

Coxeter Groups に伴随する, weighted homogeneous polynomial の microlocal structure

(with Appendix on GL(2))

天野 環 (京大理 D.C.)

奥口 次郎 (")

Abstract.

有限 Coxeter System (W, S) の fundamental anti-invariant J の 2 乗を, fundamental invariants の 函数と見ると: $f(x) = (J(x))^2$. f の複素平面上の微局所構造は, S の部分系が生成した W の部分群の共役類により特徴づけられる。本小文に於いては, f の共役類, fundamental invariants, f に不変に作用する Lie 環 (i.e. $x f \in \mathcal{O} f$) 等の構造を決定する。又, f^* は f の共役類^{*} として, (W, S) の不変量 k_i により, $f(x) = \prod_{i=1}^l \prod_{k=1}^{k_i-1} (x + \frac{1}{2} + \frac{k}{k_i})$ と表すことができると予想される。Appendix に於いて, GL(2) の invariant に由来する, simple な多項式の可能性についてのみ検討を述べておく。

* cf [2]

§0. Introduction

§1. Coxeter System

§2. 基本定理

§3. A_n, B_n, D_n § A_n , § B_n , § D_n .

§4. 例外型 § E_6 , § E_7 , § F_4

§5. Root System \leftrightarrow 対応する Coxeter groups.

§ $I_2(m)$ (G_2), § H_3 , § H_4 .

§0. Introduction

(W_n, S) を既約有限 Coxeter System (cf §1), $V^* = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}\xi_i$ は γ の標準表現空間の dual space, ξ_1, \dots, ξ_n は orthonormal basis とする. 基本不変式 (homogeneous) $\Sigma x_1, \dots, x_n$, $k_i = \deg_{\xi} x_i$, 基本反不変式を J とおく. J^2 は不変式環, $f_{W_n}(x) = (J(x))^2$ と表示される. このとき,

holonomic system $\mathcal{R}_\alpha \cong \mathcal{O}[S]f^\alpha / (\alpha - \alpha)\mathcal{O}[S]f^\alpha$ の (α : generic) holonomy diagram は, γ の Lagrangians および, (W_n, S) の S の subset S' が生成した群 $W_{S'}$ の 変換類 と対応し, γ の order は S' の diagram の頂点の数であり, S'' は, S' の s - (辺) α 元をはずしたものであるとき, 対応する Lagrangians は codimension 1 の交わりを持つ. さらに, γ の Lagrangians はすべて simple であり, order は S' の diagram より与えられる.

f_{W_x} の h 函数は (i.e. $P(\partial, x, D)f^{\partial+1} = h(\partial)f^{\partial+2}$ for $h(\partial)$)

$$h_{W_x}(\rho) = \prod_{i=1}^l \prod_{k=1}^{k_i-1} \left(\rho + \frac{1}{2} + \frac{k}{k_i} \right)$$

と予想させている。

矢野は f_{A_ℓ} $2 \leq \ell \leq 6$ について, f が simple であることとを指摘し, 佐藤は任意の f_{A_ℓ} について構造を決定した。矢野は任意の Coxeter Group に対して, f についての Lagrangians が simple となり, codim, order を決定した, 交わりも知ることのできることを示した (cf §2) 又, f_{W_x} に関する micro local structure, f_{W_x} を不変にする Lie 環について (基本不変式の決定も言及), 矢野-佐藤の構造を示した。 (未決定のものもある。) 特に F_4 については, 図によると3が多し。

A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ については, f_{W_x} は, U の中の判別式に手を加えたものとなる。判別式は $\begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{matrix}$ 不変であるが, $(SL(5) \times GL(4); \mathbb{R} \oplus \mathbb{R})$ なる prehomogeneous vector space によれば, f のある orbit への localization として, $\begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{matrix}$ 不変な, 判別式と同じ weight を持つ, simple な多項式が求まることがある。この様な多項式として, どの様なものがあるのかという問題も佐藤が提出した。これについては, 佐藤-矢野-佐藤は部分的結果を得た。これについては Appendix において述べよう。

§1. Coxeter System

Coxeter System (W_L, S) とは群 W_L と W_L の生成元 s の集合 $S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$ とするとき, $\Gamma_{(A_{ij})}^{m_{ij}} = 1$.

$m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2 (i \neq j)$ (基本関係である)。

$\therefore m_{ij} = \infty$ もあり得る。 \mathbb{R}^l の basis $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ に対して

$$\sigma_i(e_j) = e_j + 2\omega \frac{\pi}{m_{ij}} \cdot e_i \quad \text{と定めておく。} \quad \sigma: W_L \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^l)$$

$s_i \mapsto \sigma_i$ は単射であり, W_L は $\sigma(W_L)$ と同一視できる。

(W_L, S) の graph とは, s_i に対応する l 個の頂点 \bigcirc_i があり, i, j と $m_{ij} \geq 3$ のとき m_{ij} 本の辺 $\overset{m_{ij}}{\text{---}}$ とある。 $m_{ij} = 3$ のときは \times 標上の m_{ij} をはたす。 分らない場合は, (W_L, S) は既約である。

W_L が有限群であるためには, 行列 $(-\omega \frac{\pi}{m_{ij}})_{ij}$ が正定値であることが必要かつ十分。 このとき, \mathbb{R}^l に

$\langle e_i, e_j \rangle = -\omega \frac{\pi}{m_{ij}}$ により内積を定めれば, s_i は \mathbb{R}^l の正規直交基底であることにより, $\sigma(W_L) \subset O(l)$ (直交群) と存在できる。

以後我々は有限 Coxeter group のことを指す。

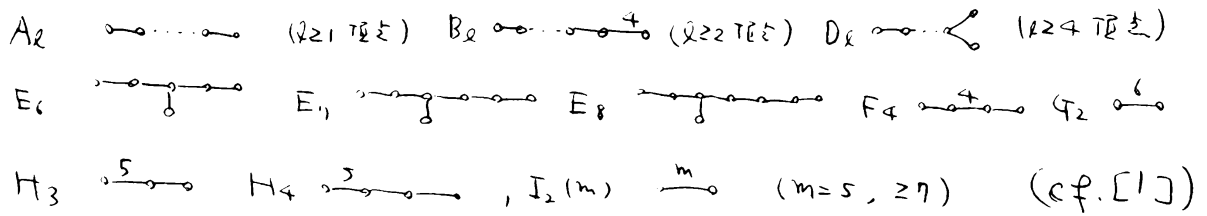
W_L は $O(l)$ の有限部分群と同一視し, s_i と S_i と同一視する。 (W_L, S) は, S の分割 $S = \sqcup S_i$ があり, S_i の生成した W_L の部分群を W_{LS_i} とする。 s_i は既約

Coxeter System (W_{LS_i}, S_i) であり, $W_L = \prod W_{LS_i}$,

したがって W_{LS_i} の表現空間 V_i に対して, $\mathbb{R}^l = \bigoplus V_i$ となる。

Theorem (W, S) ^が 既約有限 Coxeter System (2) \exists $\alpha = 2\pi$, γ の

分の Δ^n 型の n 次元多面体と同型であることは同値である。



以下一般に (W_ℓ, S) $1 < \ell$ W_ℓ \cong $W_{2\ell}$ \cong $W_{4\ell}$... 上の n 次元多面体を示す。又、元の同形により、 W_ℓ は $O(E)$ ($\mathcal{U}(E^*)$) の有限部分群と同視し、 S_i は対応した reflection s_i を表すとす。 $c = s_1 \dots s_\ell$ は Coxeter 変換 とし u , c の order $\in \mathbb{N}$ (Coxeter number とす)。 (S_i の順序を i 位の i 位とせ)

$$\det(T-c) = \prod_{j=1}^{\ell} (T - \exp \frac{2\pi i m_j}{h}) \quad 0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_\ell \leq h$$

$(m_1, \dots, m_\ell) \in W_\ell$ の exponents とす。 $\sum m_i = \frac{1}{2} \ell h$,

$$1 = m_1 < m_2 \leq \dots \leq m_{\ell-1} < m_\ell = h-1$$

E の正規直交基底と内積 $(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}$ に注意して

E_1, \dots, E_ℓ とす。 E の元 x 一般に $\sum \xi_i e_i$ と表すことは、 E^* は

$\oplus \mathbb{R}\xi_i$ と同視される。 $S(E^*)$ は E^* の symmetric alg.

(従って $\mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_\ell]$ と同視) $R = S(E^*)^{W_\ell}$ は W_ℓ の作用

による不変元の多項式環とす。又、 H は、 W_ℓ の鏡映全体の

集合とし、 $g \in H$ ならば、 g が不変にする超平面 (鏡映面)

の定義方程式を $e_j(\xi) = 0$ と記す。

Theorem (1) $S(E^*)$ is a graded free R -module of rank $\#W_\ell$.

(2) There are homogeneous elements x_1, \dots, x_ℓ in R , such that

$$R \simeq R[x_1, \dots, x_\ell] \text{ and } k_i = \deg_{\xi} x_i = m_i + 1.$$

(3) $\prod k_i = \#W_\ell$, $\#H = \sum (k_i - 1) = \frac{1}{2} \ell h$.

(4) $S(E^*) \ni z$ is, $\forall s \in S$ is for (, $s(z) = -z$ is not true,
 反不変式 (と 11) ; $D = \prod_{g \in H} e_g(\xi)$ (この基本反不変式 (と 11))

と 11) ; $D = \prod_{g \in H} e_g(\xi)$ (この基本反不変式 (と 11))

と 11) ; 反不変式 至るは RD に一致する。

(5) $\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \lambda D \quad \lambda \neq 0. \quad (\text{cf [1]})$

(4) より $\boxed{f(x) = D^2}$ は不変式で, (3) より weighted homogeneous of type $(k_1, \dots, k_\ell; \ell h)$ である。この考察の対象となる。

$k_1 = 2, 3 \leq k_i, W_\ell \subset \mathcal{O}(E^*)$ より, $x_i = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \dots + \xi_\ell^2)$ である。

次に, f を不変にする Lie 環を構成 (と 11) ;

$$g_{ij}(x) = \sum_R \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \text{ とおく。 } W_\ell \subset \mathcal{O}(E^*) \text{ より, 2 と 11}$$

W_ℓ -invariant である。 χ は

$$X_i = \sum g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

と定義する。 ξ 座標で (と 11) ; $X_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ であり,

この W_ℓ -inv. であることは, 上記の如くに x 座標で表示

して (と 11) とするときは (と 11) ; $X_i D = \sum \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial D}{\partial \xi_k}$ は反不変

式であることは分かるので, (4) より $X_i D \in \mathbb{C}[x]D$.

$$\therefore X_i f = 2 (X_i D) D = c_i(\alpha) f$$

特に $\#_0 X_2 = \sum f_k \frac{\partial}{\partial f_k} = \sum k_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ (2.17'),

$$X_1 f = 2h f.$$

$$\det(g_{ij}) = X^2 D^2 = X^2 f \quad \text{より, (iv)} \quad X_1, \dots, X_\ell \text{ は } \mathcal{O}_X \text{ 上}$$

locally free, かつ

$$\mathcal{O}_f = \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{O} X_i$$

(2.17'), $\mathcal{O}_f = \{ X: \text{vectorfield} \mid Xf \in \mathcal{O}f \}$ である = 2.17

わかる. [3]. 但し, 後に \mathcal{O}_f が, f^α の各 Lagrangians 上

simple holonomic system を与えることを示すので, $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_f$ である

を示す (も必要ではない).

\mathcal{O}_f が f^α の各 f^α の annihilators $X_i - c_i(\alpha) \partial$ の生成 (右 $\mathcal{D}[\alpha]$ の ideal $\mathcal{I}[\alpha]$) である.

$$\pi' = \mathcal{D}[\alpha] / \mathcal{I}[\alpha],$$

$$\pi'_\alpha = \mathcal{D} / \mathcal{I}[\alpha] \quad (\mathcal{I}[\alpha] = \{ P(\alpha) \mid P(\alpha) \in \mathcal{I}[\alpha] \})$$

が以下の考察の対象である.

§2. 基本定理.

記号は前 § のままとする. 表現空間 E を複素化し, $V = \mathbb{C} \otimes E$

$V^* = \mathbb{C} \otimes E^*$ とおく. $\text{map } \{\} \mapsto (x)$ は, $f=0$ の分だけ

$$\begin{array}{ccc}
 (5) \quad V_{\xi}^* & \supset \{D=0\} & \#W_{\ell} \text{ 重の covering になる. } \\
 \downarrow \swarrow W_{\ell} & \downarrow & f(x) \text{ は weighted homogeneous of} \\
 (x) \quad \mathbb{C}_x^{\ell} & \supset \{f=0\} & \text{type } (k_1, \dots, k_{\ell}; \ell h) \text{ である.} \\
 & & (x) \text{ の dual 座標を } (y) \text{ とする.}
 \end{array}$$

Theorem

(1) $\check{S}S f^{\lambda}$ (λ generic $\in \mathbb{C}$) は \check{S} の simple holonomic set よりなり, 特に原座 conormal になる principal symbol は

$$\eta_1^{-\frac{1}{2}\ell h(s+\frac{1}{2}) - \frac{\ell}{2}} \sqrt{dy_1 \dots dy_{\ell}}$$

従って, $\text{order} = -\frac{1}{2}\ell h(s+\frac{1}{2})$

$\{X_1, \dots, X_{\ell}\}$ は 原座 conormal になる simple である.

(2) $\check{S} f^{\lambda}$ の holonomy diagram の各 Lagrangians は, 次の形に書ける. S の部分集合全体の集合に, 同値関係

$$S' \sim S'' \iff S' \text{ が } W_{\ell} \text{ 内で生成した部分群と } S'' \text{ の生成子が } W_{\ell} \text{ 内で一致}$$

を入れた類別する*. \check{S} の各類が一つの Lagrangian を表かし,

\check{S} の codimension は $\#S'$, S' により定まる Coxeter system の

既約分母を $\Pi(W_i, S'_i)$, $\ell_i = \#S'_i$, Coxeter number of $W_i = h_i$ と

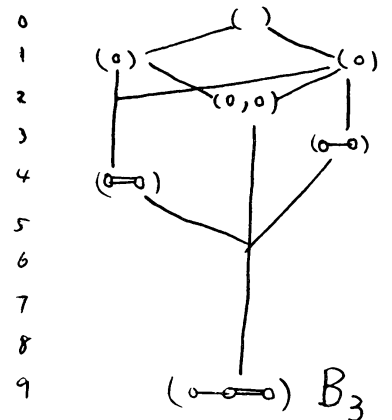
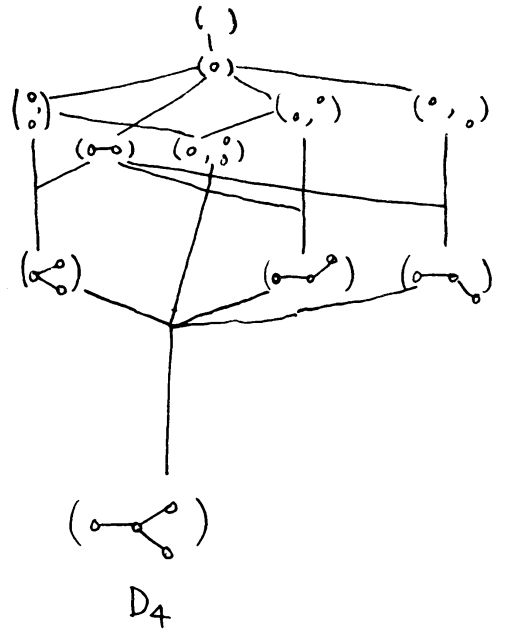
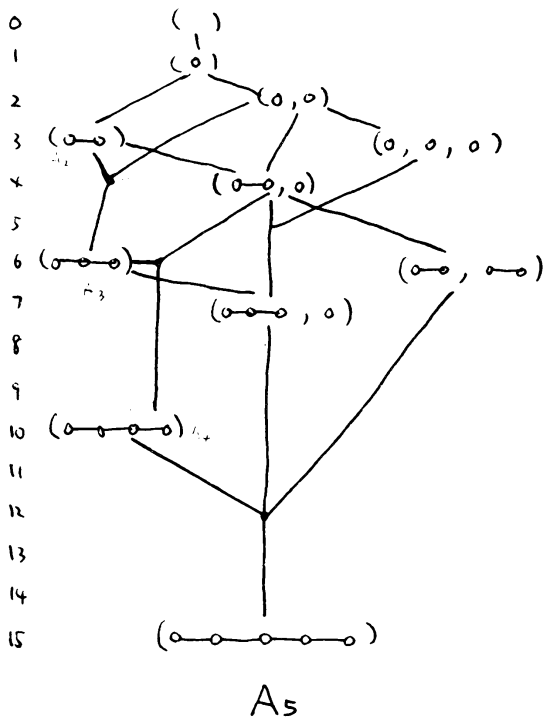
$$\text{order} = -\frac{1}{2}(\sum \ell_i h_i)(s+\frac{1}{2}). \quad \text{又, } S'_i \text{ が } j \text{ への}$$

既約分母を $\Pi(W_j, S'_j)$ とする. $\{S'_i, S'_j\}$ とする.

* $A_{\ell}, E_6, H_3, H_4, I_2(2m+1)$ には S' と S'' の異なる等しい生成子を持つ部分群が存在する.

$\{S_{ij}''\}$ に対応する Lagrangians は, S' と $\frac{1}{|S|}$ ($|S|=3$) で交わり, $i \neq i'$ に対して, $\{S_{ij}''\}$ は S' に対応する交わりは, 又別の $|S|=3$ である.*

(2) の statement はおろそかにして「 \dots 」が, 実際により意味をなす。実際は holonomy diagram をおこし, 2つの Lagrangian 間で別の 2カ所^{以上}で交かっているとき, γ の S を γ で代用させて毎に多くの値をいかなる。



これでおかすように, 部分群の
 互役類が関係するだけ, A型以外は
 複雑である。(たとえば D_5 では
 $(\circ-\circ-\circ)$ と $(\circ-\circ-\circ)$ は 互役に
 なる)

* γ の他に交かっている γ' と γ'' がある

Theorem 2

以下 Γ の 3 つの段階に於いて,

$$e_{\lambda_i}(\xi) = \varphi_i(\xi) \geq 0 \quad \text{diagram } (o \text{---} o \text{---} \dots)$$

とす。この $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}$ に対して, $\{\varphi_{i_1}(\xi) = \dots = \varphi_{i_j}(\xi) = 0\}$ は

$F(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j})$ の χ -space に λ の T -等価の normal を

$\Lambda(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j})$ と記す。面分 F は $S' = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}\}$ の生成した

部分群の固定点全体である。 $S'' = \{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}\}$ に対して,

$$gW_{S''}g = W_{S'}, \quad gF(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}) = F(k_{i_1}, \dots, k_{i_j}) \quad \text{又,}$$

とす。この λ は λ を λ^* と表わして, 面分全体の集合に於いて,

W の orbit を λ と表わして λ^* と, W に於いて, S の部分集合

が生成した部分群の共役類と $1-1$ に対応する。

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow W, \quad V_\lambda \Leftrightarrow \{e\}. \quad \text{又, Coxeter 群は}$$

とす。この λ は λ と表わして, S の 1 個の元の共役 σ により,

Γ の diagram に於いて奇数とした部分により

生成した λ により。従って, 余次元 1 の面分の

同値類は $A_n, D_n, E_n, H_3, H_4, I_2(2m+1)$ であり。

$B_n, F_4, G_2, I_2(2m)$ であり。 (これは λ の

既約でないか, 2 つの既約因みに分解されるか) である。

* λ の χ -space $F(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j})$ の χ は g の作用による。 λ は λ と表わして, λ を λ と表わして部分群の共役。
 ** λ は W で λ に λ と表わして, λ は λ と表わして。

一般に, $\forall \xi \in H = \mathbb{R}^L$
 $e_g(\xi_0) = 0$ とするが,

$e_g((\text{grad}_\xi X_i)(\xi_0)) = 0$ は容易にわかる。すなわち, infinitesimal action $\xi \mapsto \xi + \varepsilon(\text{grad}_\xi X_i)(\xi)$ により $\{e_g(\xi) = 0\}$ は安定であり, よって各 $F(i_1, \dots, i_j)$ は X_1, \dots, X_ℓ の作用で安定である。
 $F(i_1, \dots, i_j)$ の generic point では, $\text{corank}(g_{ik}) = j$, 即ち $F(i_1, \dots, i_j)$ は \mathcal{O}_{X_i} の orbit である。 $\ell = 2$ は, 一般に

$A_2, B_2, D_2, F_4, G_2, H_3, I_2(n)$

により ℓ 個の ξ に $\xi = 0$ と直接し, $\xi \neq 0$ は, 一般に $\ell = 2$ の場合の方法で次元 1 の面分に ~~直接~~ 帰着させる。

次元 1 の面分 F をとる。例として $\varphi_1(\xi) = \dots = \varphi_{\ell-1}(\xi) = 0$ とせよ。
 F/W_{reg} の generic point では $\text{rank}(g_{ik}) = 1$ である。実際, 前記の仮定により, $\text{rank}(g_{ik}) \leq 1$ である。もし $\text{rank}(g_{ik}) = 0$ ならば, $X_1 = X_2 = \dots = X_\ell = 0$ と仮定して ($\because X_i$ の仮定) より $\xi_1 = \dots = \xi_\ell = 0$ を得るので矛盾である。 F の generic point では ξ が直交する $\ell-1$ 次元空間 V' をとれるが, ξ は $e_1, \dots, e_{\ell-1}$ の基底 (直交基底) を生成したものであり, 従って V' により W の作用は $(S_1, \dots, S_{\ell-1})$ により与えられる Coxeter 群の作用であり, D の $V' \cap \mathfrak{a}$ の判別は ξ の基本反変形式になる。よって, F/W_{reg} の generic point では, ξ が transversal な方向への localization $\pi', (W_{S'}, S')$ $S' = (S_1, \dots, S_{\ell-1})$ に対応する f' とする。

* 特異点, $\mathcal{O}^{\ell} \setminus \{f=0\}$ 上では $\text{corank}(g_{ik}) = 0$ より $\mathcal{O}^{\ell} \setminus \{f=0\}$ は $\mathcal{O} = \sum \mathcal{O}_x X_i$ の orbit.

