 空間における線型微分方程式 (牛島・辻風訳) 吉岡書店 (1972).
- [13] Melin, L.: Lower bounds for pseudo-differential operators, Ark. för Mat., 9 (1971), 117-140.
- [14] Miyatake, S.: Mixed problems for hyperbolic equations of second order with first order complex boundary operators, Japan. J. Math., 1 (1975), 111-158.
- [15] 溝畑茂 偏微分方程式論 岩波書店 (1965).
- [16] Taira, K.: On some degenerate oblique derivative problems (to appear).
- [17] ———: On some non-coercive boundary value problems for the Laplacian (to appear).
- [18] ———: On a degenerate oblique derivative problem with a complex parameter (to appear).