数理解析研究所講究録
第 281 巻 1976 年 30-39

$\bar{\partial}$-Neumann 問題の解の大域的実解析性

東北大 理 大学院 小松 玄

§0. 序

本稿の目的は，いわゆる $\bar{\partial}$-Neumann 問題の解の，境界の近傍での大域的実解析性について論ずることである．

この問題の C^∞ 級の準楕円性は Kohn [3] によって初め示されたが，現在最も標準的と思われる証明は，Kohn-Nirenberg [4] によって与えられたものである．それは subelliptic estimate を a priori 評価式とするものであるが，その方法で解の実解析性を示すことは困難と思われる．

ここでは，境界の近傍で定義されたある特別な vector 場を用いて，解のその方向の derivatives をまず評価することによって解の実解析性を導く．その vector 場は，Levi form が非退化ならば構成でき，commutators の評価を可能にする．

L. Nirenberg 教授によれば，最近 Derridj と Tartakoff が同様の結果を得たとのことである（[7] の序文）．

§1. 結果

Mを$\mathbb{C}^n$内の領域で，compactな閉包$\overline{M}$と実解析的な境界bMを持つものとする．rをbMからの距離函数で，Mの内部に負，外部に正として測ったものとする．Ω'_ρをbMの$\mathbb{C}^n$における十分小さい幅ρの管状近傍とし，$\Omega_\rho = \Omega'_\rho \cap \overline{M}$とおく．$\Omega'_\rho$上のtangent bundleの複素化を$\mathbb{C}T$とし，そのsubbundle T_tを

$$T_t = \{ X \in \mathbb{C}T \, ; \ \langle dr, X \rangle = 0 \}$$

により定義する．ここで$\langle \, , \, \rangle$はcovectorsとvectorsの間のdualityである．さらに$T^{1,0}$及び$T^{0,1}$をそれぞれ$(1,0)$及び$(0,1)$型のvectorsから成る$\mathbb{C}T$のsubbundleとし，

$$T_t^{1,0} = T^{1,0} \cap T_t , \qquad T_t^{0,1} = T^{0,1} \cap T_t$$

とおく．この時，点$P \in \Omega'_\rho$における<u>Levi form</u>が，$T_t^{1,0}$の点Pにおけるfibre $(T_t^{1,0})_P$上のHermite形式として，

$$(T_t^{1,0})_P \times (T_t^{1,0})_P \ni (X_1, X_2) \longmapsto \langle \partial\bar{\partial} r, X_1 \wedge \overline{X_2} \rangle$$

によって定義される．ここで$\overline{X_2}$はX_2の複素共役である．

$\mathcal{Q}^{p,q}$を$\overline{M}$上の(p,q)-formsで$\mathbb{C}^n$へのC^∞拡張を持つものの空間とし，$\mathcal{Q}^{p,q}$の元に対するL^2-内積を次の様に定義する：

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle \varphi, \psi \rangle dV , \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{Q}^{p,q} .$$

ここで，$\langle \, , \, \rangle$は$\mathbb{C}^n$の標準的なHermite計量によるpointwiseな内積で，dVはM上の体積要素である．さてCauchy-Riemann作用素$\bar{\partial} : \mathcal{Q}^{p,q-1} \to \mathcal{Q}^{p,q}$とそのformal adjoint $\vartheta : \mathcal{Q}^{p,q} \to \mathcal{Q}^{p,q-1}$

に対して，部分積分により次の等式を得る：

$$(\vartheta\varphi, \psi) = (\varphi, \bar{\partial}\psi) + \int_{bM} \langle \sigma(\vartheta, dr)\varphi, \psi \rangle dS.$$

ここで $\sigma(\cdot, dr)$ は作用素・の dr における主symbolで，dS は bM 上の体積要素である．これを考えに入れて，

$$\mathcal{D}^{p,q} = \{ \varphi \in \mathcal{Q}^{p,q} ; \sigma(\vartheta, dr)\varphi = 0 \quad \text{on } bM \}$$

とおき，$\mathcal{D}^{p,q}$ 上の二次形式を，$\varphi, \psi \in \mathcal{D}^{p,q}$ に対して，

$$Q(\varphi, \psi) = (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\psi) + (\vartheta\varphi, \vartheta\psi) + (\varphi, \psi)$$