又、次元 2 の面分 F' , $\eta_1 = \dots = \eta_{l-2} = 0$ は、 F において
 次元 1 の面分とみられる、従って F/W_x $\text{rank}(f_{ik}) = 1+1=2$ である。
 よって、 $\check{S}S \& f^A$ に束縛されるのは、面分 $/W_x$ の π_3 のみである。

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g_{jj} = k_j x_j \text{ であることから,}$$

$\alpha(x_1) - \alpha(x_l)$ の $T_{(0,0)}^*(\mathbb{R}^l)$ において simple であることは明らかである。
 (中の lemma) - F の F/W_x の conormal i.e. $\Lambda(\eta_1, \dots, \eta_l)$
 において、対応した Coxeter 群の既約表現に等しい、simple な
 多項式の表現を共有する表現になるから simple である。

同様に conormal において principal symbol は、Lie 環の π_3
 から、 η_2, \dots, η_l を含むものは α の π_3 に含まれる、 $k_1 = 2$,
 $\sum k_i = \frac{1}{2}lh + l$ を考慮すれば、 $\eta_1 = \frac{1}{2}lh(1+\frac{1}{2}) - \frac{l}{2}\sqrt{d\eta_1 - d\eta_2}$
 を得る。

次に交わりを考慮する。次元 1 の面分 F は、ある real numbers
 (a_1, \dots, a_l) により $\{(a_1 t^2, \dots, a_l t^{k_l})\}$ の π_3 を (ていよ) π_3 (ていよ)。
 F/W_x は $\{(A_1 t^2, A_2 t^{k_2}, \dots, A_l t^{k_l})\}$ であり、 $\alpha = A_1 = \sum a_i^2 \neq 0$ 。
 \Rightarrow tangent は $(2A_1 t, k_2 A_2 t^{k_2-1}, \dots, k_l A_l t^{k_l-1})$ であり
 conormal vector (η_1, \dots, η_l) は $t \neq 0$ において

$$2A_1 \eta_1 + \sum k_i A_i \eta_i t^{k_i-2} = 0 \text{ を満たす必要はない。}$$

よって、 $F/W_x \otimes$ conormal bundle と、 $T_{(0,0)}^*(\mathbb{R}^l)$ の交わりは
 $t=0$ $\eta_1 = 0$ によって決まる。(これは principal symbol $\sum a_i^2$ $\neq 0$ (交わり) による)

従って、一般の F/w_x においては、それに対応する G の
 連結成分としては、このように交わりがある。これ以外に
 交わりがないかどうかわからない。一般的には証明できて
 いないが、 $A_x, B_x, G_2, I_2(m)$ については参考にしたが
 いる。 D_x は少しおもしろい。 F_4 ^{H_3} については
 Lagrangian 2 本で決まってしまう。それについては ⁽¹³⁾ に未だ
 不明である。 E, E_p ^{他の例も種類で} は不明である。

E_p 以外の G の holonomy diagram は (13) に載せて
 ある。

§3. A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ .

t に ついて m 次式 $x_0 t^h + x_1 t^{h-1} + \dots + x_n$ の判別式 Δ

$\Delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$ と記す。

$$f_{A_\ell} = \Delta(1, 0, x_2, \dots, x_{\ell+1})$$

$$f_{B_\ell} = x_\ell \Delta(1, x_1, x_2, \dots, x_\ell)$$

$$f_{D_\ell} = \Delta(1, x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell^2)$$

と Δ を用いて表すことができる。 $\Delta(1, x_1, \dots, x_{\ell-1}, y^2)$ は simple τ

あり, 特には $\Delta(1, x_1, x_2, y^2)$ は prehomogeneous vector space

$(SL(3) \times SL(3) \times GL(2), \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ の codimension 4 の orbit

(order $-6s - \frac{8}{2}$) τ の localization になる。 τ の localization になる。

$(SL(5) \times GL(4), \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ に Δ によって A_2, A_3, A_4 を表すことができる。

$\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)$ は simple τ あり, $(GL(2), \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ の

relative invariant τ があるが, $-1/2$ の Δ は, monic, i.e. $\tau_0 = 1$

に (たまたま, 上記の上) なるものになる。 simple τ あり。

後に決定した Lie 環の形は,

$$\Delta(1, 0, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}, x_3, \dots, x_{\ell+1})$$

$$x_\ell \Delta(1, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}, x_2, \dots, x_\ell), \Delta(1, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}, x_2, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell^2)$$

$$\Delta(1, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}, x_2, \dots, x_{\ell-1}, y^2)$$

は $T_{\text{rel}} \tau$ は τ によって simple τ あり なるものになる。

基本変換式 (A_ℓ) $x_\nu = (\xi_1, \dots, \xi_{\ell+1})$ の ν 次基本対称式 $x(-)^\nu$

ただし $\xi_{\ell+1} = -(\xi_1 + \dots + \xi_\ell)$. $2 \leq \nu \leq \ell+1$.

(B_ℓ) $x_\nu = (\xi_1^2, \dots, \xi_\ell^2)$ の ν 次基本対称式 $x(-)^\nu$

$1 \leq \nu \leq \ell$.

(D_ℓ) $x_\nu = B_\ell$ と同じで $1 \leq \nu \leq \ell-1$, $x'_\ell = \xi_1 \dots \xi_\ell$.

よって Lie 環は、次の対称行列 (A_ℓ) (B_ℓ) (D_ℓ) により

± i) 決まる。ここで、 $p_n(t) = t^n + x_1 t^{n-1} + \dots + x_n$ と置く。

(A_ℓ) $(u^{\ell-1}, \dots, 1) (A_\ell) \begin{pmatrix} u^{\ell-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p_{\ell+1}(u)p'_{\ell+1}(v) - p'_{\ell+1}(u)p_{\ell+1}(v)}{u-v} \\ \vdots \\ +\frac{1}{\ell+1} p'_{\ell+1}(u)p'_{\ell+1}(v) \end{pmatrix} \Big|_{x_1=0}$
ℓ 次対称式に注意

(B_ℓ) $(u^{\ell-1}, \dots, 1) (B_\ell) \begin{pmatrix} u^{\ell-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{u p'_\ell(u) p_\ell(v) - p_\ell(u) \cdot v p'_\ell(v)}{u-v}$

(D_ℓ) $(D_\ell) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{2x'_\ell} \end{pmatrix} (B_\ell) \Big|_{x_\ell = x'^2_\ell} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{2x'_\ell} \end{pmatrix}$

Lie 環 \mathcal{U} .

[A_ℓ]

[B_ℓ]

[D_ℓ]

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{\ell-1} \end{pmatrix} = (A_\ell) \begin{pmatrix} D_\ell \\ \vdots \\ D_{\ell+1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{\ell-1} \end{pmatrix} = (B_\ell) \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_\ell \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{\ell-2} \\ X'_{\ell-1} \end{pmatrix} = (D_\ell) \begin{pmatrix} D_1 \\ D \\ \vdots \\ D_{\ell-2} \\ D'_\ell \end{pmatrix}$$

Lie環の上の様にして求た j 個 $\xi = \xi$ は, 例として (B₂) のとき, 次の様にかかす. $\psi(u) = \prod (u - \xi_i^2) = u^l + \alpha_1 u^{l-1} + \dots + \alpha_l$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{j,k} \left(\sum_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_i} \right) u^{l-j} v^{l-k} = \frac{1}{4} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \psi(u) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \psi(v) \\ &= \sum \xi_i^2 \frac{\psi(u)}{u - \xi_i^2} \frac{\psi(v)}{v - \xi_i^2} = \frac{\psi(u)\psi(v)}{u-v} \sum \left(\frac{\xi_i^2}{v - \xi_i^2} - \frac{\xi_i^2}{u - \xi_i^2} \right) \\ &= \frac{\psi(u)\psi(v)}{u-v} \left(\frac{v\psi'(v)}{\psi(v)} - \frac{u\psi'(u)}{\psi(u)} \right) \quad \left(\because \sum \frac{\xi_i^2}{u - \xi_i^2} = \sum \left(\frac{v}{u - \xi_i^2} - 1 \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. = u \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} - l \right) \\ &= \frac{\psi(u)v\psi'(v) - u\psi'(u)\psi(v)}{u-v}. \end{aligned}$$

我々の係数の都合上, 上の -1 倍を $\xi \rightarrow -\xi$ とし,

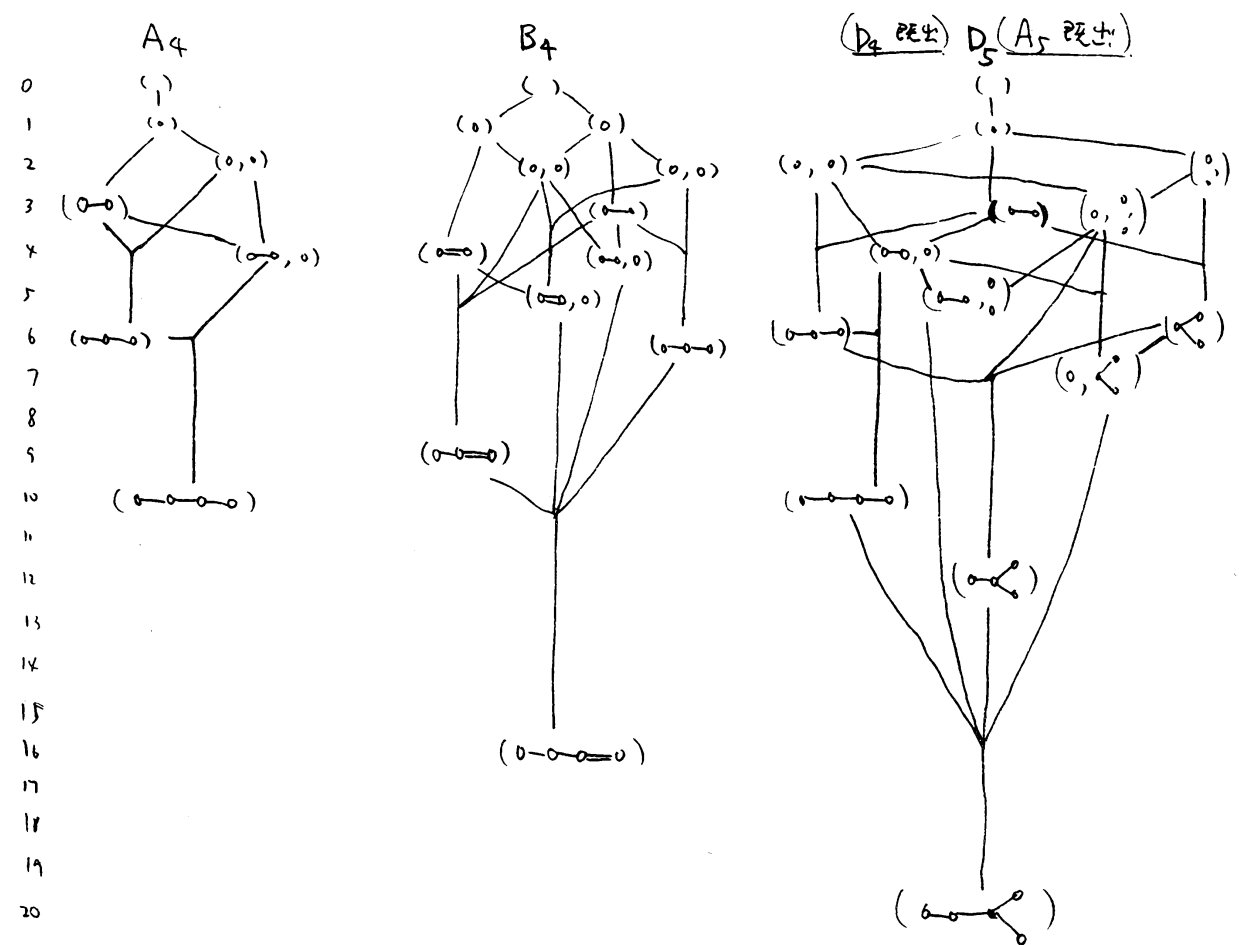
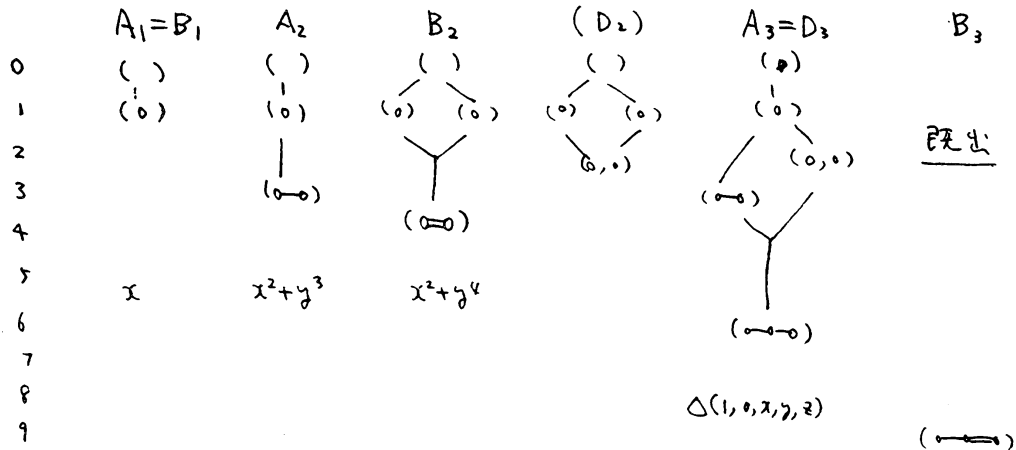
$\varphi(u) = \prod (u - \xi_i) = u^l + \alpha_1 u^{l-1} + \dots + \alpha_l$ であるとき, 同様にして

$$\sum_{j,k} \left(\sum_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_i} \right) u^{l-j} v^{l-k} = \frac{\varphi(u)\varphi'(v) - \varphi'(u)\varphi(v)}{u-v}$$

であることに注意しておく.

(A ₃)	$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$	(B ₄)	x_1	$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$
	$3x_3$	$4x_4 - x_2^2$	$-\frac{1}{2}x_2x_3$		$2x_2$	$3x_3 + x_1x_2$	$4x_4 + 2x_1x_3$	$3x_1x_4$
	$4x_4$	$-\frac{1}{2}x_2x_3$	$2x_2x_4 - \frac{3}{4}x_3^2$		$3x_3$	$4x_4 + 2x_1x_3$	$3x_1x_4 + x_2x_3$	$2x_2x_4$
					$4x_4$	$3x_1x_4$	$2x_2x_4$	x_3x_4

(D ₄)	x_1	$2x_2$	$2x_2'$	$3x_3$
	$2x_2$	$3x_3 + x_1x_2$	$\frac{3}{2}x_1x_2'$	$2x_1x_3 + 4x_2'^2$
	$2x_2'$	$\frac{3}{2}x_1x_2'$	$\frac{1}{4}x_3$	x_2x_2'
	$3x_3$	$2x_1x_3' + 4x_2'^2$	x_2x_2'	$x_2x_3 + 3x_1x_2'^2$



$(0-0-0) \approx (0-0-0) \approx (0-0-0)$
 (3) orbit $1 = \sigma_2 - A_3 =$
 $D_{2n} \approx D_{2n+2} \approx \dots \approx A_3 \approx \dots$
 $i = 2, 2 < d$ cf. D_4

{ A_ℓ ○—○—○—○—○

これは佐藤先生により示された。以下便宜上 $(\xi_1, \dots, \xi_{\ell+1})$

を用いて考察し, $\mathbb{R}_y^{\ell+1} \xrightarrow{\mathbb{G}_{\ell+1}} \mathbb{R}_x^{\ell+1}$, $X_U = (\xi_1, \dots, \xi_{\ell+1} \text{ の } U\text{-近傍の方程式}) \times (-)^U$

を用いる。 $f = \Delta(1, x_1, \dots, x_{\ell+1})$ は $\mathbb{R}_x^{\ell+1}$ の原点 conormal

には f の singular support を与える。 $(x, x, \dots, x) / \mathbb{G}_{\ell+1}$ は

$\Delta(1, 0, x_2, \dots, x_{\ell+1})$ の原点 conormal に対応する。

(s_1, \dots, s_ℓ) の部分集合の生成した部分群は, γ の diagram が同じでない限り, 明らかに互換である。よって, 各 holonomic set は

(m_1, \dots, m_k) $m_i \geq 1, \sum m_i = \ell+1$ なる 整数 の組により

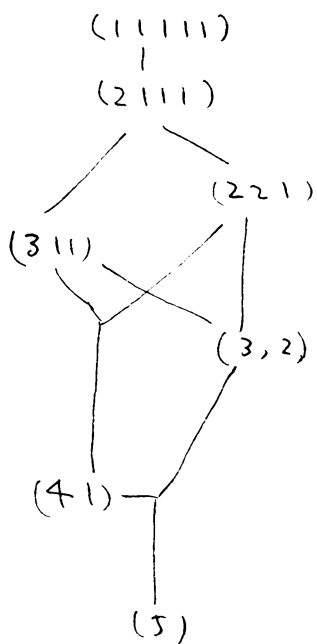
代表される。親子関係は, \rightarrow の m_i を, \leftarrow に分割することにより生じ,

交わりも生ずる (異なることばかりである。 (Y にはは不変式に f_U (U の和) をとるとよい。)

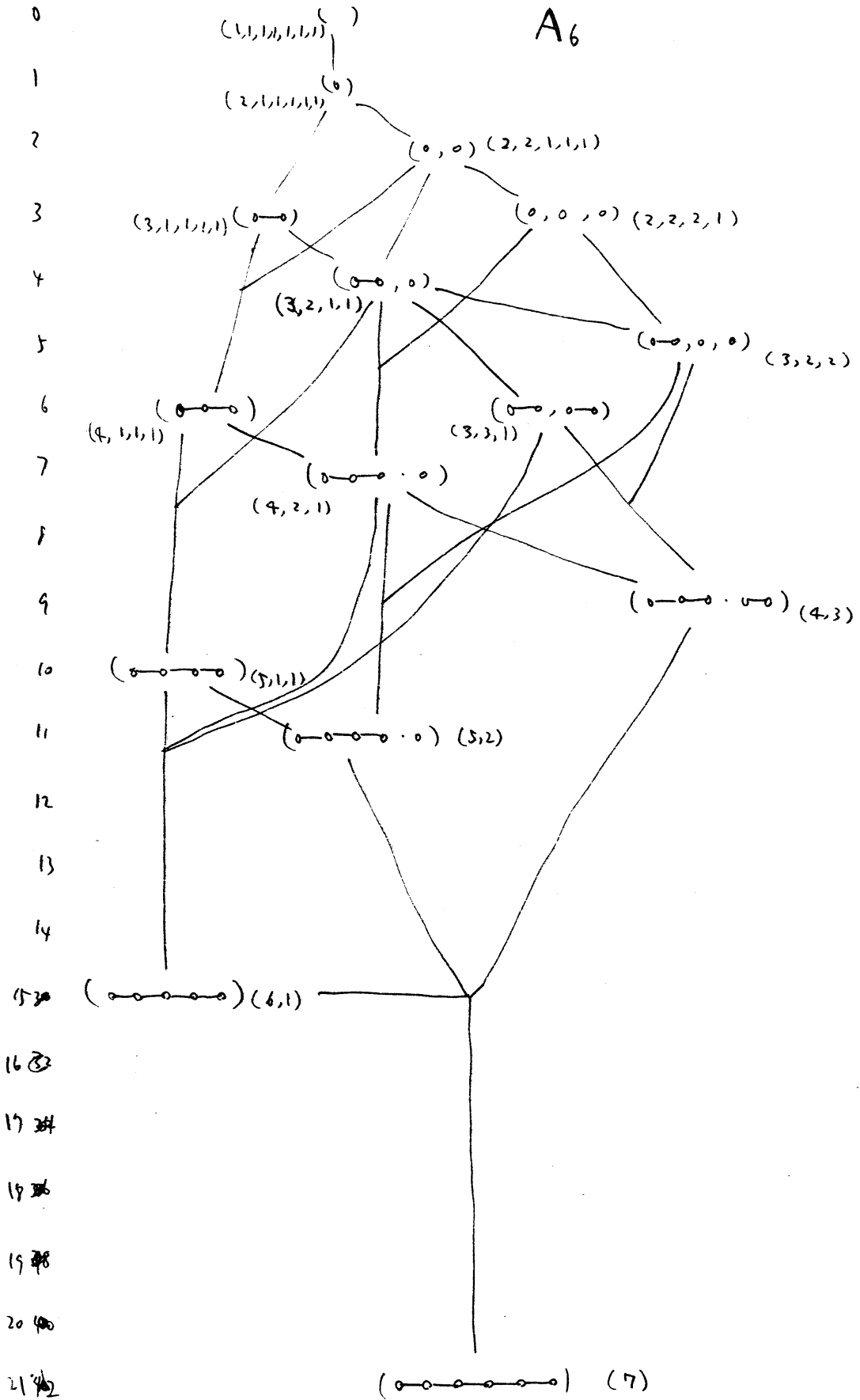
A_q.

