数理解析研究所講究録
第283巻 1976年 1-12

孤立特異点の位相型と解析型

早大理工　山口　博己

複素多様体の構造論において、次の問題は、基本的である。

<u>問題</u>　台空間を固定するとき、そこに入る複素構造は、同値を除いてどの位あるか？

例えば、S^2には、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$の構造しか入らないことが分っている。しかし、一般には、非常に難しい問題である。

そこで、我々は、このような問題を孤立特異点について考えることが、意味のあることであるということを、平面曲線の特異点の例を中心にして、述べようと思う。複素解析空間の台空間のごとき定義は、今のところないので、超曲面のときは、位相型を台空間に、一般の孤立特異点のときは、equisingular を台空間に、選ぶことにする。上の問題は、超曲面のときは、次のようになる。

<u>問題</u>　$\mathbb{C}^n \supset U_i \supset V_i \ni 0$ $(i=1,2)$；原点を孤立特異点とする解析的超曲面で、次の条件を満たすものとする。

i) $(U_1, V_1) \approx (U_2, V_2)$；対の位相同型

ii) $(U_1, V_1) \not\approx (U_2, V_2)$；対の解析同型が存在しない。

以上のような性質をもつ V_2 は、V_1 を固定したとき、どの位あるか？

以下、平面代数的曲線についての例を中心に述べるので、よく使われる定理を上げておく。

<u>定義</u>　$\mathbb{C}^2 \supset U \supset C = \{ f(X,Y) = 0 \}$　f；U上の解析関数、Cは、原点を孤立特異点としてもつと仮定する。

$f(X,Y) = 0$ は、よく知られているように、次のように、ピズュー展開される。

$$Y = \sum_{i=1}^{k_0} a_{0,i} x^i + \sum_{i=0}^{k_1} a_{1,i} x^{(\mu_1+i)/\nu_1} + \cdots + \sum_{i=0}^{+\infty} a_{g,i} x^{(\mu_g+i)/\nu_1 \cdots \nu_g}$$

このとき、$(\mu_1, \nu_1) \cdots\cdots (\mu_g, \nu_g)$ を、ピズュー特性とよぶ。

<u>定理1</u>（K. Brauner）特異点をもつ二つの解析的既約な、平面曲線を C_1, C_2 とするとき、C_1 と C_2 の特異点の位相型が同じための必要十分条件は、ピズュー特性が一致することである。

定理２　既約解析曲線の芽の解析的分類は、$\mathbb{C}\{t\}$ の部分多元環 $\mathcal{R}$（つぎの性質をもつもの。$\mathcal{R} \ni 1$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{m}^n \subset \mathcal{R}$ $\mathfrak{m}$; $\mathbb{C}\{t\}$ の極大イデアル）の同値類の分類に帰着される。

ここで、同値関係 $\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_2$ とは、$\exists\ \theta : \mathbb{C}\{t\} \to \mathbb{C}\{t\}$; $\mathbb{C}$-algebra 自己同型で、$\theta(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$ となるものが存在するということ。

定義　$\mathbb{C}^n \supset U_i \supset V_i$ $(i = 1, 2)$ 解析的超曲面で、原点を孤立特異点としてもつもの。V_1 と V_2 の位相型が同じとし、解析型は、違うとする。このとき、V_1 の位相型は、２つの、解析構造をもつという。

例１　単純点は、解析構造を一つしかもたない。

例２　$\mathbb{C}^2$ 内の Arnol'd の simple singularities は解析構造を一つしかもたない。

(イ)　$y^2 = x^{2k+1}$　$(k \geqq 1)$

(ロ)　$y^3 = x^4$

(ハ)　$y^3 = x^5$

∵　(イ)について

$y^2 = x^{k+1}$ の局所環は、$\mathbb{C}\{t^2, t^{2k+1}\}$ である。これのピズュー特性は、$(2k+1, 2)$ であるから、この位相型をもつものは、

ピズュー展開で、$y=x^{\frac{2k+1}{2}}+a_1x^{\frac{2k+2}{2}}+a_2x^{\frac{2k+3}{2}}+\cdots\cdots$ である。この局所環は、$\mathbb{C}\{t^2, t^{2k+1}+a_1t^{2k+2}+\cdots\}$ である。Milnor の公式から、$2\delta=\mu=(2k+1-1)(2-1)=2k$ 従って、conductor として、$(t^{2k})\mathbb{C}\{t\}$を含む。従って、

$\mathbb{C}\{t^2, t^{2k+1}\}\cong\mathbb{C}\{t^2, t^{2k+1}+a_1t^{2k+2}+\cdots\cdots\}$