によって定義する．

次の変分問題の解の，実解析的な regularity を考えよう．

<u>問題</u>（[1, 3, 4]）．$q > 0$ とし，$\lambda \in \mathbb{C}$，$\alpha \in \mathcal{Q}^{p,q}$ が与えられたとき，次の方程式（1）を満たす $\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}$ を求めよ：

$$(1) \quad Q(\varphi, \psi) + (\lambda\varphi, \psi) = (\alpha, \psi) \qquad \text{for } \forall \psi \in \mathcal{D}^{p,q}.$$

我々の定理は次の通りである．

<u>定理</u>．Ω'_p 上で Levi form は非退化であり，その負の固有値の個数は q 個ではないとする．この時，方程式（1）の任意の解 $\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}$ は，α が Ω_p で実解析的ならば，やはりそこで実解析的である．

(注意1). この定理は，実解析的な Hermite 計量を持つ複素多様体内の領域 M の場合に容易に拡張される．

(注意2). この定理における Levi form に関する条件は，

(イ) Ω'_p の各点で，Levi form は非退化であり，

(ロ) そこで正の固有値を $n-q$ 個以上持つか，又は負の固有値を $q+1$ 個以上持つ

ことと同値である．条件(ロ)は我々の a priori 評価式(補題1)の成立を保証し，条件(イ)は補題2における vector 場の構成を可能にする．

§2. a priori 評価式

$\mathfrak{A}_p^{p,q}$ を Ω_p 内に support を持つ $\mathfrak{A}^{p,q}$ の元の空間とし，$\mathfrak{D}_p^{p,q} = \mathfrak{D}^{p,q} \cap \mathfrak{A}_p^{p,q}$ とおく．さて $\bar{n} = \sigma(-\bar{\partial}\vartheta, dr)$ とすると，$\bar{n}: \mathfrak{A}_p^{p,q} \to \mathfrak{A}_p^{p,q}$ は内積 $\langle , \rangle$ に関する直交射影である．$\Gamma(\cdot)$ を vector bundle $\cdot$ の Ω'_p 上の sections の空間とし，$\nabla_X : \mathfrak{A}_p^{p,q} \to \mathfrak{A}_p^{p,q}$ を vector 場 $X \in \Gamma(\mathbb{C}T)$ に沿う(複素)共変微分とする．さて，$\tilde{\nabla}_X : \mathfrak{A}_p^{p,q} \to \mathfrak{A}_p^{p,q}$ を bundle 的に次の様に定義する：

$$\tilde{\nabla}_X = \bar{n}\nabla_X \bar{n} + (1-\bar{n})\nabla_X(1-\bar{n}), \qquad X \in \Gamma(\mathbb{C}T).$$

この時，$X \in \Gamma(T_t)$ に対して $\tilde{\nabla}_X$ は $\mathfrak{D}_p^{p,q}$ をそれ自身にうつす．

$R \in \Gamma(T^{1,0})$ を ∂r の dual とし，$T^{1,0}$ の局所正規直交基底

$L_1, \cdots, L_n = R$ を使って，$\psi \in \mathcal{D}_\rho^{p,q}$ に対して

$$N(\psi) = \left(\int_M \left(\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\nabla}_{L_i}\psi|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |\tilde{\nabla}_{\bar{L}_i}\psi|^2 + |\psi|^2 \right) dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく（ここで $|\psi|^2 = \langle \psi, \psi \rangle$）．この時 $N(\psi)$ は基底 (L_i) の取り方によらずに $\psi \in \mathcal{D}_\rho^{p,q}$ に対して well-defined である．

さて，$\mathcal{D}^{p,q}$ 上で basic estimate が成立するとは，

(2) $\exists C > 0$ s.t. $\int_{bM} |\psi|^2 dS \leq C\, Q(\psi, \psi)$ for $\forall \psi \in \mathcal{D}^{p,q}$

をいう．§1 の注意 2 における条件（ロ）は (2) と同値である（[2]）から，我々の仮定のもとで (2) は成立する．さて，

補題 1（a priori 評価式）．$\mathcal{D}^{p,q}$ において basic estimate が成立しているとすると，ある $C > 0$ が存在して，

$$\frac{1}{C} N(\psi)^2 \leq Q(\psi, \psi) \leq C\, N(\psi)^2 \qquad \text{for } \forall \psi \in \mathcal{D}_\rho^{p,q}.$$