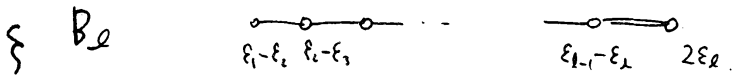
各 m_i の分割に対して, 交わりが 1 か

所ざらある。



A₆





$(\xi_i)_{\Lambda}$ の作用は $\alpha \rightarrow \pm \xi_i$ がある。

支径類は $(n_0; n_1, \dots, n_k)$ $n_0 + n_1 + \dots + n_k = l$ $n_0 \geq 0, n_i \geq 1 \text{ for } i \leq k$

この整数の組により代表される。 $(\text{codim} = n_0 + \sum_{i=1}^k (n_i - 1))$

$\text{order} = - (n_0^2 + \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}) (\alpha + \frac{1}{2})$ である、 (ξ_i) の

n_0 個は 0, 残りの n_i 個は n_i (non-zero) 等 ($\dots = 2 \text{ or } \dots$)

$(1; 1, \dots, 1)$ と $(; 2, 1, \dots, 1)$ とは l と k に diagram (0) である

が、支径でなく、 ξ の ξ の hypersurface $x_i = 0, \Delta(1, x_1, \dots, x_l) = 0$

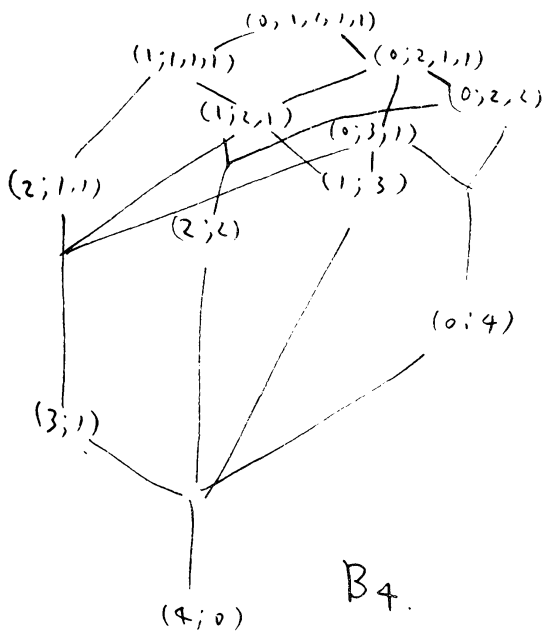
の normal に対応する。

不等式の base には、 $g_{\nu} (\xi_i^2 \text{ の } \nu \text{ 中和}) \quad 1 \leq \nu \leq l$ をとってよい。

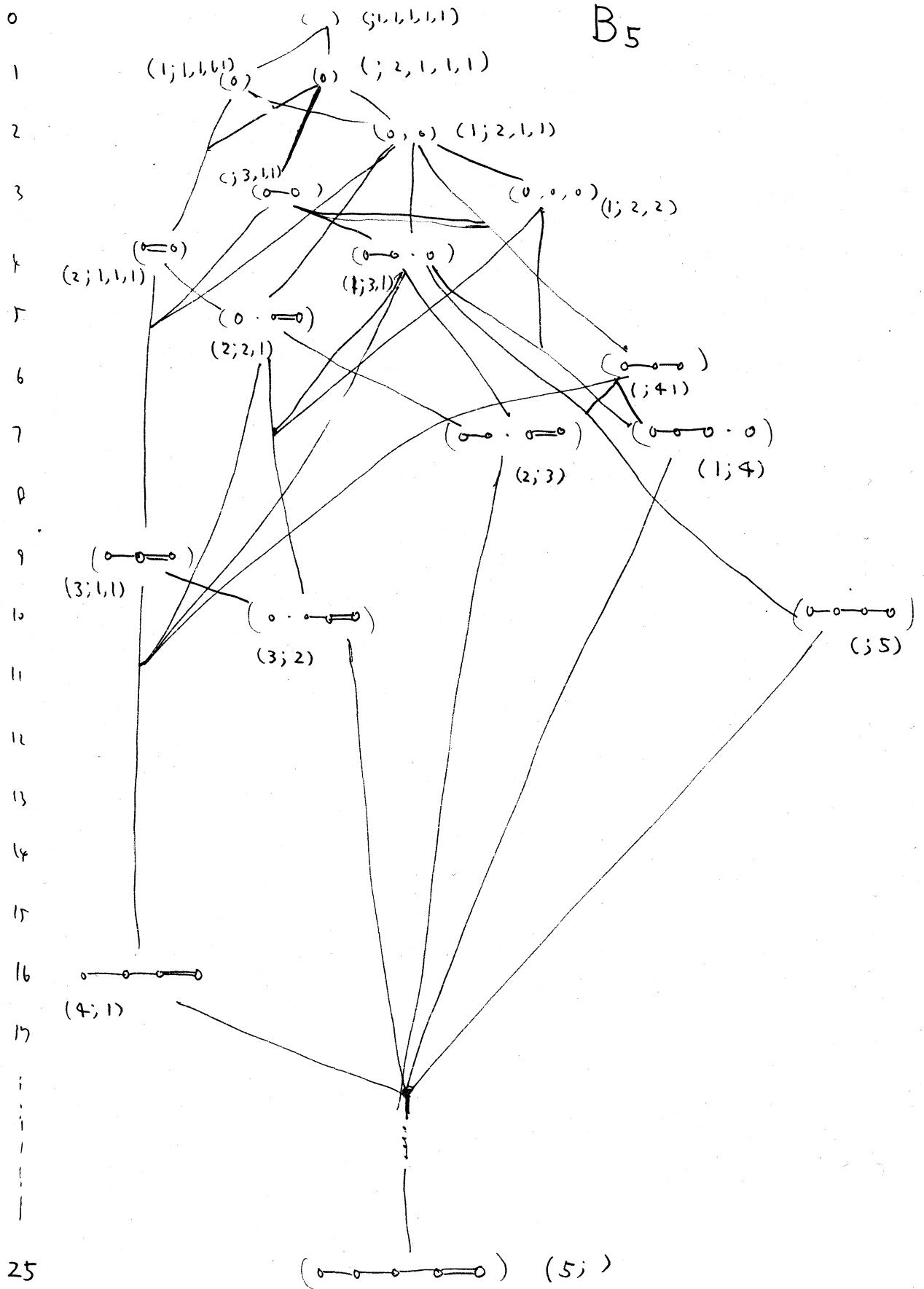
Lagrangians の組の基底は、 $n_0 \geq 2$ には k だけ、 -1 を j の ν へ

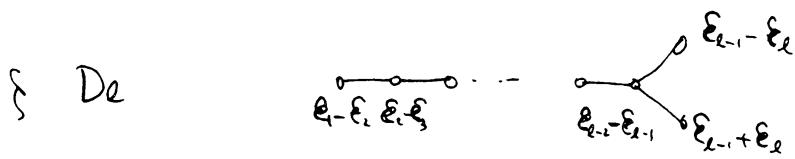
入れたときは、 $\sqrt{-n_i} \quad 1 \leq i \leq k$ を 2 だけに分割する) にとにより生じる

交わりも、 ξ の ξ にすぎない。



B₅





$D_l = (\xi_i) \cap$ の作用は, $\xi_i \mapsto E_i \xi_i$
 $E_i = \pm 1, \prod E_i = 1$ である. ξ space に作用する, \mathbb{Z} の表現は,

$(n_0; n_1, \dots, n_k)$ $\xrightarrow{*}$ $n_0 = 0 \text{ or } \geq 2, n_i \geq 1, n_0 + n_1 + \dots + n_k = l \implies \dim =$
 $(0; n_1, \dots, n_{k-1}, [n_k, 1]) \xleftarrow{n_1, \dots, n_k, \text{even} \rightarrow \text{type}} \text{整数の組により}$
 $n_k \geq 2$

代表 () である. ここで, n_0 は, $(\xi_1, \dots, \xi_k) \rightarrow \xi$ の n_0 個の 0 を
 表している. n_1, \dots, n_k はそれぞれ n_1 個, \dots , n_k 個の ± 1

等 (non-zero) である. n_0 を表している. n_0 は, $n_0 \geq 2$ である.

$[n_{k-1}, 1]$ は, $0 \neq \xi_{l-n_{k+1}} = \xi_{l-n_{k+2}} = \dots = \xi_{l-1} = -\xi_l$ である.
 n_1, \dots, n_k は even である. $(0; n_1, \dots, n_{k-1}, n_k) \geq 1$

D_l の作用を ξ の作用に置き換える. $(0; n_1, \dots, [n_{k-1}, 1], \dots, n_k)$
 とは, ξ の作用である. e.g. $(; 4, [1, 1]) = (; [3, 1], 2)$

特に $l: \text{odd}$ の場合, n_0 は 2 の type の ξ の存在しない.

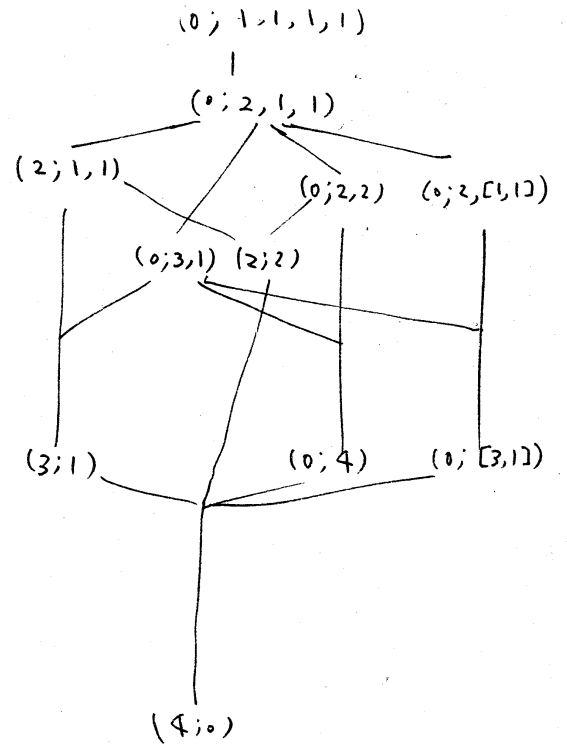
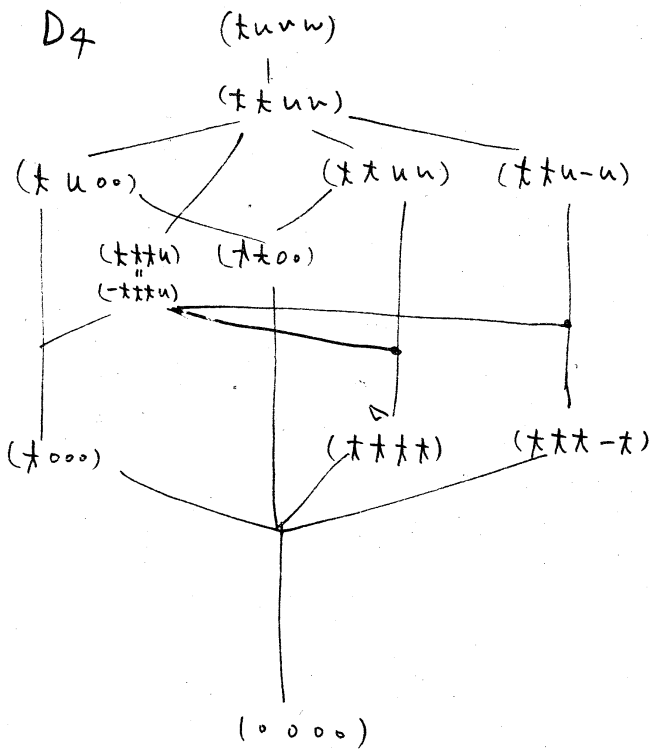
$n_0 = 1$ の ξ の存在しない. 表現, operator $\chi_{\frac{l}{2}-1}$ は

$\chi_{\frac{l}{2}} \neq 0$ である $\xi \mapsto \xi + \frac{E}{\xi}$ と ξ の action に対立し, $\chi_{\frac{l}{2}} = 0,$

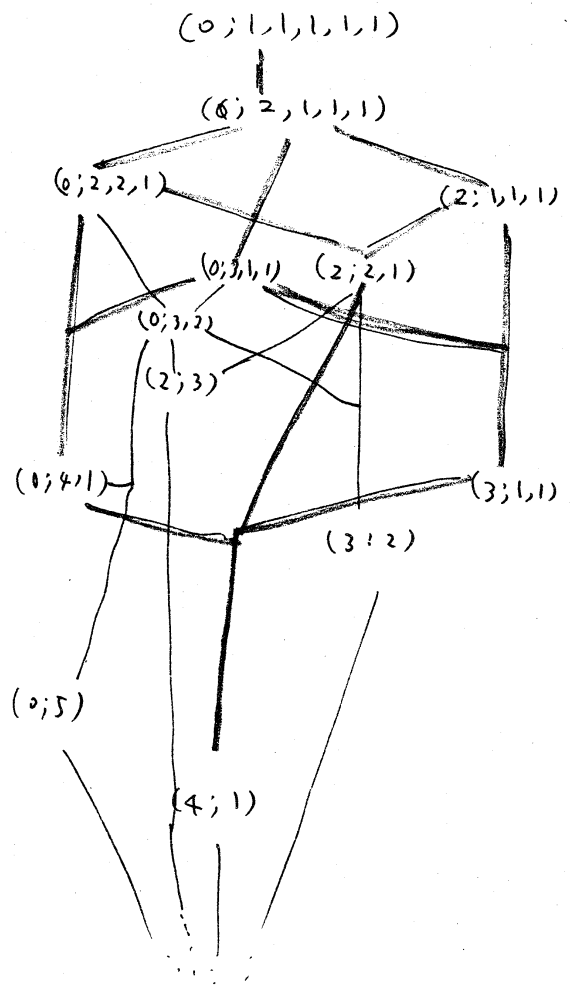
$\chi_{l-1} \neq 0$ である (e.g. $\xi_1 = 0, \xi_2, \dots, \xi_n \neq 0$) $\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} E \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \chi_{\frac{l}{2}} = \chi_{l-1} = 0$
 である zero 作用である.

よって $(1; n_1, \dots, n_k)$ は $(0; 1, n_1, \dots, n_k)$ に等しい.

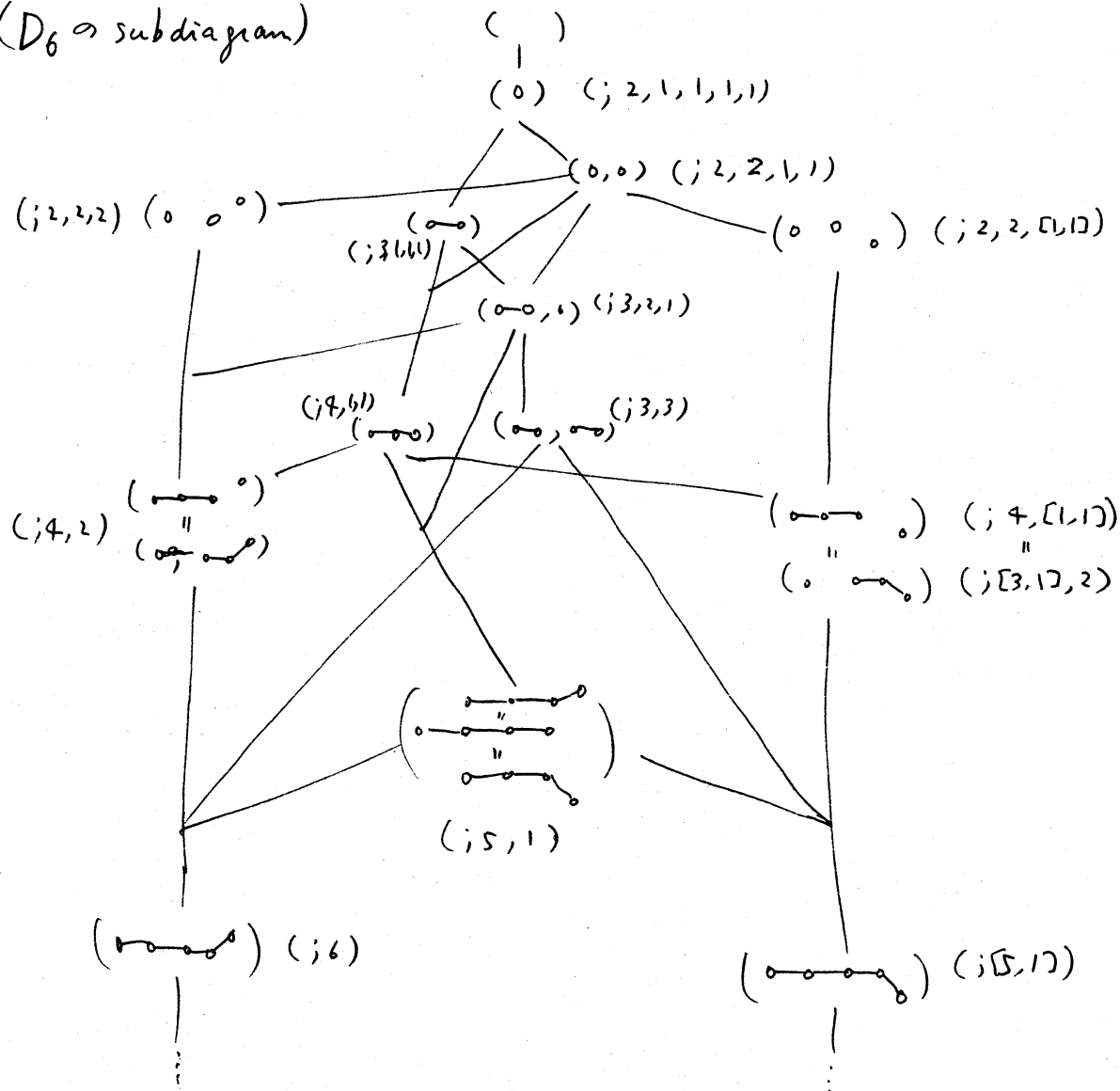
* $\text{codim} = n_0 + \sum_{i=1}^k (n_i - 1), \text{order} = - (n_0(n_0 - 1) + \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}) (\rho + \frac{1}{2})$.