(ロ)について

$y^3=x^4$ の局所環は、$\mathbb{C}\{t^3, t^4\}$ である。これのピズュー特性は、(4, 3) であるから、この位相型を持つものは、ピズュー展開で、$y=x^{\frac{4}{3}}+a_1x^{\frac{5}{3}}+\cdots\cdots$ である。この局所環は、$\mathbb{C}\{t^3, t^4+a_1t^5+\cdots\}$である。上と同様に $2\delta=6$、従って、conductor $(t^6)\mathbb{C}\{t\}$ を含む。よって、$y=x^{\frac{4}{3}}+a_1x^{\frac{5}{3}}$ についてみれば十分である。

ここで、$\mathbb{C}\{t^3, t^4+a_1t^5\}\cong\mathbb{C}\{t^3, t^4\}$

$\because$ $\theta:\mathbb{C}\{t\}\longrightarrow\mathbb{C}\{z\}$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ t & \longmapsto & z+\frac{a_1}{3}z^2+\frac{a_1^2}{3}z^3 \end{array}$$

$\theta(t^3)=z^3+a_1(z^4+\frac{4}{3}a_1z^5)$ $\theta(t^4)=z^4+\frac{4}{3}a_1z^5+$

(ハ)についても、(ロ)と同様にできる。

例3　$y^3=x^7$ の解析構造は、2つしかない。これは田中氏が、[3] で述べていることである。

∵ $y^3=x^7$ のピズュー特性は、$(7,3)$ であり、$2\delta=12$

従って、Puiseux expansion $y=x^{\frac{7}{3}}+a_8x^{\frac{8}{3}}+\cdots+a_{11}x^{\frac{11}{3}}$ について、考えれば、充分である。

(1) $a_8=0$ のとき、即ち、$y=x^{\frac{7}{3}}+a_9x^{\frac{9}{3}}+a_{10}x^{\frac{10}{3}}+a_{11}x^{\frac{11}{3}}$ についてみる。この局所環は、$\mathbb{C}\{t^3, t^7+a_9t^9+\cdots+a_{11}t^{11}\}$ であり、明らかに、$\mathbb{C}\{t^3, t^7+a_{10}t^{10}+a_{11}t^{11}\}$ に同型である。

$\mathbb{C}\{t^3, t^7+a_{10}t^{10}+a_{11}t^{11}\}\simeq\mathbb{C}\{t^3, t^7+t^{10}+at^{11}\}$

∵ $t=sx$ とおいて、$s^7=a_{10}s^{10}$ をといて、$s=\sqrt[3]{\frac{1}{a_{10}}}$ とおけばよい。」

次に、$\mathbb{C}\{t^3, t^7+t^{10}+at^{11}\}\simeq\mathbb{C}\{t^3, t^7+t^{11}\}$

∵ $t^7+t^{10}+at^{11}=t^7(1+t^3)+at^{11}$ $1+t^3$ は、単元だから $\mathbb{C}\{t^3, t^7+t^{10}+at^{11}\}\simeq\mathbb{C}\{t^3, t^7+\frac{at^{11}}{1+t^3}\}$ これは、conductor (t^{12}) を含むから、$\mathbb{C}\{t^3, t^7+\frac{at^{11}}{1+t^3}\}\simeq\mathbb{C}\{t^3, t^7+at^{11}\}$ 上と同様に、これは、$\mathbb{C}\{t^3, t^7+t^{11}\}$ に同型である。

最後に、$\mathbb{C}\{t^3, t^7\}\simeq\mathbb{C}\{t^3, t^7+t^{11}\}$ を示す。

∵ $\theta:$
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}\{t\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{z\}\\ \Psi & & \Psi\\ t & \longmapsto & 7z+7z^5\end{array}$$

$\theta(t^3)=7^3z^3+3\times7^3(z^7+z^{11})$ $\theta(t^7)=7^7(z^7+z^{11})$

$\therefore z^7+z^{11}=\theta(\frac{1}{7^7}t^7)$ $z^3=\theta(\frac{1}{7^3}t^3-\frac{3}{7^7}t^7)$ 」

以上より、$a_8=0$ のとき、解析構造は、$y^3=x^7$ である。

(ロ)　$a_8 \neq 0$ のとき、$y = x^{\frac{7}{3}} + a_8 x^{\frac{8}{3}} + a_{10} x^{\frac{10}{3}} + a_{11} x^{\frac{11}{3}}$ について考えれば、充分である。この局所環は、$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + \cdots\}$ であり、$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{11} t^{11}\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 + at^{11}\}$

(∵)　$t^7 + a_8 t^8 + a_{10} t^{10} + a_{11} t^{11} = t^7(1 + a_{10} t^3) + t^8(a_8 + a_{11} t^3)$