§3. ある特別な vector 場

我々の定理の証明は，いわゆる "commutators の評価" に基くが，次の補題における vector 場 Y は，そこでの評価において本質的な役割りを果たす．

補題2. Ω'_ρ において Levi form が非退化とする. この時, もし ρ が十分小さければ, 次の性質を持つ実解析的な vector 場 $Y \in \Gamma(T_t)$, $\overline{Y} = -Y$ が存在する:

(3) $\langle \partial r, [X, Y] \rangle = 0$ in Ω'_ρ for $\forall X \in \Gamma(T_t^{1,0} \oplus T_t^{0,1})$,

(4) $\langle \partial r, [\overline{R}, Y] \rangle = 0$ on bM, $\langle \partial r, Y \rangle = 1$ on bM.

ここで, $[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1$ とする.

(証明) $T^{1,0}$ の局所正規直交基底 $L_1, \cdots, L_n = R$ を取り, $(\lambda_{i\bar{j}})_{1 \le i,j \le n}$ 及び $(\lambda^{i\bar{j}})_{1 \le i,j \le n-1}$ を次の様に定義する:

$$\lambda_{i\bar{j}} = \langle \partial\bar{\partial} r, L_i \wedge \overline{L}_j \rangle, \quad \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{k\bar{j}} \lambda^{i\bar{j}} = \delta_k^i \quad (k < n).$$

さて求める vector 場 Y が局所的に, 函数 u, v^j, w^j により,

$$Y = u(R - \overline{R}) + \sum_{j=1}^{n-1} v^j L_j - \sum_{j=1}^{n-1} \overline{w}^j \overline{L}_j$$

と書かれたとすると, 条件(3)は次の様に書き直される:

$$v^j = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{j\bar{i}} (\overline{L}_i - \lambda_{n\bar{i}}) u, \quad \overline{w}^j = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i\bar{j}} (L_i - \lambda_{i\bar{n}}) u.$$

この式によって v^j, w^j を決めれば, 条件(4)は, Ω'_ρ 全体で基底 (L_i) の取り方によらずに定義された一階微分作用素

$$P = \overline{R} - \lambda_{n\bar{n}} - \sum_{i,j=1}^{n-1} \lambda_{j\bar{n}} \lambda^{j\bar{i}} (\overline{L}_i - \lambda_{n\bar{i}})$$

によって次の様に書き表わされる:

(5) $\quad \rho u = 0 \quad$ on bM, $\qquad u = 1 \quad$ on bM.

従って(5)の実数値の解 u で，Ω'_ρ において実解析的なものを求めればよいが，作用素 $P - \bar{P}$ が一階の項のみから成り（従って vector 場と見られ），$\langle dr, P - \bar{P} \rangle = 0$ であることに注意すれば，(5) は，次の初期値問題に帰着される：

(6) $\quad (P + \bar{P})u = 0 \quad$ in Ω_ρ, $\qquad u = 1 \quad$ on bM.

作用素 $P + \bar{P}$ に関して初期曲面 bM は非特性的であり，$P + \bar{P}$ は実数値実解析的な係数を持つから，ρ が十分小さければ，Cauchy-Kowalewski の定理により，(6) は Ω'_ρ で実解析的な実数値解 u を持つ．

q.e.d.

§4. 定理の証明の概略

$T_t^{1,0} \oplus T_t^{0,1}$ を Ω'_ρ の各点で張るような実解析的な vector 場 $Z_1, \cdots, Z_{2n} \in \Gamma(T_t^{1,0} \oplus T_t^{0,1})$ を取り，順序のついた整数の組 $K = (\kappa_1, \cdots, \kappa_\ell)$，$1 \leq \kappa_i \leq 2n$ に対して，$|K| = \ell$，$\tilde{\nabla}_Z{}^K = \tilde{\nabla}_{Z_{\kappa_1}} \cdots \tilde{\nabla}_{Z_{\kappa_\ell}}$ と書き，$\psi \in \mathcal{D}_\rho^{p,q}$ に対して次の様におく：

$$N(\psi; \ell, m) = \frac{1}{(\ell + m)!} \max_{|K| = \ell} N(\tilde{\nabla}_Z{}^K \tilde{\nabla}_Y{}^m \psi).$$