D_5 右に 2.17) $(4; 1)$ の diagram
 $(0 \leftarrow 2)$ で表され、群 D_5 全体
 作用により、その上の homonomy
 diagram は、 D_4 のものを、一部を
 融合させたものになる。



$(D_6 \rightarrow \text{subdiagram})$



§4. 例外群に對する f の.

E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 .

G_2 は f の $I_2(6)$ と見做すので, ここでは省略する.

F_4 の不変式 f は 既約でなく, $f = g \cdot g^*$ と $(1, 1)$ 分解を

持つ, $g^*(z_1, z_3, z_4, z_6) = g(z_1, -z_3, z_4, -z_6)$ である.

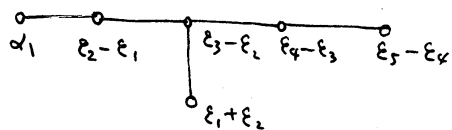
holonomy diagram は U_3 である (1, 1) 対称性を f へ.

E_6 に對しては, holonomy diagram は, graph として
 ことなる f の $f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$ であるが, E_7 については
 E_6 に用いては, 同様に行なうが, ここには f_1 まで f_2, f_3 まで.

E_8 については Lie 環 \mathfrak{g} は未決定である.

E_8 の基本不変式は, $(\xi_1, \dots, \xi_{l-1}, \xi_l)$ の homogeneous polynomial
 とし, $(\xi_1, \dots, \xi_{l-1})$ の D_{l-1} 不変式を仮定する, ξ_l の多項式に
 なっている. f は 2 階的 (e.g. E_6 の f_1, f_2 の f_3 等) であるが, 仮定の上, f は D_{l-1} 不変式 f_1, f_2 によって f_3 まで

§ E₆



$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \frac{1}{2}(\epsilon_2 + \dots + \epsilon_5) = \frac{1}{2}\epsilon_1 - \frac{1}{2}(\epsilon_2 + \dots + \epsilon_5) - \frac{\sqrt{3}}{2}\epsilon'_6$$

\mathbb{R}^8 内の $\xi_6 = \xi_7 = -\xi_8$ なる subspace $\Sigma \subset \mathbb{R}^8$. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_5$ と $\epsilon'_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_6 + \epsilon_7 - \epsilon_8)$

により正規直交基底をとる. ϵ'_6 の係数を ξ'_6 と記す.

E_6 の作用は ξ_1, \dots, ξ_5 のかわる置換と, $\xi_i \mapsto \epsilon_i \xi_i$ ($1 \leq i \leq 5$, $\epsilon_i = \pm 1$)

$\prod \epsilon_i = 1$, $\xi'_6 \mapsto \xi'_6$, ± 1 に, 次の元 (α_i は固チノ鏡映) で生成

される.

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = A$$

即チ $\xi_1 \dots \xi_5$ に対ししては,

D_5 の作用がある.

A と記す

次元 1 の面々の数として, 次のものが考えられる.

$(0, 0, t, t, t, -\sqrt{3}t)$ $(t, t, t, t, t, \sqrt{3}t)$

$(0, 0, 0, t, t, \frac{2}{\sqrt{3}}t)$, $(-t, t, t, t, t, \frac{5}{\sqrt{3}}t)$

$(0, 0, 0, 0, -\sqrt{3}t, t)$, $(0, 0, 0, 0, 0, t)$

群の作用?

後4つの2つづつは, 異なる同型である. 実際,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} \sqrt{3} \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}t \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}t \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} -2\sqrt{3} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ t \\ -t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow -2\sqrt{3} \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ \frac{2}{\sqrt{3}}t \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} 4 \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \xrightarrow{A} 2 \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \\ t \\ t \\ -\frac{5t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow 2 \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ -\frac{5t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

次元2のものも、同じ diagram のキははたして E_6 の作用でうつるとおのちかき。尚このとき D_4 の diagram $\cdots \circ \circ \circ$ がキはたかたの、キの上にくる次元3の diagram $\cdots \circ \circ \circ$ $\cdots \circ \circ \circ$ $\cdots \circ \circ \circ$ はたして同形になる。これは、 D_4 の自身では3のキも異なり、 D_5 の sub diagram としてキはたかたのキで2つであった。このことは、直接には次元4にして確かめられる。

$$\begin{aligned}
 & \cdots \circ \circ \circ \cdots \quad \cdots \circ \circ \circ \cdots \quad \cdots \circ \circ \circ \cdots \quad \cdots \circ \circ \circ \cdots \quad \cdots \circ \circ \circ \cdots \\
 & (t, t, t, u, v, \frac{-t-u-v}{\sqrt{3}}) \quad (0, 0, 0, t, u, \frac{u}{\sqrt{3}}) \quad (t, t, t, t, u, v) \quad (-t, t, t, t, u, v) \quad (t, u, u, u, u, v)
 \end{aligned}$$

上の3つは parameter のとりかえと E_1, \dots, E_5 の D_5 の作用で同じキはたきとあかき。

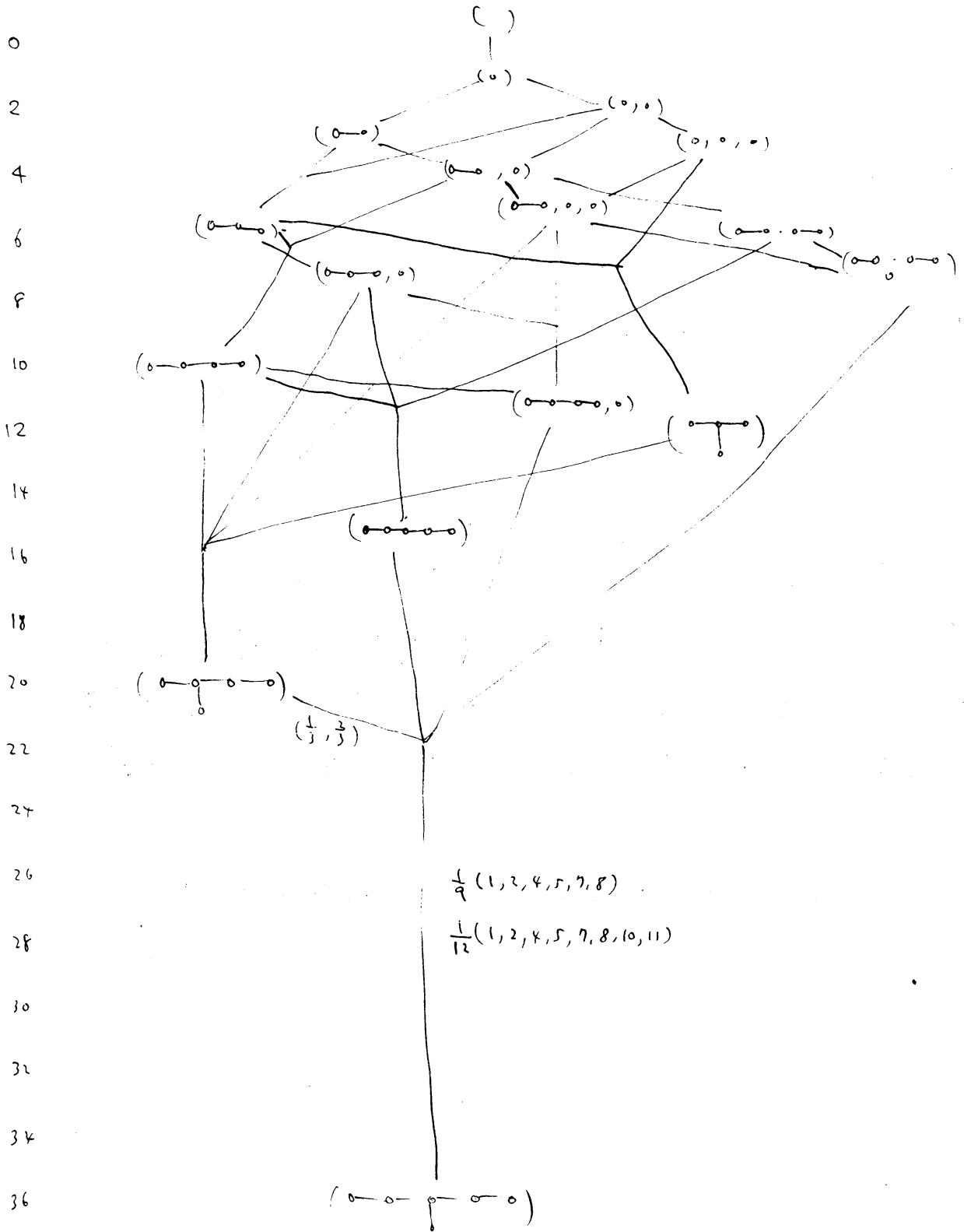
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ \frac{2t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} \begin{pmatrix} t+u+v \\ -(t+u+v) \\ -(t+u+v) \\ 3t-u-v \\ -t+3u-v \\ -3t-3u+v \\ \hline \sqrt{3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T \\ -T \\ -T \\ U \\ V \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} T \\ T \\ T \\ U \\ V \\ -T-U-V \\ \hline \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

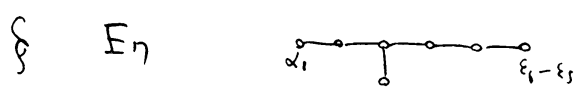
よって初めの2つは同じ。

$$\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ u \\ \frac{u}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} \begin{pmatrix} 6t+4u+v \\ 2t-u-v \\ 2t-u-v \\ 2t-u-v \\ -2t+3u-v \\ -6t-3u+v \\ \hline \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ T \\ T \\ T \\ U \\ -T-U-V \\ \hline \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

よって初めの2つは同じ。

E_6





$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \dots - \epsilon_6) - \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon_7'$$

$$\epsilon_7' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\epsilon_7 - \epsilon_8)$$

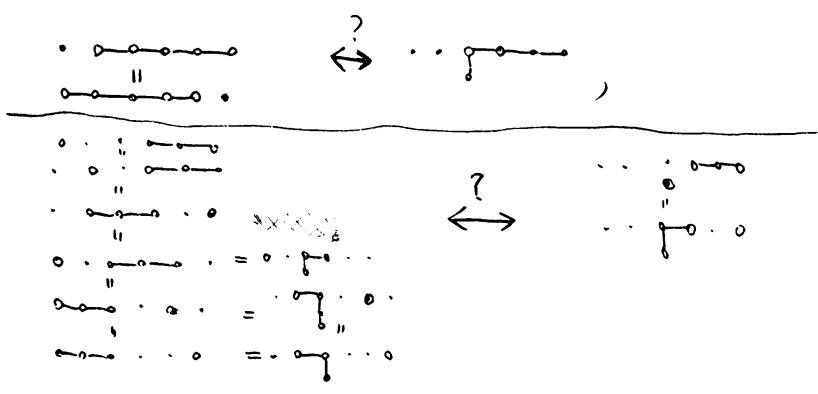
$\xi_1 \epsilon_1 + \dots + \xi_6 \epsilon_6 + \xi_7' \epsilon_7'$ の作用として, $(\xi_1, \dots, \xi_6) \in D_6$ の

作用を, α_1 に対応する

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \text{ により生成される.}$$

holonomy diagram の決定, 即ち (E_7, S) の $S \supset S'$ により生成される群の表現の決定には, すでに決定した E_6 ,

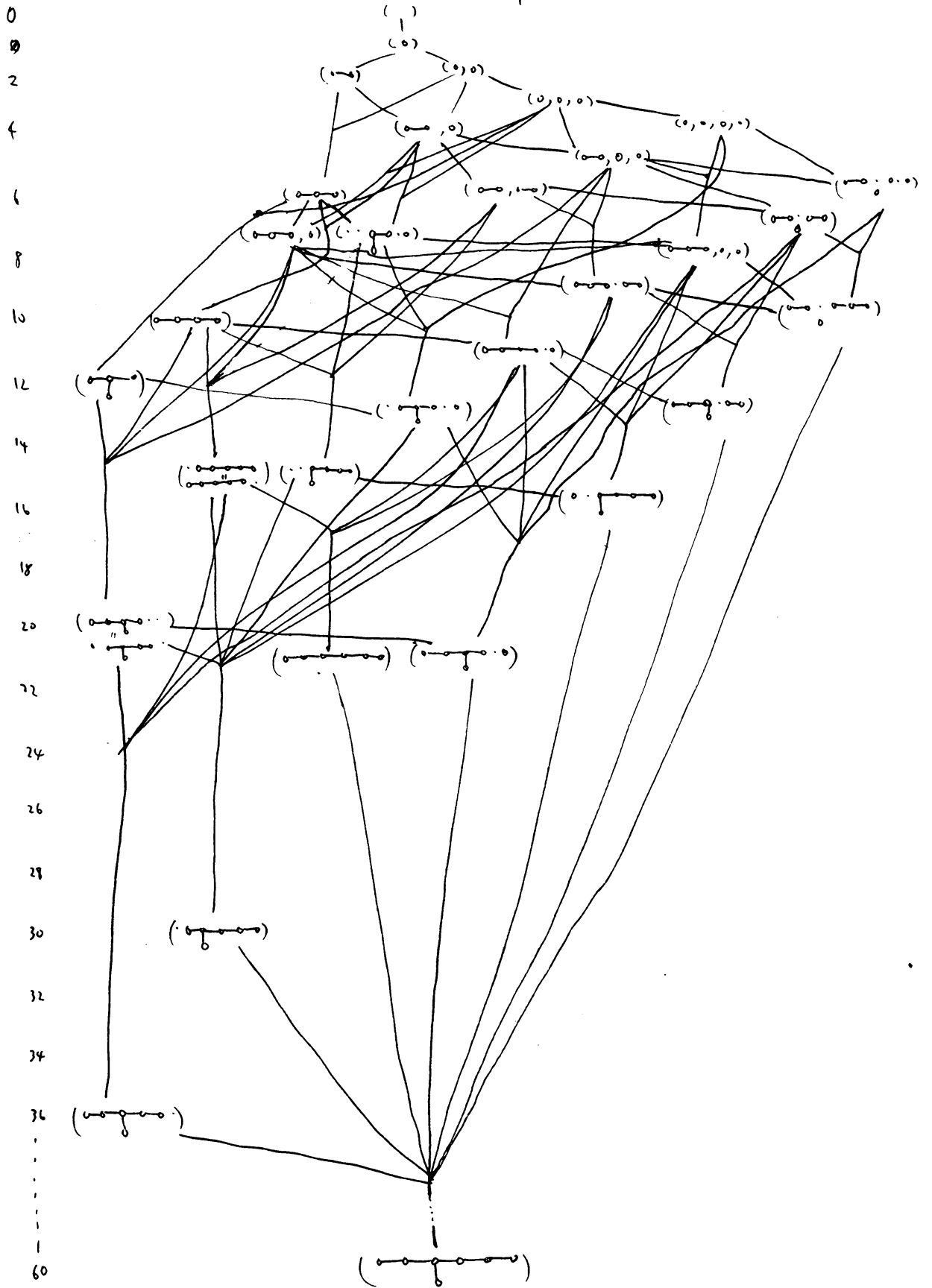
$D_2 \times A_1 \times A_1$ の結果を援用すれば, A_5 型の 2通り, $A_3 \times A_1$ 型の 2通りが同一であることを check すればよいことがわかる。



こゝでは各々の表現で互いに確かめられる。

E_8 についても同様に行なうことが略す。

E_7



§ F_4 . $\overbrace{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)}$

F_4 の root 系(に対応する壁の定義式)は 48個 (24個) であるが, 下記 の 2 group に分かれ, 互いに F_4 の作用で安定である。

$$1. \quad \pm \xi_i \pm \xi_j \quad 1 \leq i < j \leq 4$$

$$2. \quad \pm \xi_i, \quad \frac{1}{2}(\pm \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3 \pm \xi_4)$$

従って, 基本変換式 $D = \prod ()$, は $D = D_1 D_2$ とし

分解をせよ, 具体的に $D_1 = \prod (\xi_i^2 - \xi_j^2)$, $D_2 = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \prod (\xi_i \pm \xi_j \pm \xi_k \pm \xi_l)$

である。* = $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ により ρ_1 と ρ_2 は ρ_3 あり。

ρ_1, ρ_2 を, ξ_i^2 に作用する D 次中和, D 次基本対称式とする。

$$D_1^2 = \Delta_4(1, -p_1, p_2, -p_3, p_4) \quad (t^4 - p_1 t^3 + p_2 t^2 - p_3 t + p_4 = 0 \rightarrow \text{discriminant})$$

$$D_2^2 = p_4 ((p_1^2 - 4p_2)^2 - 8^2 p_4)^2 = p_4 ((2g_2 - g_1^2)^2 - 8^2 p_4)^2$$

基本変換式は weight 2, 6, 8, 12 のものにより生成される。

以下 weight は半分にして, (1, 3, 4, 6) とする。特に, ρ の*

$$\rho_1^* = \rho_1, \quad \rho_3^* = -\rho_3, \quad \rho_4^* = \rho_4, \quad \rho_6^* = -\rho_6$$

となるものがある。 ρ_1, ρ_3 は unique であり, ρ_4, ρ_6 は

$\text{mod } \rho_1^4, \text{ mod } \rho_3 \rho_6^3$ は unique である。以下では 2 次対称式にとる。

$$\rho_1 = \frac{1}{2} g_1 = \frac{1}{2} p_1$$

$$\rho_3 = 3g_3 - \frac{15}{4} g_2 g_1 + \frac{15}{16} g_1^3 = 9p_3 - \frac{3}{2} p_2 p_1 + \frac{3}{16} p_1^3$$

$$\rho_4 = 9g_4 - \frac{21}{2} g_3 g_1 - \frac{21}{4} g_2^2 + \frac{63}{8} g_2 g_1^2 - \frac{39}{32} g_1^4$$

$$= -36 p_4 - 3 p_2^2 + \frac{9}{2} p_3 p_1 + \frac{3}{4} p_2 p_1^2 - \frac{3}{32} p_1^4$$

$$= -36p_4 - 3(p_2 - \frac{1}{4}p_1^2)^2 + z_3 z_1 = -36p_4 - 3p_2^2 + 9p_3 p_1 - z_3 z_1$$

$$\begin{aligned} z_6 &= 2(p_2 - \frac{1}{4}p_1^2)(36p_4 - (p_2 - \frac{3}{4}p_1^2)^2 - \frac{1}{4}p_1^4) - \frac{1}{6}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4 z_1^2 + \frac{1}{8}z_1^6 \\ &= 9\left\{ (8p_2 - 3p_1^2)(p_4 - \frac{1}{36}p_2^2) - 3(p_3 - \frac{1}{6}p_2 p_1) \right\} + \frac{1}{6}z_3^2 - \frac{1}{2}z_4 z_1^2 - \frac{1}{8}z_1^6 \\ &= 72p_4 p_2 - \frac{27}{2}p_3^2 - \frac{45}{2}p_4 p_1^2 + \frac{9}{2}p_3 p_2 p_1 - 2p_2^3 + \frac{3}{4}p_2^2 p_1^2 - \frac{3}{16}p_2 p_1^4 + \frac{5}{512}p_1^6 \end{aligned}$$

$$\frac{f}{z_1} = D^2 z_1 < z, \quad f = g \cdot g^* \quad z_3 z_1 + z_4 z_1 = z_1 z,$$

$$g = \frac{1}{27}(z_4 + z_1 z_3)^3 + \frac{1}{4}(z_6 + \frac{1}{2}z_1^2 z_4 - \frac{1}{6}z_3^2 + \frac{1}{8}z_1^6)^2$$

$$g^* = \frac{1}{27}(z_4 - z_1 z_3)^3 + \frac{1}{4}(z_6 - \frac{1}{2}z_1^2 z_4 + \frac{1}{6}z_3^2 - \frac{1}{8}z_1^6)^2 \quad \star\star)$$

f は不変に於て \mathbb{C} の環は, 下記の X_0, X_2, X_3, X_5 の区間で

$$\star\star), \quad X_0^* = X_0, \quad X_2^* = -X_2, \quad X_3^* = X_3, \quad X_5^* = -X_5 \quad \text{である}$$