$1 + a_{10} t^3$ は、単元より、$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + \cdots + a_{11} t^{11}\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 \cdot \frac{a_8 + a_{11} t^3}{1 + a_{10} t^3}\}$

そして、conductor (t^{12}) を含むから、

$$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 + t^8 \cdot \frac{a_8 + a_{11} t^3}{1 + a_{10} t^3}\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 + at^{11}\} \lrcorner$$

次に、$\mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8\} \cong \mathbb{C}\{t^3, t^7 + t^8 + at^{11}\}$ を示す。

(∵)　$\theta : \mathbb{C}\{t\} \longrightarrow \mathbb{C}\{z\}$

$$t \longmapsto z + \frac{a}{7} z^5 + \frac{a}{7} z^6 + \frac{6a^2}{49} z^9$$

$$\theta(t^3) = z^3 + \frac{3}{7} a (z^7 + z^8 + az^{11})$$

$$\theta(t^7 + t^8) = z^7 + z^8 + az^{11}$$

$\therefore \theta\left(t^3 - \frac{7}{3a}(t^7 + t^8)\right) = z^3,\ \theta(t^7 + t^8) = z^7 + z^8 + az^{11} \lrcorner$

以上より、$a_8 \neq 0$ のとき、解析構造は $y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}}$ に帰着された。

(ハ)　$y = x^{\frac{7}{3}}$ と $y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}}$ は、解析的同型でない。

(∵)　$\pi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$　$\pi_2 ; \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ をそれぞれ $y = x^{\frac{7}{3}}$，$y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}}$ の normalization とする。$\pi_1(t) = (t^3, t^7)$ $\pi_2(t) = (t^3, t^7 + t^8)$，$V_1$，$V_2$ を $y = x^{\frac{7}{3}}$，$y = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{8}{3}}$ で表される平面曲線の原点での芽とする。$\Omega : V_1 \longrightarrow V_2$；解析同型が存在すると仮定する。このとき、$\pi_2^{-1} \circ \Omega \circ \pi_1 ; \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

これは、原点を除いて、双正則、全体で、位相同型写像であるから、リーマンの特異点除去定理によって全体で双正則である。従って、$\pi_2^{-1}\circ\Omega\circ\pi_1(t)=a_1t+a_2t^2+\cdots\ (a_1\neq 0)$ とかける。

㊟ $(\pi_2^{-1}\circ\Omega\circ\pi_1)^*(\pi_2^*(\mathcal{O}_{V_2}))=\pi_1^*(\Omega^*(\mathcal{O}_{V_2}))\subset\pi_1^*(\mathcal{O}_{V_1})$、

$\pi_2^*(\mathcal{O}_{V_2})=\mathbb{C}\{s^3, s^7+s^8\}$, $\pi_1^*(\mathcal{O}_{V_1})=\mathbb{C}\{t^3, t^7\}$ であり、㊟より

$$(a_1t+a_2t^2+\cdots\cdots)^3=a_1^3t^3+3a_1^2a_2t^4+\cdots\cdots$$

$$(a_1t+\cdots)^7+(a_1t+\cdots)^8=a_1^7t^7+(7a_1^6a_2+a_1^8)t^8+\cdots$$

これらは、㊟より $\pi_1^*(\mathcal{O}_{V_1})$ に属さなければならないので、

$3a_1^2a_2=0 \quad 7a_1^6a_2+a_1^8=0$ これは、$a_1=0$ を満たすので矛盾する。∎

(注意) $y=x^{\frac{7}{3}}+x^{\frac{8}{3}}$ は、多項式の形で書くと、

$y^3-3x^5y-x^7-x^8=0$ で、Quasi-homogenousでない。

㊟ $0\to\mathbb{C}\to\mathcal{O}_{V_2,0}\to\Omega^1(V_2)_0\to 0$ がexactでないことを示せば充分である。$y\,dx$ という微分形式を考える。

$\pi_2^*(y\,dx)=d\left(3\left\{\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^{11}}{11}\right\}\right)$ となる。ここで、

$\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^{11}}{11}=\pi_2^*\varphi(x,y)$ となる $\varphi(x,y)\in\mathbb{C}\{x,y\}$ は存在しないから、上は、exactではない。∎

<u>例4</u> $y^3=x^8$ の解析構造は、有限個しかない。

◎ $\mathbb{C}\{x^3, x^8+ax^{10}+bx^{11}+cx^{13}\}\simeq\mathbb{C}\{x^3, x^8+x^{10}+ax^{13}\}$