さて，方程式(1)の解 φ が，複素 Laplacian $\Box = \bar{\partial}\vartheta + \vartheta\bar{\partial}$ に関する次の二階微分方程式を満たすことを想い起こそう：

$$\square\varphi + (\lambda + 1)\varphi = \alpha .$$

作用素$\square$は実解析的係数を持ちかつ楕円型であるから，解φのΩ_Pにおける実解析性はαのそれから従い，φのbMの近傍での実解析性は，Holmgrenの定理よりφのbM上でのCauchy dataのそれから従うことは良く知られている（[6]）.

ζを，Ω'_Pにsupportを持つrのみに依存する函数で，bMの近傍で恒等的に1であるものとする．この時，φのCauchy dataの実解析性は，次の評価式と同値である：

$$(7)\quad N(\zeta\varphi; \ell, m) \leq C_0 C_1{}^{\ell} C_2{}^{m} \qquad \text{for } \forall \ell \geqq 0,\ \forall m \geqq 0 .$$

さて，$\zeta\varphi$がいわゆる$\underline{\bar\partial\text{-Neumann}条件}$

$$\zeta\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}, \qquad \bar\partial(\zeta\varphi) \in \mathcal{D}^{p,q+1}$$

を満たすことより，$D = \tilde\nabla_Z{}^{K}\tilde\nabla_Y{}^{m}$，$|K| = \ell$に対して，

$$Q(\zeta\varphi, D^*D\zeta\varphi) + (\lambda\zeta\varphi, D^*D\zeta\varphi) = ((\square + \lambda + 1)\zeta\varphi, D^*D\zeta\varphi),$$

（ここでD^*はDのformal adjoint），が成立するから，補題1により，(7)の証明はnorm Nによる

$$(8)\quad Q(D\zeta\varphi, D\zeta\varphi) - Q(\zeta\varphi, D^*D\zeta\varphi), \quad D = \tilde\nabla_Z{}^{K}\tilde\nabla_Y{}^{m}, \quad |K| = \ell ,$$

の評価に帰着される．

(7)は二段階の帰納法によって証明される．(7)はまず$\ell = 0$の場合に，対応する(8)の評価をinductiveに用いる

ことにより示される．$\ell > 0$ の場合は，対応する(8)の評価と，$\ell = 0$ の場合の結果を併用することによって，やはり inductive に証明される．

(8)の評価は，次に述べる $\bar{\partial}$ と ϑ に対する局所表示に注意すれば，補題2における vector 場 Y の性質を使ってなされる：$L_1, \cdots, L_n = R$ を $T^{1,0}$ の局所正規直交基底とし，$\omega^1, \cdots, \omega^n = \partial r$ をその dual basis とする時，$\psi \in \mathfrak{A}_p^{p,q}$ に対して局所的に，

$$\bar{\partial}\psi = \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}^i \wedge \tilde{\nabla}_{\bar{L}_i}\psi + (\psi \text{を微分しない項}),$$

$$\vartheta\psi = -\sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}^i \vee \tilde{\nabla}_{L_i}\psi + (\psi \text{を微分しない項})$$

と書かれる．ここで $\vee$ は，$\langle \zeta \vee \omega, \theta \rangle = \langle \omega, \zeta \wedge \theta \rangle$ によって定義される contraction operation である．

詳しくは[5]を見られたい．

文　献

[1] G. B. Folland and J. J. Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Ann. of Math. Studies, No. 75, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1972).

[2] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., 113 (1965), 89-152.

[3] J. J. Kohn, Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds. I, Ann. of Math., 78 (1963), 112-148; II, ibid., 79 (1964), 450-472.

[4] J. J. Kohn and L. Nirenberg, Non-coercive boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 443-492.

[5] G. Komatsu, Global analytic-hypoellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem, to appear in Tôhoku Math. J., 28, 1 (1976).

[6] C. B. Morrey, Jr. and L. Nirenberg, On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), 271-290.

[7] D. S. Tartakoff, On the real analyticity of solutions to $\Box_b$ on compact manifolds, preprint.