	D_1	D_3	D_4	D_6
X_0	z_1	$3z_3$	$4z_4$	$6z_6$
X_1	$3z_3$	$-15(z_4 + \frac{3}{20}z_1^4)z_1$	$-6(3z_6 + z_1^3 z_3)$	$(4z_4^2 - \frac{9}{2}z_1^2 z_1^4 + \frac{11}{2}z_1^2 z_3^2 - \frac{9}{8}z_1^8)$
X_3	$4z_4$	$-6(3z_6 + z_1^3 z_3)$	$-15z_1^3 z_4 + 7z_1 z_3^2 - \frac{9}{4}z_1^7$	$-9z_1^3 z_6 + 11z_1^2 z_3 z_4 - z_3^3 + \frac{3}{4}z_1^6 z_3$
X_5	$6z_6$	$4z_4^2 - \frac{9}{2}z_1^4 z_4 + \frac{11}{2}z_1^2 z_3^2 - \frac{9}{8}z_1^8$	$-9z_1^3 z_6 + 11z_1^2 z_3 z_4 - z_3^3 + \frac{3}{4}z_1^6 z_3$	$6z_1^2 z_3 z_6 + 5z_1^3 z_4^2 - \frac{11}{3}z_1 z_3^2 z_4 + 2z_1^5 z_3^2 + \frac{3}{4}z_1^6 z_4$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 f = 24f \\ X_2 f = 0 \\ X_3 f = -36z_1^3 f \\ X_5 f = 24z_1^2 z_3 f \end{array} \right.$$

$$\det(\text{matrix}) = 2^8 3^6 f$$

$$\star\star) \quad g = 3^6 D_1^2, \quad g^* = -\frac{3^3}{2^6} D_2^2$$

$$[X_2, X_3] = -\frac{21}{2} z_1^2 z_3 X_0 + \frac{3}{2} z_1^3 X_2 - 3 X_5$$

$$[X_2, X_5] = \left(-\frac{21}{2} z_1^3 z_4 + 6 z_1 z_3^2 - \frac{27}{8} z_1^7\right) X_0 + \frac{7}{2} z_1^2 z_3 X_2 + \left(3 z_4 - \frac{3}{4} z_1^4\right) X_3$$

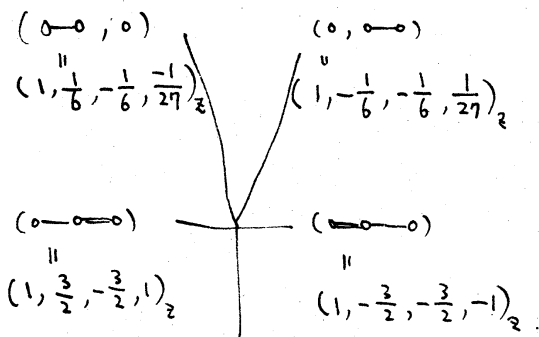
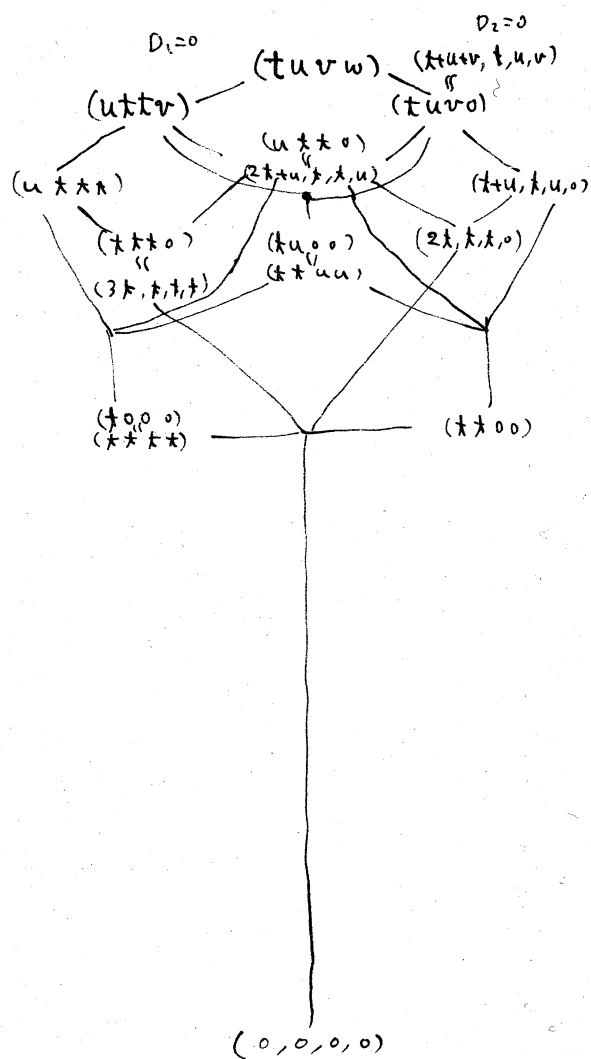
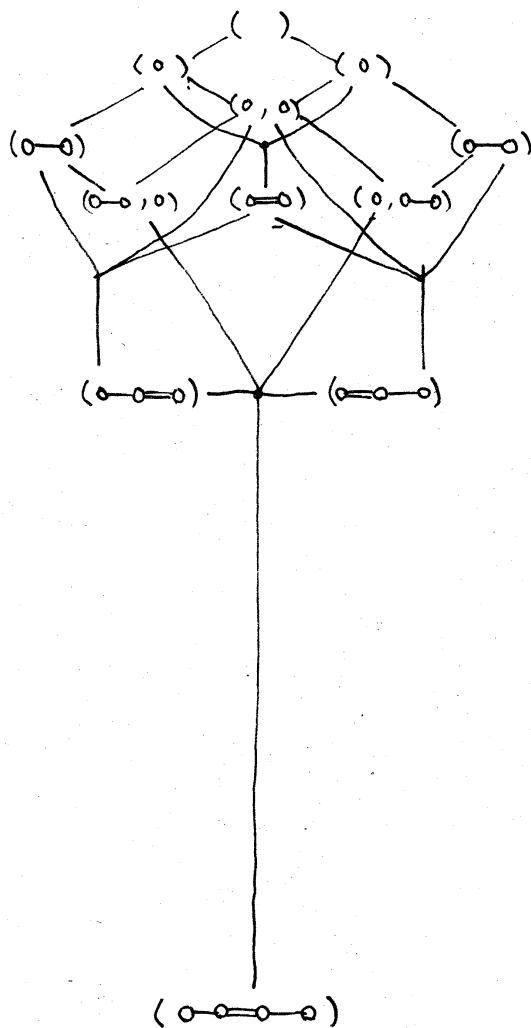
$$[X_3, X_5] = \left(9 z_1^2 z_6 + 8 z_1 z_3 z_4 - \frac{3}{4} z_1^5 z_3\right) X_0 + \left(4 z_1^2 z_4 - \frac{2}{3} z_3^2 + \frac{3}{4} z_1^6\right) X_2 \\ + \frac{1}{2} z_1^2 z_3 X_3 - \frac{9}{2} z_1^3 X_5$$

(\mathbb{F}_6) に対する F_4 -作用は, B_4 の作用と, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

により生成される. *holonomy diagram* は,

同種のグラフの3組あり, 対称的である.

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24



(diagram 左右は *?)
i>3

§5 ルート系に対応しない Coxeter 群.

Coxeter 群で, ルート系に対応しないもの, $H_3, H_4, I_2(m)$ とある。以下に, 詳しくのべることにより, 実際計算の方法を示すことにする。 H_3, H_4 については, 詳しくのべた文献がみあたらないので, 特に詳細に記す。

1. $I_2(m)$. \xrightarrow{m}

$$I_2(3) = A_2, I_2(4) = B_2, I_2(6) = G_2, (I_2(2) = D_2 \text{ ("2..2")})$$

$m=5, m \geq 7$ はルート系に対応しない。

$E = \mathbb{R}^2$ の基底を (1) で表わし, 正規直交基底を e_1, e_2 とする。

$$\alpha = \frac{\pi}{m}, \quad e_k = \cos(k-\frac{1}{2})\alpha e_1 + \sin(k-\frac{1}{2})\alpha e_2 \quad k=1, 2, \dots, 2m.$$

e_k ($1 \leq k \leq m$) の方向の直交鏡映を S_k とする。 S_1, S_m の

生成した群は, 11 かつ 2 の両方群で, $(S_1 S_m)^m = 1$. これは

$$(e_1 | e_1) = (e_m | e_m) = 1, (e_1 | e_m) = -\cos \alpha \text{ と対応して, Coxeter}$$

diagram は $\overset{m}{\circ} \text{---} \overset{m}{\circ}$ $S_1 \text{---} S_m$. これは $I_2(m)$ とよび, 鏡映は,

S_1, S_2, \dots, S_m で表わし, e_1, \dots, e_{2m} が, ルート系を付与する。

$$(e_1, e_2) S_1 = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} -c & s \\ s & c \end{pmatrix} \quad (e_1, e_2) S_m = \begin{pmatrix} -c & s \\ s & c \end{pmatrix} \quad c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha.$$

$S(E) \ni D = \prod_{k=1}^m e_k$ は anti-invariant. Coxeter 変換 = $S_1 S_m$ で表わし,

χ の位数が m , characteristic polynomial は $(T - \exp \frac{2\pi i}{m})(T - \exp \frac{2(m-1)\pi i}{m})$

であることより, Coxeter number は m , 不変式の次数は $2, m$.

である。今, $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + i e_2), \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + i e_2)$ とおけば,

$$(\beta_1 | \beta_1) = (\beta_2 | \beta_2) = 0 \quad (\beta_1 | \beta_2) = -1.$$

$$(\beta_1, \beta_2) s_1 = (e^{-\alpha i} \beta_2, e^{+\alpha i} \beta_1), \quad (\beta_1, \beta_2) s_m = (e^{+\alpha i} \beta_2, e^{-\alpha i} \beta_1) \text{ ①}$$

不変式は $\beta_1 \beta_2, \beta_1^m - \beta_2^m$ である。一方 ①より、

$$(\sqrt{2}i)^{-m} D = \beta_1^m + \beta_2^m \text{ であるから、}$$

$$(-2)^{-m} D^2 = (\beta_1^m - \beta_2^m)^2 + 4(\beta_1 \beta_2)^m.$$

②より、 $S(E^*)$ に作用すると、 β_1, β_2 の入れ替わりにより、不変式は

$$\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_1 = \eta_1 \beta_1 + \eta_2 \beta_2 \text{ であるから } \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2), \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2)$$

$$s_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{+\alpha i} \eta_2 \\ e^{-\alpha i} \eta_1 \end{pmatrix}, \quad s_m \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha i} \eta_2 \\ e^{+\alpha i} \eta_1 \end{pmatrix} \text{ ③}$$

$$x_2 = \eta_1 \eta_2 \quad (= -\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2))$$

$$x_m = \eta_1^m - \eta_2^m \quad (= (\sqrt{2})^m (i)^{m-1} \prod_{k=0}^{m-1} (\cos k\alpha \xi_1 - \sin k\alpha \xi_2))$$

④ invariant ⑤ anti-invariant ⑥ $D^* = \eta_1^m + \eta_2^m = (\sqrt{2}i)^m \prod_{k=1}^m (\cos(k-\frac{1}{2})\alpha \xi_1 - \sin(k-\frac{1}{2})\alpha \xi_2)$

Lie E_{α}^{\pm} は α であり、 $(d\xi_1 | d\xi_1) = (d\xi_1 | d\xi_2) = 1, (d\xi_1 | d\xi_2) = 0$ ⑦

$$(d\eta_1 | d\eta_1) = (d\eta_2 | d\eta_2) = 0, \quad (d\eta_1 | d\eta_2) = -1.$$

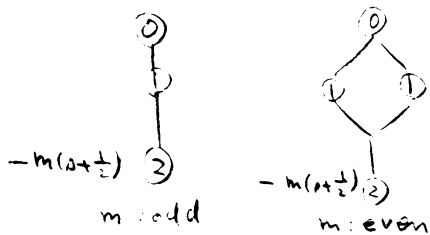
$$\therefore (dx_2 | dx_2) = -2x_2, \quad (dx_2 | dx_m) = -mx_m, \quad (dx_m | dx_m) = 2m^2 x_2^{m-1}.$$

従って、

$$\begin{aligned} X_0 &= 2x_2 D_2 + mx_m D_m \\ X_{m-2} &= mx_m D_2 - 2m^2 x_2^{m-1} D_m. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{m^2} \det(\text{IF}) = x_m^2 + 4x_2^m \text{ であるから、} = (-2)^{-m} D^{*2}$$

holonomy diagram は ⑧、 $h(s) = (s+1) \prod_{\mu=1}^{m-1} (s + \frac{1}{2} + \frac{\mu}{m})$.



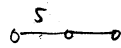
$m: \text{odd} \Rightarrow s_1 \text{ と } s_m \text{ は 対応}$
 $m: \text{even} \Rightarrow \text{ " " 対応 である。}$

⑨の分岐 ①の分岐に注意して、

⑩に注意せよ。

$$⑪) \text{ ⑫の分岐 } (-\sqrt{2})^m i^{m-1} \prod_{k=1}^m (\cos k\alpha \xi_1 + \sin k\alpha \xi_2), \quad (-\sqrt{2}i)^m \prod_{k=1}^m (\cos(k-\frac{1}{2})\alpha \xi_1 + \sin(k-\frac{1}{2})\alpha \xi_2) \text{ である。}$$

2. H_3 .



四元数の標準基を $(1, i, j, k)$ とし, $u = xi + yj + zk$ の形の元からなる部分集合を E とし, \mathbb{R}^3 と同一視する.

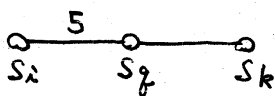
$$q = ai + bj + ck \quad a = \omega \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, b = \omega \frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, c = \omega \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

と置く. q の座標のまわりの偶置換と, 座標の符号のかわった変りかけ方により生じた 24 個の元と, $\pm i, \pm j, \pm k$ との計 30 個の集合を R とする. (ルート系の代用品) $R \ni \alpha$ のとき,

E の直交鏡映で, α を $-\alpha$ に \rightarrow する s_α は, $u \mapsto \alpha u \alpha$

(四元数の積) と表示 () 3. $\{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$ が生成した, $GL(E)$

の部分群が H_3 であり, Coxeter diagram は (base $-i, j, -k$ とし)



H_3 の鏡映は, R から生じた 15 個であり.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ の作用として表示すれば, } s_i = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} s_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} s_k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$s_j = \begin{pmatrix} b & c & -a \\ c & a & -b \\ -a & -b & c \end{pmatrix} \text{ とし, } s_j s_i s_j s_k s_i s_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ etc. } \rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \\ & \downarrow & \\ & z & x \end{pmatrix}$$

従って, 不変式は, x^2, y^2, z^2 の函数で, 11 回置換で不変, s_j で不変なものを求めればよい. $p_2 = x^2 + y^2 + z^2, p_4 = x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2,$

$$p_6 = x^2 y^2 z^2, d = (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(x^2 - z^2) \text{ と表せば, } \alpha_2 = p_2,$$

$$\alpha_6 = 11 p_6 - p_4 p_2 - \sqrt{5} d$$

$$\alpha_{10} = p_6 (19 p_4 - 13 p_2^2) - p_4^2 p_2 + p_4 p_2^3 + \frac{3}{\sqrt{5}} (p_4 + p_2^2) d \quad (\text{矢野})$$

* 同様に, 標準内積は $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (u\bar{v} + v\bar{u})$ と表示 () 2

$$\frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial X_6}{\partial X} \right)^2 = 10 X_{10} + 4 X_2^2 X_6$$

$$\text{又, } d^2 = -27 p_6^2 + 18 p_6 p_4 p_2 - 4 p_6 p_2^3 - 4 p_4^3 + p_4^2 p_2^2 \quad \Sigma 17) \text{ 11 } \tau,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial X_6}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial X_{10}}{\partial X} \right) &= 70 p_6^2 p_2 - 454 p_6 p_4 p_2^2 + 156 p_6 p_2^4 + 100 p_4^3 p_2 - 24 p_4^2 p_2^3 - 4 p_4 p_2^5 \\ &= -X_2 (5 X_6^2 + 6 X_{10} X_2 + 2 X_6 X_2^3) \end{aligned}$$

∴ D^2 に複雑な計算はナリ,

$$\frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial X_{10}}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial X_6}{\partial X} \right) = -12 X_{10} X_6 X_2 + 4 X_{10} X_2^4 - \frac{3}{10} X_6^3 + \frac{3}{5} X_6^2 X_2^3 + \frac{6}{5} X_6 X_2^6$$

即ち Lie 代数は,

$$\begin{cases} X_0 = X_2 D_2 + 3 X_6 D_6 + 5 X_{10} D_{10} \\ X_4 = 3 X_6 D_2 + (10 X_{10} + 4 X_2^2 X_6) D_6 - X_2 (5 X_6^2 + 6 X_{10} X_2 + 2 X_6 X_2^3) D_{10} \\ X_8 = 5 X_{10} D_2 - X_2 (5 X_6^2 + 6 X_{10} X_2 + 2 X_6 X_2^3) D_6 + (-12 X_{10} X_6 X_2 + 4 X_{10} X_2^4 - \frac{3}{10} X_6^3 + \frac{3}{5} X_6^2 X_2^3 + \frac{6}{5} X_6 X_2^6) D_{10} \end{cases}$$

係数行列の rank 1 なる 2 又は 3 種あり, 各 2 codim structure に対応する. $\{4, 17, (1, 0, 0), (1, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}) \sim (3, 2, -6)$

$$(1, -\frac{2}{5}, \frac{38}{5^3}) \sim (5, -50, 19 \cdot 50)$$

$$[X_0, X_4] = 2 X_4, \quad [X_0, X_8] = 4 X_8$$

$$[X_4, X_8] = -2 X_6 X_2 X_4 - 4 (X_6^2 + 3 X_{10} X_2 + X_6 X_2^3) X_0 \quad //$$

$$D^{*2} = f(x) \tau(\tau), \quad f(x) = -250 X_{10}^3 + \frac{27}{10} X_6^5 + X_2 \varphi(x)$$

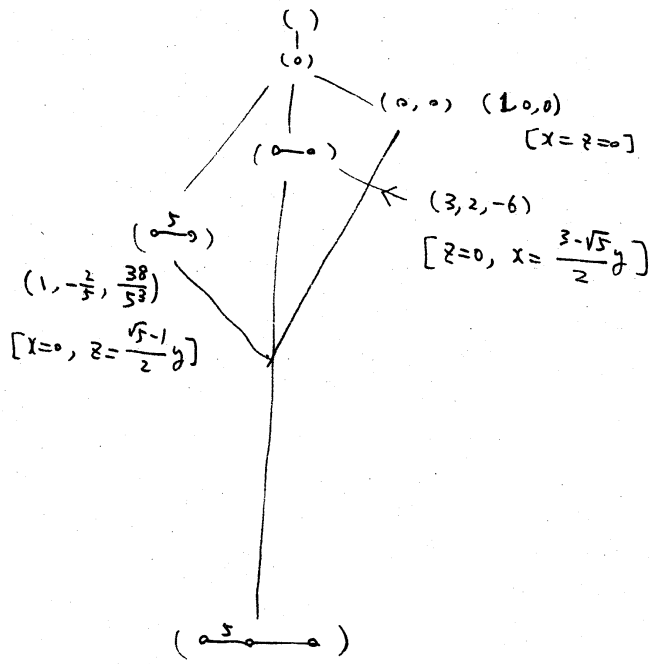
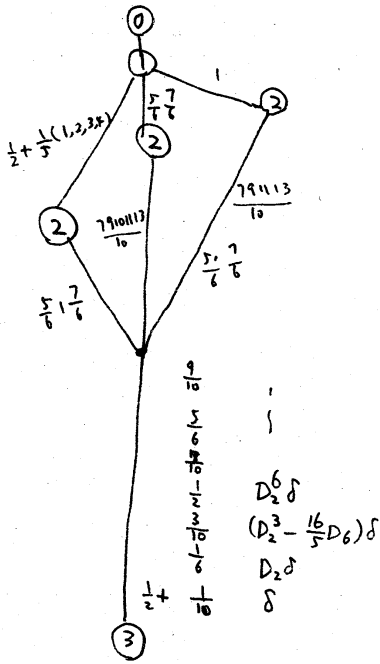
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 4 (X_2^4 - 10 X_6 X_2) X_{10}^2 + (45 X_6^3 - 198 X_6^2 X_2^3 + 4 X_6 X_2^6) X_{10} \\ &\quad - \frac{158}{5} X_6^4 X_2^2 - \frac{142}{5} X_6^3 X_2^5 + \frac{4}{5} X_6^2 X_2^8 \end{aligned}$$

$$X_2 = 12 X_{10} \quad X_6^2 + X_{10}^2 = 1 \text{ 等}$$

$$X_0 f = 15 f, \quad X_4 f = -2 X_2^2 f, \quad X_8 f = (-20 X_6 X_2 + 2 X_2^4) f$$