◎ $\mathbb{C}\{x^3, x^8+x^{10}\}\simeq\mathbb{C}\{x^3+x^{10}+ax^{13}\}$

∵ $\theta : \mathbb{C}\{t\} \longrightarrow \mathbb{C}\{z\}$

$$t \longmapsto z + \frac{a}{21}z^6 + \frac{a}{21}z^8 + \frac{23}{441}a^2 z^{11}$$

∴ $\mathbb{C}\{x^3, x^8 + ax^{11} + bx^{13}\} \cong \mathbb{C}\{x^3, x^8 + x^{13}\}$

以上から有限個であることは、分る。

今まで、考えられた問題は一般には、難かしいので、複素多様体論では、次の問題が考えられた。

<u>問題</u> 複素多様体Mが与えられたとき、Mの十分近い全ての変形を求めよ。

この問題は、最初の問題にくらべてよく分るようである。そこで、次の問題が重要である。

<u>問題</u> 解析空間の孤立特異点が与えられたとき、全ての、equisingular deformationを求めよ。

この問題を考えれば、次の特異点は、重要であろう。

<u>Definition</u> (X_0, x_0); x_0を孤立特異点とする解析空間の芽

$\pi : (X, x_0) \underset{\Sigma}{\rightleftarrows} (S, s_0)$; (X_0, x_0)の equisingular deformation

Σ: section で、$\pi^{-1}(s) = X_s$とおくと、X_sは、$\Sigma(s)$を孤立

特異点としてもつ。このとき、$X_{s,\Sigma(s)}$ の解析構造が s_0 の近傍に、有限個しかないとき、x_0 を X_0 の stiff singularity という。特に、s_0 の十分小なる近傍で、$X_{s,\Sigma(s)} \approx X_{s_0,\Sigma(s_0)}$（解析同型）のとき、strictly stiff singularity という。

◎ equisingular については、[4] と Zariski の一連の論文を参照せよ。

我々は、超曲面のみを考えるので、次の定義を使う。

定義 (X_0, x_0)；x_0 を孤立特異点としてもつ、$\mathbb{C}^n$ 内の超曲面、$\pi : (X, x_0) \underset{\Sigma}{\rightleftarrows} (S, s_0)$；$(X_0, x_0)$ の変形で、$\pi^{-1}(s) = X_s$ は $\Sigma(s)$ を孤立特異点としてもつ。$(X_s, \Sigma(s))$ と $(X_{s_0}, \Sigma(s_0))$ は、位相型が同じ仮定する。（$\mathbb{C}^n$ と $\forall s_0$ の対に対して、位相同型があるということ。）このとき、s_0 の近傍で、$X_{s,\Sigma(s)}$ の解析構造が有限個しかないとき、x_0 を stiff singularity とよぶ。特に、s_0 の近傍に、唯一つ、$X_{s_0,\Sigma(s_0)}$ の解析構造しかないとき、strictly stiff singularity という。

例5 simple point は、strictly stiff singularity である。

例6　Arnol'd の simple singularities は、strictly stiff singularities である。

例7　$y^3 = x^7$ は、strictly stiff でないが、stiff である。

例8　$y^3 - 3x^5y - x^7 - x^8 = 0$ は、strictly stiff sing. である。

例9　rigid singularities は、strictly stiff singularities である。

以上から分るように、stiff singularities は、rigid, simple singularities の拡張になっている。

複素多様体では、基本群が複雑ならば、複素構造は、あまり多くは、入らないという推測がありますが、我々の立場では、どうなるか？　Mumford の I. H. E. S. 1960 の論文の結果から推測すると、以下のようになる。

問題 特異点の局所基本群が、簡単ならば、解析構造は、あまり多くは入らないか？

いくつか思いついた問題を書いてみよう。

問題 Stiff singularity の moduli 数は、0として、一つのパラメーターが動くとき、解析構造が、変るような、パラメーターを一つの moduli と考えるとき、複素多様体論におけるような、$\dim H^1(X, \Theta)$ に対応するものは何か？

問題 Versal equisingular deformation の存在定理を証明せよ。

参考文献

[1] Arnol'd V.I.; Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangean singularities, Func. Anal. and its App. Vol. 6

[2] Gunning. R.C. Lecture on complex analytic varieties Mathematical Lecture Note. Princeton No. 14.

[3] Hironaka. H. ; On the equivalence of singularities I,
Arithmetrical Algebraic Geometry

[4] Hironaka. H. ; Equivalence and deformations of isolated singularities
Wood Hool Seminar in Algebraic Geometry

[5] 飯高茂 ;複素多様体論の一断面
数理科学 特集"形態"

[6] Pham. F ; Singularites des coubres planes