H_3

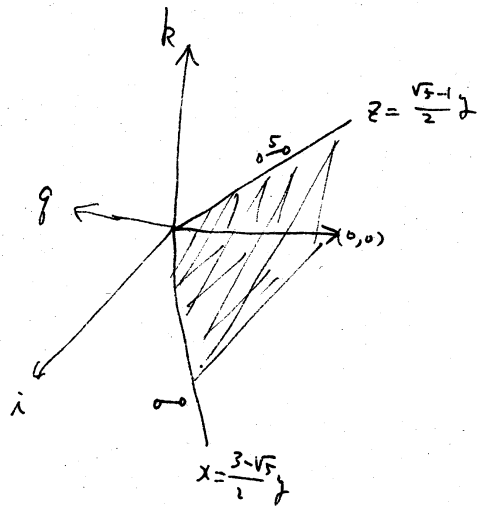
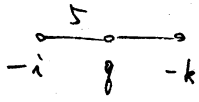
- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15



$D_2^6 \delta$
 $(D_2^3 - \frac{16}{5} D_6) \delta$
 $D_2 \delta$
 δ

$$b = (s+1) \prod_1^5 (s + \frac{1}{2} + \frac{v}{6}) \prod_1^9 (s + \frac{1}{2} + \frac{v}{10})$$

chamber



H_3 は次の形にも表現できる。 \mathcal{A}_5 は 5 次交代群である。
 (ab) は a と b の交換を表す。 $r_1 = (14)(23)$, $r_2 = (12)(45)$,
 $r_3 = (12)(34)$ である。

$$(r_1 r_2)^5 = (r_2 r_3)^3 = (r_1 r_3)^2 = 1$$

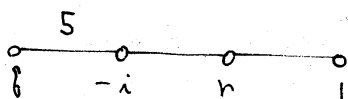
すなわち, 従って Coxeter 群の universality より homomorphism
 $f: H_3 \rightarrow \mathcal{A}_5$ が存在する。 $\varepsilon: H_3 \rightarrow \{\pm 1\}$ を $w \mapsto (-1)^{\ell(w)}$
 (ここで $\ell(w)$ は w の最短表示の長さ) とすれば, 同型

$$(f, \varepsilon): H_3 \rightarrow \mathcal{A}_5 \times \{\pm 1\}$$

を得る。正 20 面体 (正 12 面体) の回転群は \mathcal{A}_5 と同型であるが, 上の $H_3 \simeq \mathcal{A}_5 \times \{\pm 1\}$ に正 12 面体の \mathcal{A}_5 が含まれている。即ち H_3 は正 12 (20) 面体の (5) 5 面体 (正 12 面体) と同型である。次の H_4 も, 同様に, 4 次元には正 14 面体 (正 120 面体 (正 12 面体 120 個)), 正 600 面体 (正 4 面体 600 個, 120 頂点) に分解される。

正多面体の Coxeter 群の図形については, 最後は (2) がある。

3. H_4



$$f = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}, \quad a = \omega \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad b = \omega \frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \quad c = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}(-1 + \hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$\xi_1 + \xi_2 \hat{i} + \xi_3 \hat{j} + \xi_4 \hat{k}$ に対する作用として, H_4 は,

$\{\xi_i\}$ の 陽置換 σ , $\xi_i \mapsto \pm \xi_i$, $\pm 1 = r, \beta$ に対応した,

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & b & c & -a \\ & c & a & -b \\ & -a & -b & c \end{pmatrix} \quad \text{により生成される}$$

次元 1 の diagram $\overset{5}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ, \overset{5}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ, \circ \text{---} \overset{5}{\circ} \text{---} \circ, \circ \text{---} \circ \text{---} \overset{5}{\circ}$

は ξ_4 のみを変えた。 \Rightarrow 元 2 の ξ_1 は,

$$\overset{5}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ, \circ \text{---} \overset{5}{\circ} \text{---} \circ, \circ \text{---} \circ \text{---} \overset{5}{\circ}, \circ \text{---} \circ \text{---} \overset{5}{\circ}, \overset{5}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ$$

$$(t, 0, t+u, u) \quad (0, t, u, t+u) \quad (0, 0, t, u) \quad (0, t, u, -2(at+bu))$$

$$\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \quad ((2a+1)t + (2b+1)u, t, u, -2(at+bu)) \quad \text{がある。この } \xi_1$$

が 2 の ξ_1 の σ に対応する σ は, 陽置換 σ により等しい。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ bt+cu \\ ct+au \\ -at-bu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \\ U \\ 2(aT+bu) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ -2(at+bu) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2a+1)t + (2b+1)u \\ t \\ u \\ 2(at+bu) \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} t+u \\ (2a+1)t + 2bu \\ 2at + (2b+1)u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(aT+bu) \\ U \\ T \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ -2(at+bu) \end{pmatrix}$$

により, 残り 3 の ξ_i とし。 ($\forall j \neq i, \sigma(\xi_j) = \xi_j$)

codim $1 \neq 9$ は, Coxeter diagram の奇数個の像で表すは
 けて $1, 2$ の τ ; (0) の 2 である。従って, この場合,

(H_4, S) の S の subset の生成式は \pm の群は, τ の diagram
 が同じである, 事後である。

基本不等式は weight $(2, 12, 20, 30)$ である。

$$\Sigma_{12} = \xi_1^1 + \dots + \xi_4^2.$$

$$\Sigma_{12} \text{ は } d = \prod_{i < j} (\xi_i^2 - \xi_j^2) \text{ の関係 (} 2 < 3 \text{) .}$$

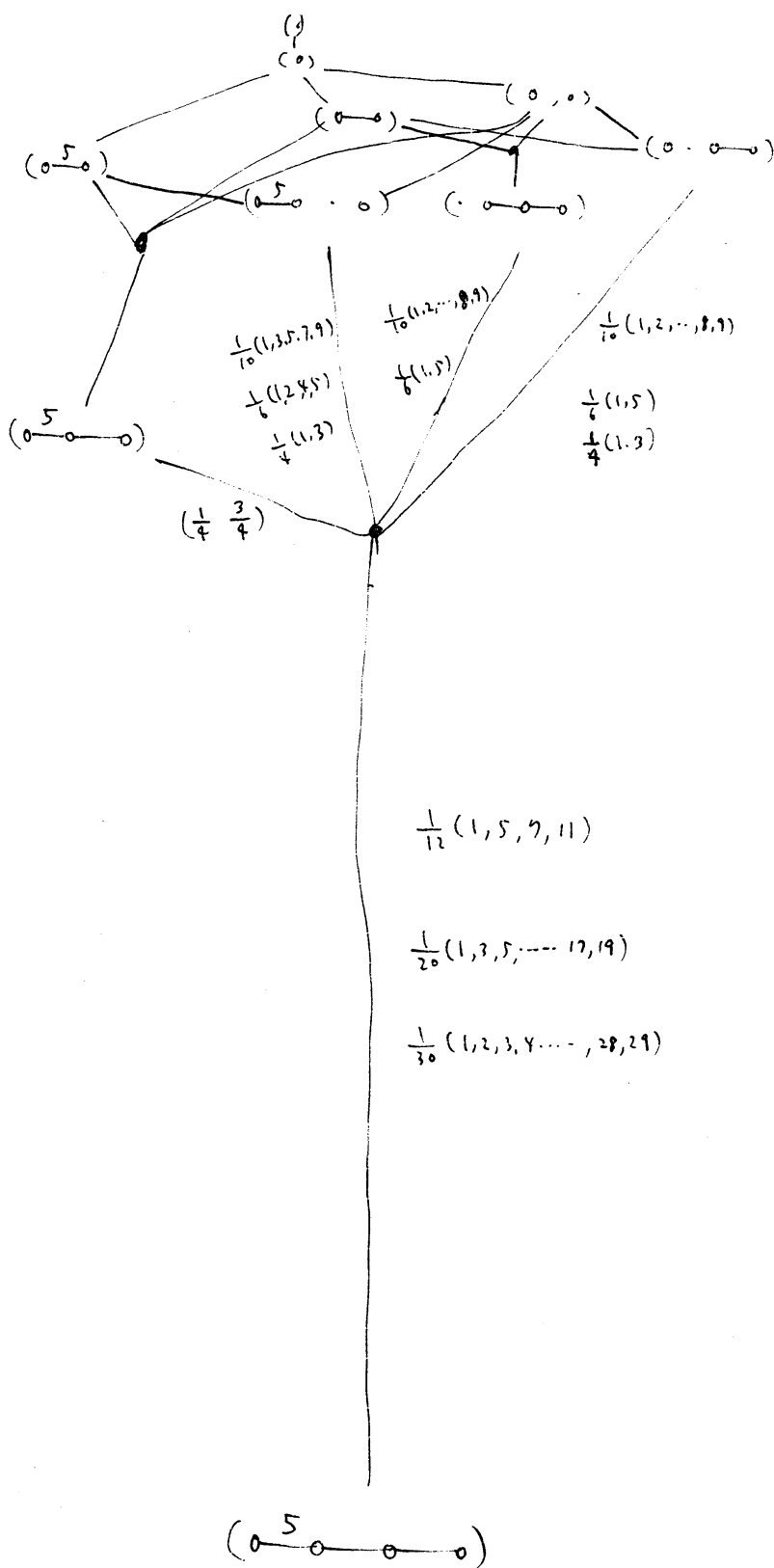
$$\Sigma_{12} = (p_0 p_4, p_0 p_2^2, p_0^2, p_0 p_4 p_2, p_4^2, p_4^2 p_2^2, p_4 p_2^4, p_2^6, d)$$

ここで p_{20} は ξ_i^2 の 10 -次基本対称式。

尚, $1, 2, 3, 4$ の τ の \pm の座標の配置は, 符号 \pm の 17
 の 2 の τ の 17 の集合を \mathbb{Q} の 17 は, \mathbb{Q} は 120 元 17 の 17 ,
 $\text{norm } 1$ の 10 元 17 の有限部分群を 17 . \mathbb{Q} は, 10 -
 17 の 17 の 17 の 17 ($2, 11$)

H4

0
3
6
9
12
15
18
21
24
27
30
33
36
39
42
45
48
51
54
60



正多面体との関連

H_3, H_4 は, 3, 4次元において, 特別な正多面体の存在を
 知られている。次に, 正多面体の一覧表を (2) 示す。

次元	Coxeter群	Dynkin diagram	各面	γ_2 diagram	面	群
2次元						
正3角形	A_2		○	A_1	正3角形	\mathcal{U}_3
正4角形	B_2		○	'	'	'
正6角形	G_2		○	'	'	'
正m角形	$I_2(m)$		○	'	'	'
3次元						回転群
正4面体	A_3			A_2	正3角形	\mathcal{U}_4
正6面体	B_3			B_2	正4角形	} \mathcal{G}_4
正8面体	B_3			A_2	正3角形	
正12面体	H_3			$I_2(5)$	正5角形	} \mathcal{U}_5
正20面体	H_3			A_2	正4角形	
4次元						
正5面体	A_4			A_3	正4面体	
正8面体	B_4			B_3	正6面体	
正16面体	B_4			A_3	正4面体	
正24面体	F_4			B_3	正8面体	
正120面体	H_4			H_3	正12面体	
正600面体	H_4			A_3	正4面体	

$n-2$ 元 ($n \geq 5$)					
正 $n+1$ 面体	$\circ - \circ - \dots - \circ$	A_n	$\circ - \circ - \dots - \circ$	A_{n-1}	正 n 面体
正 $2n$ 面体	$\circ - \circ - \dots - \circ \Rightarrow \circ$	B_n	$\circ - \circ - \dots - \circ \Rightarrow \circ$	B_{n-1}	正 $2(n-1)$ 面体
正 2^n 面体	$\circ - \circ - \dots - \circ \times \circ$	C_n	$\circ - \circ - \dots - \circ$	A_{n-1}	正 n 面体

ルート系に対応する \mathfrak{g} に対応しては、 \mathfrak{g} の Dynkin diagram で
 長さの長いルートの端の一個をはずした \mathfrak{g} の \mathfrak{g} 、各面 \mathfrak{g} diagram
 になる。 H_3, H_4 では、と \mathfrak{g} の端をはずすかによって、
 異なる多面体に対応する。 Coxeter 群として同じ \mathfrak{g} は
 互いに双対的。特に、Coxeter diagram が左右対称な \mathfrak{g} は
 自己双対。

- [1] N. Bourbaki : Lie 群 & Lie 環 3. Chap 4, 5, 6.
- [2] T. Yano : Theory of b -functions. (to appear in
Publ. of RIMS)
- [3] K. Saito : Discriminant Loci

Appendix

$\underline{GL(2)}$ の不変式に由来する, simple な多項式について.

§1. Introduction.

$$x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + x_2 t^{n-2} + \dots + x_{n-1} t + x_n$$

の判別式 $\Delta(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ は $n=2, 3$ の時, \mathbb{R}^{n+1} の原点 conormal に $x_0=1$ で simple である. $n \geq 4$ では, monic

($x_0=1$) にした上, $x_1=0$ と $x_1 < (A_{n-1})$, $x_n \neq 0$ かつ (B_n)

$x_n = x_{\frac{n}{2}}^2$ とする (D_n) に $n \geq 1$ より, simple とする. T .

よって, 事情は, Δ を不変にする Lie 環を $n \geq 4$ について, 上記説明を $n \geq 3$

③ ($n=4$) $\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ を不変にする Vector fields.

x_{-1}	x_0'	x_0	x_1	x_2	
	$4x_0$		x_1	$2x_0x_2$	D_0
$4x_0$	$3x_1$	x_1	$2x_2$	$3x_0x_3 + x_1x_2 + 3x_3x_0$	D_1
$3x_1$	$2x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$4x_0x_4 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 + 4x_4x_0$	D_2
$2x_2$	x_3	$3x_3$	$4x_4$	$3x_1x_4 + x_3x_2 + 3x_4x_1$	D_3
x_3		$4x_4$		$2x_2x_2$	D_4

初め $n \geq 2$ は $\underline{GL(2)}$ の作用から生じている。 (x_0, \dots, x_n) は

discriminant の特殊性より生じている。 \pm の係数の \det は

Δ に等しく, 従って Δ を不変にする Vector fields は $n \geq 4$ が

free basis になっている。

$\Delta(1, x_1, x_2, x_3)$ に作用する ρ による変換は D_0 の係数を (x_0-1) の係数にしなけければならない。

$$x_1 + x_2 \left(x_0 - \frac{1}{4} (x_0' + x_0) \right) = x_1 (x_0 - 1) D_0 + 2x_2^2 D_1 + (3x_3^2 + x_1 x_2) D_2 + (4x_4^2 + 2x_1 x_3) D_3 + 3x_1 x_4 D_4$$

$$\frac{1}{2} \left\{ x_2 + x_2 \left(x_0 - \frac{1}{2} (x_0' + x_0) \right) \right\} = 0 \quad D_0 + 3x_0 x_3 D_1 + (4x_0 x_4 + 2x_1 x_3) D_2 + (3x_1 x_4 + x_2 x_3) D_3 + 2x_2 x_4 D_4$$

従って,

x_1	$2x_2$	$3x_3$	
$3x_1$	$2x_2$	$3x_3 + x_1 x_2$	$4x_4 + 2x_1 x_3$
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4 + 2x_1 x_3$	$3x_1 x_4 + x_2 x_3$
x_3	$4x_4$	$3x_1 x_4$	$2x_2 x_4$

(*)

ここで ρ を x_4 倍する場合は, B_4 の Lie 環を ρ する。 ρ による変換は $x_4 = x_2'^2$ とおくと D_4 を ρ する。 A_3 を求めるには, D_1 の係数を x_1 の係数に 1 とし, $x_1 = 0$ とおく (この際 D_1 の係数を 0 にする) ρ の操作には上の ρ を用いるのはよい。

尚初めの例 $n=4$ は n が偶数のため x_2 の 2 重に ρ を用いてよい。

(111) $n=5$.

x_{-1}	x_0'	x_0	x_1	x_2	x_3
	$5x_0$		x_1	$2x_0 x_2$	
$5x_0$	$4x_1$	x_1	$2x_2$	$3x_0 x_3 + x_1 x_2$	$4x_4 x_0$
$4x_1$	$3x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$4x_0 x_4 + 2x_1 x_3$	$3x_4 x_1 + 5x_5 x_0$
$3x_2$	$2x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_0 x_5 + 3x_1 x_4$	$2x_4 x_2 + 4x_5 x_1$
$2x_3$	x_4	$4x_4$	$5x_5$	$4x_1 x_5$	$x_4 x_3 + 3x_5 x_2$
x_4		$5x_5$			$2x_5 x_3$

§ 2.

以下

$$p(x) = x^n + x_1 x^{n-1} + \dots + x_n = \prod (x - \xi_i) \quad \text{と書く.}$$

$$\mathbb{C}_\xi^m \xrightarrow{\mathcal{G}_m} \mathbb{C}_x^m \quad \text{と射影変換の作用による,}$$

高次元の \mathbb{C}^n 上の y_1, \dots, y_n は (ξ_i) の ν 次の中核をなすもの,

(x_1, \dots, x_n) と (y_1, \dots, y_n) は bi-holomorphic に変換される.

実際, $\frac{p'(t)}{p(t)} = \sum \frac{1}{t - \xi_i} = \sum_{\nu \geq 0} \frac{y_\nu}{t^{\nu+1}} \quad (y_0 = n) \quad \text{より,}$

$$n x^{n-1} + (n-1)x_1 x^{n-2} + \dots + x_{n-1} = (x^n + x_1 x^{n-1} + \dots + x_n) \sum_{\nu \geq 0} \frac{y_\nu}{t^{\nu+1}}$$

の両辺を比較して, (x) と (y) の変換の式を得ることができる.

Prop. 1 \mathbb{C}_ξ^n 上の meromorphic vector field $\sum a_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ は, \mathcal{G}_n 不変

かつ \mathbb{C}_x^m 上 holomorphic vector field であること. このとき

$\exists A(x; t_1, \dots, t_{n-1})$: holomorphic, symmetric in (t_1, \dots, t_{n-1})

s.t. $a_i(\xi) = A(\xi_i; \xi_1, \dots, \xi_n) / p'(\xi_i)$

\therefore y -coordinate へ行くと, $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad \text{より,}$

$$\sum a_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \sum b_i(y) \left(i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \dots & \xi_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \dots & \xi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{n-1} & \dots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{これより明らか. } \square$$

特に, $X_\nu = \sum_{i=1}^n \xi_i^{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ には, $\sum_{i=1}^n y_{\nu+i} (i \frac{\partial}{\partial y_i})$ が対応する。
 3. このとき, X_{-1}, X_0, X_1 は, $\underline{GL(2)}$ に由来するものである。
 $[X_\mu, X_\nu] = (\nu - \mu) X_{\mu+\nu}$ であり, 特に, $X_\nu, \nu \geq 2$ は,
 $[X_1, X_2]$ を inductive に $X_{\nu+1} = \frac{1}{\nu-1} [X_1, X_\nu]$ と定義
 してよい。

$$X_{n+\mu} + x_1 X_{n+\mu-1} + \dots + x_n X_\mu = 0 \quad (1)$$

と 1) の関係があり, $X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_{n-2}$ は独立である。

$$\begin{cases} e^{tX_\nu} f(\xi) = f\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\nu t \xi^2}}\right) & \nu \geq 1, \\ e^{tX_1} f(\xi) = f((1+t)\xi), \quad e^{tX_{-1}} f(\xi) = f(\xi+t). \end{cases} \quad (2)$$

$\underline{GL(2)}$ の ^{変換} 不変式 $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ があり, $\varphi(1, x_1, \dots, x_n)$ は不変にする Lie 環が, discriminant $\Delta = 0$ かつ, $X_{-1}, X_0, X_1, X_2', X_3', \dots, X_{n-2}'$ といふ weight ν の作用素 X_ν' により 自由生成 してあることもあり, この程度存在するのである; 今, ここで $X_\nu' \nu \geq 3$ は, generic には $X_{\nu+1}' = \frac{1}{\nu-1} [X_1, X_\nu']$ により X_2' を作り出してよいと考えてよい。 $X_\nu' \nu \geq n-1$ は上式により inductive に定義して, 次の可積分条件を要求する。

$$a_0 X_{n-1}' + a_1(\xi) X_{n-2}' + \dots + a_{n-1}(\xi) X_0 + a_n(\xi) X_{-1}' = 0. \quad (3)$$

これは $a_\nu(\xi)$ は (ξ) の ν 次対称多項式である。

我々の求める Lie 環は, 本質的には X_2' の 5 成分に従う。

X_2' を $X_2 + Y_2$ の形に書くことができる。(1)より、ここで

X_2 は discriminant を持つため、同様に Y_2 は Prop. 1 により

$$Y_2 = \sum \frac{A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

の形であるけれども、実は

より強く、

$$Y_2 = \sum \frac{A(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_n - \xi_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (4)$$

であると仮定してよい。実際、 $[X_{-1}, \cdot]$ の性質より、

$$[X_{-1}, Y_2] = aX_1 + bX_0 + (cX_2 + dX_1^2)X_{-1}$$

となる。したがって、

$$Y_2' = Y_2 - \frac{a}{n} X_1 X_1 - (b - \frac{2a}{n}) X_2 X_0 - \frac{d}{n-1} X_1 X_2 X_{-1} - (-c + (b - \frac{2a}{n}) + \frac{n}{n-1} d) X_3 X_{-1}$$

と表わすことができる。

$[X_{-1}, Y_2'] = 0$. i.e. Y_2' は translation invariant である。

より、(4) の形である。

以下を定義する $X_\nu^0 = \sum \xi_i^{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$,

$$X_\nu = X_\nu^0 \quad \nu = -1, 0, 1.$$

$$X_2 = X_2^0 + Y_2, \quad Y_2 = \sum \frac{A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_n - \xi_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

$A_{n+2}(t_1, \dots, t_{n-1})$ は (X) による homogeneous $n+2$ 次多項式。

$$X_{\nu+1} = \frac{1}{\deg} [X_1, X_\nu] \quad \nu \geq 2 \quad \text{と置く。}$$

Prop. ① $[X_\mu, X_\nu] = (\nu - \mu) X_{\nu+\mu}$ $\mu = -1, 0, 1,$
 $\nu = -1, 0, 1, 2, \dots$

② $X_\nu = X_\nu^0 + Y_\nu$

$$Y_\nu = \sum \frac{A_{n+\nu}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad \text{ただし } i = 1, 2, \dots, n$$

$A_{n+\nu}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ は ξ_1, \dots, ξ_n による $n+\nu$ 次多項式,
 (ξ_2, \dots, ξ_n) による $n+\nu$ symmetric である, \Rightarrow 一般に $n+\nu$ 次多項式である。

$$A_{n+\nu}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{cases} 0 & \nu = -1, 0, 1 \\ \frac{1}{(\nu-2)!} L^{\nu-2} A_{n+2}(\xi_1-\xi_2, \dots, \xi_1-\xi_n) & (\nu \geq 2) \end{cases} \quad (6)$$

$$L = X_1 - n\xi_1 - \sum_{j=1}^n \xi_j$$

\therefore induction により示すことができる。 \square

我々の事情 (3) に $[X_{-1}, \]$ を行い, X_{n-2}, \dots, X_{-1} が独立で
 未定であることを用いることは,

$$a_\nu(\xi) = \frac{(-1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} (X_{-1})^{n-\nu} a_n(\xi) \quad (7)$$

又, (3) の $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$ の係数を与えて,

$$\begin{aligned} & a_0 A_{2n-1} + a_1 A_{2n-2} + \dots + a_{n-3} A_{n+2} \\ &= - \left(\sum_{\mu=0} a_\mu \xi_1^{n-\mu} \right) (\xi_1 - \xi_2) \dots (\xi_1 - \xi_n) \end{aligned} \quad (8)$$

即ち 必要条件として

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_0}{(n-3)!} L^{n-3} + \frac{a_1}{(n-4)!} L^{n-4} + \dots + a_{n-3} \right) A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_n) \\ &= - \left(\sum_{\mu=0} a_\mu \xi_1^{n-\mu} \right) p'(\xi_1) \end{aligned} \quad (9)$$

$$L = \xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n X_1 \xi_1^{-n+1} \xi_2^{-1} \cdots \xi_n^{-1} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} e^{tL} f(\xi) &= \xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n e^{tX_1} \frac{f(\xi)}{\xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n} \\ &= \xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n f\left(\frac{\xi}{1-t\xi}\right) \frac{(1-t\xi_1)^{n+1} (1-t\xi_2) \cdots (1-t\xi_n)}{\xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n} \\ &= (1-t\xi_1)^n \prod_{i=1}^n (1-t\xi_i) f\left(\frac{\xi}{1-t\xi}\right) \end{aligned}$$

$$\text{又, } e^{-tX_1} g(\xi) = g(\xi-t) = \sum \frac{(-t)^k}{k!} (X_1)^k g(\xi)$$

$f = A_{n+2}$ かつ $g = a_n$ に適用して, (前節で $t \rightarrow 1/t$)

$$\begin{aligned} &a_n(\xi-t) (1-\frac{\xi_1}{t})^n \prod (1-\frac{\xi_i}{t}) A_{n+2}\left(\frac{t\xi}{t-\xi}\right) \\ &= \sum t^{\ell} a_{n-\ell}(\xi) \sum \frac{t^{-k} (L^k A_{n+2})}{k!} \\ &= \sum t^{\ell} \sum a_{n-\ell}(\xi) \frac{(L^{\ell-k} A_{n+2})}{(\ell-k)!} \quad \text{よって } \underline{h=3} \text{ の仮定より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ の左辺に } -\xi_1 \text{ (上式左辺)} &= a_n(\xi-t) t^{\ell} \frac{\prod (t-\xi_i)}{t-\xi_1} A_{n+2}\left(\frac{\xi_2-\xi_1}{t-\xi_1}, \dots, \frac{\xi_n-\xi_1}{t-\xi_1}\right) \\ \sum a_{\mu} \xi_1^{n-\mu} &= \sum \frac{(-\xi_1)^{n-\mu}}{(n-\mu)!} (X_1)^{n-\mu} a_n(\xi) = a_n(\xi-\xi_1) \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\text{Res}_{t \rightarrow \infty} a_n(t-\xi_1, \dots, t-\xi_n) \left(1 + (-)^n \prod_{i=2}^n \frac{t-\xi_i}{\xi_i-\xi_1} A_{n+2}\left(\frac{\xi_2-\xi_1}{t-\xi_1}, \dots, \frac{\xi_n-\xi_1}{t-\xi_1}\right) \right) \frac{dt}{t-\xi_1} = 0 \quad (10)$$

この (10) には特殊解 $a_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1 \cdots \xi_n$

$A_{n+2}(\xi_1-\xi_1, \dots, \xi_1-\xi_n) = (\xi_1-\xi_2, \dots, \xi_1-\xi_n)$ の基本対称式の齊二次式

(i.e. $\bar{p}_3 \cdot \bar{p}_{n-1}, \bar{p}_4 \cdot \bar{p}_{n-2}, \dots$) を用いて

こゝで $\bar{p}_3 \cdot \bar{p}_{n-1}$ 等の初めの γ_2 のとりかたは, γ_2 の ξ_1 X_1, X_0, X_{-1} で表示する方が, 不都合 である。

また $a_n = \xi_1 \dots \xi_n$ とするとき, (10) を T へ A_{n+2} は L による
 変換 (か $\xi_1 = 0$ となる) を行う。変換 $\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \xi_1 - \xi_2, \dots, \eta_n = \xi_1 - \xi_n$
 を行う。 $L = \eta_1^2 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + 2\eta_1 M - N$ $\left(\begin{array}{l} M = \eta_2 D_2 + \dots + \eta_n D_n - n \\ N = (\eta_2^2 D_2 + \dots + \eta_n^2 D_n) - \sum \eta_i \end{array} \right.$

$M-2, \frac{\partial}{\partial \eta_1}$ は A_{n+2} を零化した。

$$L^v \equiv \sum_{\mu=0}^v C_{v,\mu} t^{v-\mu} N^\mu \pmod{\mathcal{O}(M-2) + \mathcal{O}\frac{\partial}{\partial \eta_1}} \quad (11)$$

$$C_{0,0} = 1, \quad C_{v,\mu} = C_{v-1,\mu-1} + (v+\mu)C_{v-1,\mu}$$

$$(L^0 \equiv 1, L^1 \equiv 4\eta_1^2 - N, L^2 \equiv 20\eta_1^2 - 10\eta_1 N + N^2, L^3 \equiv 120\eta_1^3 - 90\eta_1^2 N + 18\eta_1 N^2 - N^3, \dots)$$

今 $a_n = (-)^n \xi_1 \dots \xi_n$ とするとき, $a_\mu = x_\mu = (-)^n (\xi_1 \dots \xi_n \text{ の } \mu \text{ 次基本対称式})$

従って, $a_{\mu} |_{\xi_1=0} = (\eta_2, \dots, \eta_n \text{ の } \mu \text{ 次基本対称式}) = \bar{p}_\mu$

$$\sum a_{\mu} \xi_1^{n-\mu} = 0.$$

よって, (9) は, $\xi_1 = 0$ での $(\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \eta_1)$ の作用 (η_1 を含む)

$$\left(\frac{1}{(n-3)!} (-N)^{n-3} + \frac{\bar{p}_1}{(n-4)!} (-N)^{n-4} + \dots + \bar{p}_{n-3} \right) A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n) = 0. \quad (12)$$

この () 内の作用素は, $\frac{(-)^{n-3}}{(n-3)!} (N - \bar{p}_1)^{n-3}$ である。

容易にわかる。 $N - \bar{p}_1 = \left(2\bar{p}_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2} + \dots + (n-1) \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \eta_{n-1}} \right) + \bar{p}_1 \left(\bar{p}_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \dots + \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \eta_{n-1}} - 2 \right)$

を用いて, $(N - \bar{p}_1)^{n-3} B(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n-1}) = 0$ の解は \bar{p}_0 の特殊な

2次式に存在 (とわかる) (\bar{p}_0 の解を explicit に書く)

特に weight $n+2$ 以上の任意の 2次式が解に存在 (とわかる)

3。 (他に weight $n, n+1$ の特殊な解がある。)

さて、(3)を要請するときは、 $a_n = X_n$ とおくとよい。この
 ほか、今、 a_1, \dots, a_n は 函数的に独立 と仮定せよ。このとき、
 (3) は $[X_{-1},] [X_0,] [X_1,]$ とは 0 に等しい。

$$\begin{cases} X_{-1} = nD_{a_1} + (n-1)D_{a_2} + \dots + D_{a_n} \\ X_0 = a_1 D_{a_1} + 2a_2 D_{a_2} + \dots + na_n D_{a_n} \\ X_1 = (a_1^2 - 2a_2)D_{a_1} + \dots \end{cases}$$

となり、 (X_0) に対する X_{-1}, X_0, X_1 の表示を全く等しい。
 よって、これに X_2 を加えて Lie 環を構成するに当たっては、
 $a_0 = X_0$ とおくとよい。

以上をまとめると、我々の場合を多に与えよ。

Γ X_{-1}, X_0, X_1 は discriminant と同じ、 $X_2 = X_2^0 + Y_2$

$$Y_2 = \sum \frac{Ant_2(\eta_2, \dots, \eta_n)}{p'(\xi_i)} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

\Rightarrow $Ant_2(\eta_2, \dots, \eta_n)$ は、 (η_2, \dots, η_n) の 基本対称式を \bar{p}_0 と

して、 $\bar{p}_4, \bar{p}_{n-2}, \bar{p}_5, \bar{p}_{n-3}, \dots$ と一次結合。

$$X_{\nu+1} \equiv \frac{1}{\nu-1} [X_1, X_\nu] \quad \nu \geq 2 \quad \text{と定義するとき}$$

$X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_{n-2}$ が Lie 環をなす。

recursion formula: $X_{n-1} + X_1 X_{n-2} + \dots + X_n X_{-1} = 0$

特に、 $n \geq 6$ ならば、我々の求める新しい Lie 環は
 存在する。このほか、 $n=6$ の場合には、実際に
 存在する。これは、 $(\mathfrak{g}(5) \times \mathfrak{sl}(4), \mathbb{B} \oplus \mathbb{Q})$ の
 あり orbit の localization が見出されたことである。

$(SL(5) \times GL(4), \mathbb{R} \otimes \mathbb{R})$ に z, \dots, z , point

$$e_1 \wedge e_3 \otimes e_7 + e_4 \wedge e_5 \otimes e_7 + e_2 \wedge e_5 \otimes e_8 + e_3 \wedge e_4 \otimes e_8 + e_1 \wedge e_4 \otimes e_9 + e_2 \wedge e_3 \otimes e_9$$

は codimension 7 の orbit の generic point z 附近 $z = z_0 + \dots + z_6 z$ の

transversal 方向 z 方向 z 17,

$$(x_0 e_3 \wedge e_5 + \frac{1}{3} x_1 e_1 \wedge e_5 + \frac{2}{3} x_2 e_1 \wedge e_3 + x_3 e_2 \wedge e_5 + \frac{4}{3} x_4 e_1 \wedge e_3 - \frac{4}{3} x_5 e_1 \wedge e_2 + 8 x_6 e_2 \wedge e_4) \otimes e_6$$

を z 方向に, 不変式 σ の localization は z の 7×7 行列 σ

行列式 $\sigma(z)$ であり, $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ は z 方向に

不変な z の Lie 環の free basis z である。

σ^i	x_1	x_0'	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
D_0		$6x_0$		x_1	$-\frac{1}{3}x_0x_2 + \frac{1}{9}x_1^2$	$\frac{1}{3}x_1x_2$	$\frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_1x_3 + \frac{4}{3}x_0x_4$
D_1	$6x_0$	$5x_1$	x_1	$2x_2$		$\frac{1}{2}x_1x_3$	$4x_0x_4$
D_2	$5x_1$	$4x_2$	$2x_2$	$3x_3$	x_0x_4	$2x_1x_4 - 5x_0x_5$	$9x_0x_6 + x_1x_5$
D_3	$4x_2$	$3x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$\frac{10}{3}x_0x_5 + \frac{2}{9}x_1x_4$	$\frac{4}{9}x_1x_5 - \frac{16}{9}x_0x_6 - \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{16}{9}x_2x_4$	$\frac{10}{3}x_1x_6 + \frac{2}{9}x_2x_5$
D_4	$3x_3$	$2x_4$	$4x_4$	$5x_5$	$9x_0x_6 + x_1x_5$	$2x_2x_5 - 5x_1x_6$	x_2x_6
D_5	$2x_4$	x_5	$5x_5$	$6x_6$	$4x_1x_6$	$\frac{1}{2}x_3x_5$	
D_6	x_5		$6x_6$		$\frac{1}{9}x_4^2 - \frac{1}{3}x_2x_5 + \frac{4}{3}x_2x_6$	$\frac{1}{9}x_4x_5$	$-\frac{1}{3}x_4x_6 + \frac{1}{9}x_5^2$

z の式 $\sigma(z)$ は $\sigma(x_0, x_1, x_2, \dots, x_6)$ であり, 初等 σ の作用素

が z の z 方向に $GL(2)$ invariant である。

$\sigma(1, 0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ は, z の Lie 環の作用素 σ 不変,

である。 $(\sigma, x_6 \sigma(1, x_1, \dots, x_6), \sigma(1, x_1, \dots, x_5, x_6^2))$ は x_2 の D_6 の行列

と4次元 $\frac{1}{9}X_4^2$ が残り, 2次元消去できたから, 1次元
 作用素の2次元 simple にすぎない(不可能である。)

⑤

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
$2X_2$	$3X_3$	$4X_4$	$5X_5$	$6X_6$
$3X_3$	$4X_4 - \frac{4}{3}X_2^2$	$\frac{40}{3}X_5 - \frac{2}{3}X_2X_3$	$16X_6 + \frac{1}{2}X_3^2 - \frac{16}{9}X_2X_4$	$-\frac{8}{9}X_2X_5 + \frac{1}{9}X_3X_4$
$4X_4$	$5X_5 - X_2X_3$	$36X_6 - \frac{4}{3}X_2X_4$	$-2X_2X_5$	$\frac{4}{9}X_4^2 - \frac{8}{3}X_3X_5 + \frac{8}{3}X_2X_6$
$5X_5$	$6X_6 - \frac{2}{3}X_2X_4$	$-2X_2X_5$	$-\frac{1}{2}X_3X_5$	$-\frac{1}{9}X_4X_5$
$6X_6$	$-\frac{1}{3}X_2X_5$	$\frac{4}{9}X_4^2 - \frac{4}{3}X_3X_5 + \frac{8}{3}X_2X_6$	$-\frac{1}{9}X_4X_5$	$-\frac{10}{27}X_5^2 + \frac{8}{9}X_4X_6 + \frac{8}{27}X_2^2X_6$ $+\frac{2}{81}X_2X_4^2 + \frac{2}{27}X_2X_3X_5$

$$[X_1, X_2] = -4X_3 + \frac{-2}{3}X_2X_1$$

$$[X_1, X_3] = -3X_4 + \frac{1}{3}X_2X_2 + \frac{-1}{2}X_3X_1 + \frac{1}{3}X_4X_0$$

$$[X_1, X_4] = \frac{1}{6}X_3X_2 + \frac{1}{3}X_4X_1 + \frac{1}{3}X_5X_0$$

$$[X_2, X_3] = -\frac{2}{3}X_2X_3 + \frac{2}{3}X_5X_0$$

$$[X_2, X_4] = \frac{2}{9}X_4X_2 + \frac{-8}{9}X_5X_1 + \frac{8}{3}X_6X_0$$

$$[X_3, X_4] = \frac{1}{9}X_4X_3 + \frac{1}{9}X_5X_2$$

$$[X_0, X_6] = 0$$

$$X_0 f = 30f, \quad X_1 f = 0, \quad X_2 f = -\frac{4}{3}X_2 f, \quad X_3 f = X_3 f, \quad X_4 f = (2X_4 + \frac{8}{27}X_2^2)f$$

次に6次元の判別式 + 場合分け () 上 $\sqrt{5}$ の
 対象であることに注意せよ。(cf. p.) 又, X_4 に3次元の作用素。

$$\Delta(1, 0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_5$	$6x_6$
$3x_3$	$4x_4 - \frac{4}{3}x_2^2$	$5x_5 - x_2x_3$	$6x_6 - \frac{2}{3}x_2x_4$	$-\frac{1}{3}x_2x_5$
$4x_4$	$5x_5 - x_2x_3$	$6x_6 + 2x_2x_4 - \frac{3}{2}x_3^2$	$3x_2x_5 - x_3x_4$	$4x_2x_6 - \frac{1}{2}x_3x_5$
$5x_5$	$6x_6 - \frac{2}{3}x_2x_4$	$3x_2x_5 - x_3x_4$	$4x_2x_6 + 2x_3x_5 - \frac{4}{3}x_4^2$	$3x_3x_6 - \frac{2}{3}x_4x_5$
$6x_6$	$-\frac{1}{3}x_2x_5$	$4x_2x_6 - \frac{1}{2}x_3x_5$	$3x_3x_6 - \frac{2}{3}x_4x_5$	$2x_4x_6 - \frac{5}{6}x_5^2$

$$[x_1, x_2] = x_3 - x_2x_1 + x_3x_0$$

$$[x_1, x_3] = 2x_4 + \frac{2}{3}x_2x_2 + \frac{2}{3}x_4x_0$$

$$[x_1, x_4] = -\frac{1}{3}x_2x_3 + \frac{1}{3}x_5x_0$$

$$[x_2, x_3] = x_2x_3 - x_3x_2 + x_4x_1 - x_5x_0$$

$$[x_2, x_4] = 2x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3x_3 + \frac{1}{2}x_5x_1 - 2x_6x_0$$

$$[x_3, x_4] = x_3x_4 + \frac{2}{3}x_4x_3 + \frac{2}{3}x_5x_2 - x_6x_1$$

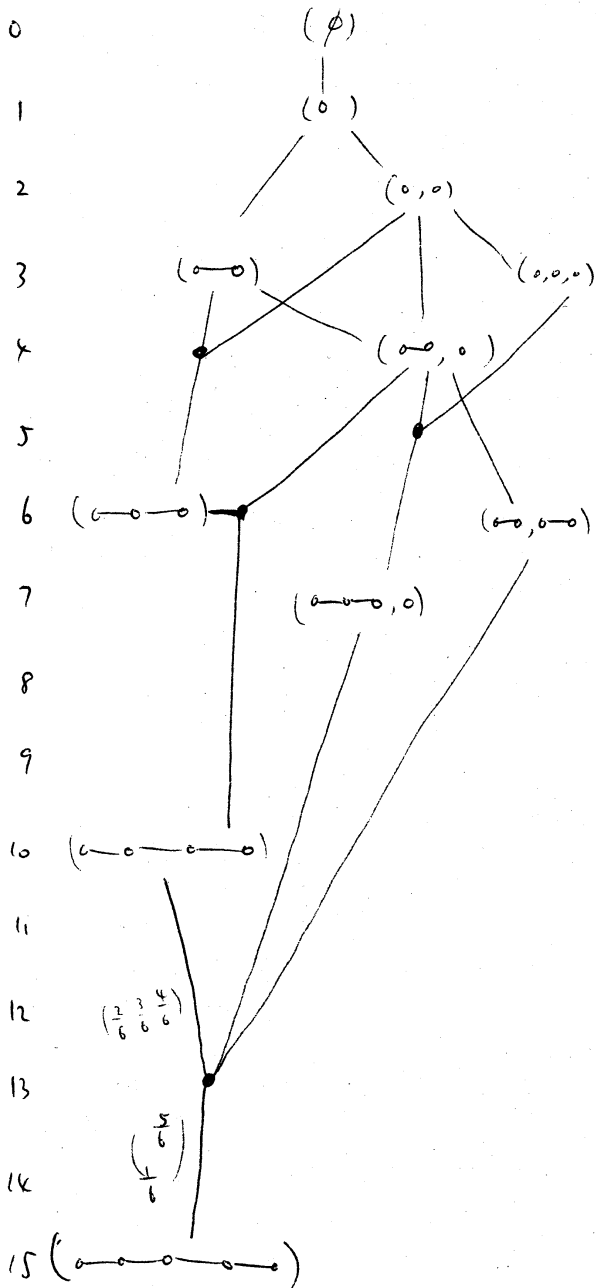
$$x_0f = 30f, \quad x_1f = 0, \quad x_2f = 12x_2f, \quad x_3f = 6x_3f, \quad x_4f = 2x_4f$$

後には, Q1(2) に由来する, simple 群 S_7 を $K_2 \times \Gamma$ の Γ ,
 $\Gamma \cong S_7$ ($\Gamma \cong S_7$) を証明する。

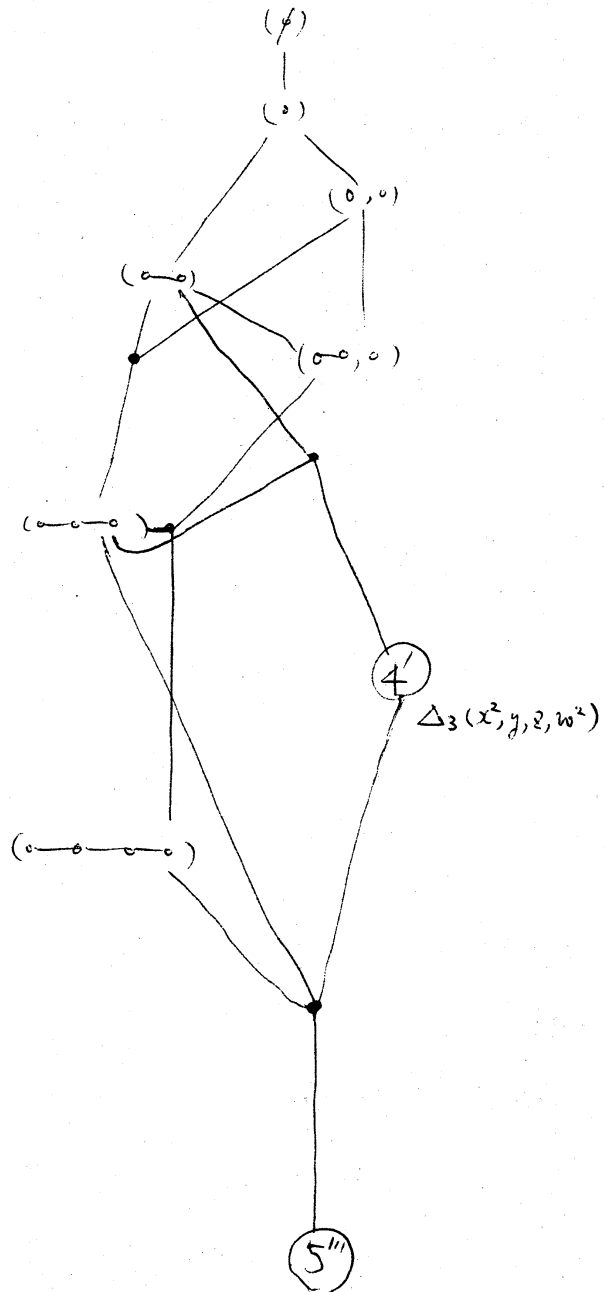
(一般に $x_0f = n(n-1)f, \dots, x_{n-2}f = 2 \cdot 1 x_{n-2}f$.)

この2つの不変式の holonomy diagram は次の通りである。

6次式 discriminant



5'''



6次式の discriminant の作用 σ は X_0, X_1, X_2, X_3, X_4

(5th) の作用 σ は $X_0, X_1, X_2', X_3', X_4' \in 1$,

$$Y_2 = X_2', Y_3 = -4X_3', Y_4 = 6X_4' - \frac{1}{3}X_2X_2' \quad \text{と定まる。}$$

$$X_v = \alpha X_v^0 + Y_v \quad v = 2, 3, 4 \quad \text{と定まる。}$$

$$[X_1, X_2] = X_3 - (\alpha + \frac{2}{3})X_2X_1 + \alpha X_3X_0$$

$$[X_1, X_3] = 2X_4 - \frac{2}{3}X_2X_2' + 2X_3X_1 + \frac{2}{3}(\alpha - 2)X_4X_0$$

$$[X_1, X_4] = -\frac{1}{3}X_2X_3 + (-2X_4 + \frac{2}{9}X_2^2)X_1 + (\frac{\alpha}{3} + 2)X_5X_0$$

$$\begin{aligned} [X_2, X_3] &= \alpha^2 [X_2^0, X_3^0] + \alpha ([X_2^0, Y_3] + [Y_2, X_3^0]) + [Y_2, Y_3] \\ &= \alpha \{ X_2X_3 - X_3X_2 + \alpha X_4X_1 - \alpha X_5X_0 \} - \frac{2}{3}X_2X_3 - \frac{8}{3}X_5X_0 \\ &\quad + \alpha \{ [X_2^0, Y_3] + [Y_2, X_3^0] - X_2Y_3 + X_3Y_2 + \frac{2}{3}X_2X_3^0 \} \end{aligned}$$

$$[X_2^0, Y_3] + [Y_2, X_3^0] - X_2Y_3 + X_3Y_2 + \frac{2}{3}X_2X_3^0 = -\frac{136}{3}X_5X_0 + \frac{28}{3}X_4X_1 + 10Z$$

$$\begin{aligned} Z &= (-\frac{80}{3}X_2X_6 + 10X_3X_5 + \frac{8}{3}X_4^2 + \dots)D_3 + (-33X_2X_6 + \frac{70}{3}X_4X_5 + \dots)D_4 \\ &\quad + (-20X_4X_6 + \frac{86}{3}X_5^2 + \dots)D_5 + (\frac{100}{3}X_5X_6 + \dots)D_6 \end{aligned}$$

よって $4(\alpha+1)X_4X_1 - 3X_3X_2, 5(\alpha-4)X_5X_0 - 2X_2X_3, \dots$

が結合で未だたせなければならぬが、Zが $\frac{86}{3}X_5^2D_5 + \frac{100}{3}X_5X_6D_6$ と

$$5(\alpha-4)X_5X_0 - 2X_2X_3 \Rightarrow 5(\alpha-4) \cdot (5X_5^2D_5 + 6X_5X_6D_6) \text{ とはならない。}$$

よって不可解な未だたせなければならぬ。よって、 $m=6$ のとき、 σ

の求め方もは discriminant 以外には (5th) しか存在しない。

この場合、 $X_2^0 - \frac{1}{51}[P_4^2]$ のみ適 (てい) になる。

さて, $A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n)$ とし, $\bar{p}_\ell \cdot \bar{p}_{n-(\ell-2)}$ $\forall \ell \leq n-2$
 をとったとき, Y_ν が X 座標で Z の形に表せるから,
 次の方法で求めることができる。

$$Y_2 = \sum_1 \frac{A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_n)}{(\xi_1 - \xi_2) \cdots (\xi_1 - \xi_n)} \frac{\partial}{\partial \xi_1}$$

$$Y_2 : p_\nu \mapsto \sum_1 \frac{A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_n)}{(\xi_1 - \xi_2) \cdots (\xi_1 - \xi_n)} p_{\nu-1}(\xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$\begin{aligned} \Pi(t - \xi_\nu) &\mapsto - \sum_1 \frac{(t - \xi_2) \cdots (t - \xi_n)}{(\xi_1 - \xi_2) \cdots (\xi_1 - \xi_n)} A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_n) \\ \sum_1 (-1)^\nu p_\nu t^{n-\nu} &\equiv - \tilde{A}_{n+2}(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n) \\ \sum_1 x_\nu t^{n-\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \end{aligned} \quad (13)$$

$$p_n(t) = \Pi(t - \xi_1) = \sum_1 x_\nu t^{n-\nu} \quad p_{n-\nu}(t) = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d}{dt} \right)^\nu p_n(t) \quad \text{と定義する}$$

(exp. $p_1(t) = nt$)

$$A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n) = B(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n-1}) \quad \text{であるとき,}$$

$$\tilde{A}_{n+2}(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n) \stackrel{\text{def}}{\equiv} B(p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)) \pmod{p_n(t)} \quad (14)$$

とすると \tilde{A}_{n+2} は $n-1$ 次多項式であるから, (Lagrange's

interpolation formula より, \tilde{A}_{n+2} は (13) の定義に於て,

従って, $\tilde{A}_{n+2}(t - \xi) = \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu t^{n-\nu}$ と表すことができる。

$$-Y_2 = \sum b_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

である。以上の場合には, 次の形に表すことができる。

$$\begin{aligned} p_{\nu+2}(t)p_{n-\nu}(t) &= \binom{n}{\nu+2} \binom{n}{\nu} \left(t^2 + \frac{2}{n} x_1 t + \left(-2 \frac{\nu n - (\nu+1)}{n(n-1)} x_2 + \frac{\nu(\nu-2)}{n^2} x_2^2 \right) \right) \cdot p_n(t) \\ &\quad + (t \text{ の高々 } n-1 \text{ 次}) \end{aligned}$$

b_ν は, $b_{n-\mu} = \frac{(-X_{-1})^\mu}{\mu!} b_n$ により定まるが, $\nu < \mu$ なる μ に対しては $b_\nu = 0$ となる。しかし実際には Lie 環を構成するに $X_1 = 0$ とおくが, $\nu < \mu$ なる μ に対して b_ν を定まるより (14) を $\mathbb{C}[X]$ において $\text{mod } \mathbb{C}[X] p_{n-1}(t)$ により t の高々 $n-2$ 次式にすることができる。

一方, Y_ν には, (6) と (11) により定まる。

$$N = (\eta_2^2 D_2 + \dots + \eta_n^2 D_n) - \sum_i \eta_i$$

$$= \bar{p}_1 \left(\bar{p}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \dots + \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-1}} - 1 \right) - \left(2\bar{p}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \dots + (n-1) \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-2}} \right)$$

$$\tilde{A}_{n+3}(t) \equiv \left[(4\eta_1 - N) A_{n+2}(\bar{p}) \right]_{\eta_1=t, \bar{p}_\nu=p_\nu(t)} \text{ mod } \mathbb{C}[X, t] p_n(t) + \mathbb{C}[X] p_{n-1}(t),$$

$$\tilde{A}_{n+4}(t) \equiv \frac{1}{2} \left[(20\eta_1^2 - 10\eta_1 N + N^2) A_{n+2}(\bar{p}) \right]_{\eta_1=t, \bar{p}_\nu=p_\nu(t)} //$$

etc.

尚, $(-X_\nu)$ は, $t^{\nu+1} p_{n-1}(t) \text{ mod } //$

$\nu < \mu$ なる μ に対して $b_\nu = 0$ とおく。 (e.g. $\bar{p}_1 = nt$)

特に, $A_{n+2}(\bar{p})$ が \bar{p} の高々 h 次式であるとして,

$$\tilde{A}_{n+3}(t) \equiv \left[\left\{ -(n(h-1) - 4)t + \left(2\bar{p}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \dots + (n-1) \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-2}} \right) \right\} A_{n+2}(\bar{p}) \right]_{\bar{p}_\nu=p_\nu(t)}$$

$$\text{mod } \mathbb{C}[X, t] p_n(t) + \mathbb{C}[X] p_{n-1}(t), \quad X_1 = 0$$

* $b_n = \tilde{A}_{n+2}(-\xi)$. 例として $\xi = a$ の場合,

$$b_n = X_{n-\nu} X_{\nu+2} + \binom{n}{\nu+2} \binom{n}{\nu} \left(-2 \frac{n-(\nu+1)}{n(n-1)} X_2 + \frac{\nu(n-\nu-2)}{n^2} X_1^2 \right) X_n.$$

$\alpha_1 = 0$ とした, A_{n-1} 型 Lie環 (cf. p.) において,
 交換関係 $[X_1, \dot{X}_\nu] = (\nu-1) \dot{X}_{\nu+1} - \frac{2(n-\nu-1)}{n} x_2 \dot{X}_{\nu-1} + \frac{2(n-\nu-1)}{n} x_{\nu+1} X_0$. (15)*

が成り立つ。我々には、これに代わって、 Y_3, \dots を定める。

又、 X_1, X_0 は互換に与えられた故、次式をもちいて Y_ν を定義する。

$$Y_{\nu+1} \equiv \frac{1}{\nu-1} \left\{ [X_1, X_\nu] + \frac{2(n-\nu-1)}{n} x_2 Y_{\nu-1} \right\} \text{ mod } X_1, X_0. \quad (16)$$

$2 \leq \nu \leq n-2$. Y の形に定義すれば、(15) で $X_{n-1} = 0$ である

のことに、 $Y_{n-1} \equiv 0$ とする。

ここで、 $\boxed{X_\nu = \alpha \dot{X}_\nu + Y_\nu}$ ($\nu \geq 2$) とおき、 $(X_0, X_1, \dots, X_{n-2})$ が Lie環をなす必要条件として、 $[X_2, X_3]$ が X_0, X_1, \dots, X_5 により表され得る条件を求めよ。 (α は scalar)

$$\begin{aligned} [X_2, X_3] &= \alpha^2 [\dot{X}_2, \dot{X}_3] + \alpha \left\{ [\dot{X}_2, Y_3] + [Y_2, \dot{X}_3] \right\} + [Y_2, Y_3] \\ &= \alpha \left\{ X_5 + x_2 X_3 - \frac{3(n-4)}{n} x_3 X_2 + \frac{3(n-4)}{n} \alpha x_4 X_1 - \alpha x_5 X_0 \right\} \\ &\quad + \alpha \left\{ [\dot{X}_2, Y_3] + [Y_2, \dot{X}_3] - Y_5 - x_2 Y_3 + \frac{3(n-4)}{n} x_3 Y_2 \right\} + [Y_2, Y_3]. \\ &\equiv \alpha X + \alpha Y + [Y_2, Y_3]. \end{aligned}$$

$\alpha Y + [Y_2, Y_3]$ が表示できないものは存在しない。これは D_2 の基底は

$$X_7, X_2 X_5, X_3 X_4, X_2^2 X_3$$

α -一次結合である。これは、 $X_5, X_5 X_0, X_4 X_1, X_2 X_3 X_0$ 或 $X_2^2 X_1$

を用いて表される。次に D_3 の基底を求めよう。これは、

$$X_2 (3X_3 X_0 - 2X_2 X_1), \quad A X_4 X_1 - 3X_2 X_2, \quad B X_5 X_0 - 2X_2 X_3$$

と同様に $[\dot{X}_2, \dot{X}_\nu]$

$$= (\nu-2) \dot{X}_{\nu+2} + (\nu-2) x_{\nu+2} \dot{X}_\nu - (\nu-2) x_{\nu+2} X_0 - \frac{3(n-\nu-1)}{n} x_3 \dot{X}_{\nu-1} + \frac{3(n-\nu-1)}{n} x_{\nu+1} X_1$$

の一次結合で消去 + 加 12 なる。 \therefore $A = 4\alpha + a_2$

$B = 5\alpha + a_3$, $Y_U = a_U X_{U+2} D_2 + (b_U X_{U+3} + \dots) D_3$ ($2 \leq U \leq 5$) とした。

(Y_U は, X_0, X_1 を用いて, \therefore 加 12 なる $\{2, 3, 4, 5\}$ の Y_6 は, 一般に X_4^2 が D_2 の係数に \therefore 加 12 なる。)

\therefore 3 の作用より, D_i の係数 \therefore 加 12 なる。 \therefore 2 以上 \therefore 加 12 なる。

C1. 係数で 一次式 の \therefore 加 12 なる, \therefore の係数比が X_5 の \therefore 加 12 なる (同 \therefore 加 12 なる)。 ($n-7$ 個の条件式)

以下 D_i の係数を mod (3次) で考慮する。 $\alpha Y + [Y_1, Y_3]$ の D_2 の係数を消去 (\therefore 加 12 なる, \therefore 加 12 なる \therefore 加 12 なる)。

$$(C_{26} X_2 X_6 + C_{35} X_3 X_5 + C_{44} X_4^2 + \dots) D_3 + \dots + (C_{4n} X_4 X_n + C_{5, n-1} X_5 X_{n-1} + \dots) D_{n-1} + (C_{5n} X_5 X_n + \dots) D_n$$

$$A X_4 X_1 - 3 X_3 X_2 = (-3(5\alpha + b_2) X_3 X_5 + 4A X_4^2) D_3 + \dots + n A X_4 X_n D_{n-1} + 0 \cdot D_n$$

$$B X_5 X_0 - 2 X_2 X_3 = (-2(6\alpha + b_3) X_2 X_6 + 3B X_3 X_5) D_3 + \dots + (n-1) B X_5 X_{n-1} D_{n-1} + n B X_5 X_n D_n$$

\therefore 2 \therefore 加 12 なる, \therefore 加 12 なる \therefore 加 12 なる \therefore 加 12 なる。 \therefore 加 12 なる。

C2. $C_{6, n-2} = C_{7, n-3} = \dots = C_{i, j} = 0$ ($i \leq j$) ($n-5$ 個の条件式)

$C_{6, n-1} = C_{7, n-2} = \dots = 0$ (\therefore)

C3. $C_{44} : C_{4n} = 4 : n$ (2 箇 —)

$C_{5, n-1} : C_{5, n} = n-1 : n$

以上の方針により, $m=7.8$ のときに, 新しい Lie 環が
存在するかどうかを調べる。

Micro calculator, Hewlett-Packard Model 65 を用いた
計算により, γ_{4j} の不存在が示される。 γ_{4j} についての
詳細は, 別添付資料にのべておく。