数理解析研究所講究録
第 283 巻 1976 年 43-51

Configuration について

東大 教養　中村得之

0. F を体とし，$\mathcal{M}=\{M_i \mid i\in I\}$ を F^n の超平面の集まりとする．$M=\cup\{M_i \mid i\in I\}$ とかくとき，$K^n\setminus M$ の位相は色々な問題に関連してしらべられているが，特に $K=\mathbb{C}$ の場合は重要であり Serre, Brieskorn, Saito, Deligne, Hattori 等により多くの結果が得られている．こゝではそれらのうちのいくらかを一般化することを試る．

1. F を実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$，四元数体 $\mathbb{H}$ のいずれかとする．I を有限集合とし，$\mathcal{V}=\{V_i \mid i\in I\}$ を F^n における原点を通る affine 部分空間の集まりとする．いま I の部分集合を単体として定義される単体的複体を $\Delta(I)$ で表わそう．このとき，任意の単体 $\rho\in\Delta(I)$ に対して，その幾何学的実現を $|\rho|$ で，部分複体 $K\subset\Delta(I)$ の幾何学的実現を $|K|$ で表わすことにする．単体 $\rho\in\Delta(I)$ が与えられたとき，$V_\rho\subset F^n$ を $V_\rho=\cap\{V_i \mid i\in\rho\}$ で定義し，$\kappa(\rho)=\dim_F V_\rho$ とおくことにする．

さて V_i^*, SV_i, PV_i をそれぞれ $V_i^* = V_i \setminus \{0\}$, $SV_i = \{x \in V_i^* \mid |x| = 1\}$, $PV_i = V_i^*/F^\times$ で定義し, V^*, SV, PV でそれぞれ自然な合併 $V^* = \cup\{V_i^* \mid i \in I\}$, $SV = \cup\{SV_i \mid i \in I\}$, $PV = \cup\{PV_i \mid i \in I\}$ を表わすことにする. 次に空間 $E(\mathcal{V}^*)$, $E(S\mathcal{V})$, $E(P\mathcal{V})$ をそれぞれ

$$E(\mathcal{V}^*) = \cup\{|\rho| \times (F^{\kappa(\rho)})^* \mid \rho \in \Delta(I)\} \subset |\Delta(I)| \times (F^n)^*$$
$$E(S\mathcal{V}) = \cup\{|\rho| \times SF^{\kappa(\rho)} \mid \rho \in \Delta(I)\} \subset |\Delta(I)| \times SF^n$$
$$E(P\mathcal{V}) = \cup\{|\rho| \times PF^{\kappa(\rho)} \mid \rho \in \Delta(I)\} \subset |\Delta(I)| \times PF^n$$

で定義しよう このとき次のことがいえる

定理 1　$V^* \simeq E(\mathcal{V}^*)$, $SV \simeq E(S\mathcal{V})$, $PV \simeq E(P\mathcal{V})$.

証明　$\rho' < \rho$ をみたす $\Delta(I)$ の任意の単体に対して, $\kappa(\rho') - \kappa(\rho) \geqq \dim\rho - \dim\rho'$ が成り立つとき $\mathcal{V}$ は退化しないとよぶことにする. 簡単のため $\mathcal{V}$ が退化しない場合の証明のあらすじを示すことにする. $\pi : E(\mathcal{V}^*) \to |\Delta(I)|$ を自然な射影とする. $\rho \in \Delta(I)$ に対し, $\hat{\rho}$ で $|\rho|$ の重心を表わす. いま各 ρ に対し, F 上の線型な写像 $f_{\hat\rho} : \hat{\rho} \times F^{\kappa(\rho)} \longrightarrow V_\rho$ を任意に一つ定める. 次に $\Delta(I)$ の重心細分 $\Delta'(I)$ の一つの単体 $\sigma = \{\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_1, \cdots, \hat{\rho}_p\}$ $(\rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_p)$ をとるとき F 上線型な写像 $f_\sigma : |\sigma| \times F^{\kappa(\rho_p)} \longrightarrow V_{\rho_0}$ を次のように定義する. $\dim\sigma = 0$ のときには, $\sigma = \hat{\rho}$ とかけるから $f_\sigma = f_{\hat{\rho}}$ で定義する. $\dim\sigma = p > 0$ とし p より小さい

次えの単体に対しては写像が定義されているものとする．このとき　$f_{\partial\sigma}: \partial|\sigma| \times F^{\kappa(\rho_p)} \longrightarrow V_{\kappa(\rho_0)}$ が自然に定まる．

一方 $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に応じて，$U_\kappa = O(\kappa), U(\kappa), Sp(\kappa)$ とするとき，$\pi_{p-1}(V_{\kappa(\rho_0),\kappa(\rho_p)}) = \pi_{p-1}(U_{\kappa(\rho_0)}/U_{\kappa(\rho_0)-\kappa(\rho_p)})$ は $\kappa(\rho_0)-\kappa(\rho_p) \geqq \dim \rho_p - \dim \rho_0 \geqq p$ となることから常に 0 となる．したがって $f_{\partial\sigma}$ は $f_\sigma: |\sigma| \times F^{\kappa(\rho_p)} \longrightarrow V_{\kappa(\rho_0)}$ に拡張される．これから求める写像 $f: E(\mathcal{U}^*) \longrightarrow V^*$ の存在がいえることは容易にわかる．f が U_1 の作用と可換であることも明らかである．

次に f がホモトピー同値を与えることを示すために，いくらかの準備をしよう．

まず，$\rho \in \Delta(I)$ に対して，$\lambda(\rho) \in \Delta(I)$ を $\lambda(\rho) = I \setminus \rho$ で定め，$\mathcal{U}\circ\rho$，$\mathcal{U}*\rho$ をそれぞれ $\mathcal{U}\circ\rho = \{V_i \mid i \in \rho\}$，$\mathcal{U}*\rho = \{V_i \cap V_\rho \mid i \in \lambda(\rho)\}$ で定義する．こゝで，$\rho \in \Delta(I)$ に対して $\Delta(\rho)$ を ρ の単体的閉包，$\iota_\rho: \Delta'(\rho) \longrightarrow \Delta'(I)$ を $\iota_\rho(\hat{\rho}') = \hat{\rho}'$ $(\rho' \subset \rho)$ でひきおこされる自然な移入とし，$\hat{*}_\rho: \Delta'(\lambda(\rho)) \longrightarrow \Delta'(I)$ を $\hat{*}_\rho(\hat{\rho}') = \widehat{\rho' * \rho}$ $(\rho' \subset \lambda(\rho))$ で定義される写像とする．このとき ι_ρ，$\hat{*}_\rho$ はそれぞれ同型 $E(\mathcal{U}\circ\rho) \cong E(\mathcal{U})\big| |\iota_\rho \Delta'(\rho)|$，$E(\mathcal{U}*\rho) \cong E(\mathcal{U})\big| |\hat{*}_\rho \Delta'(\lambda(\rho))|$ をひきおこすことは容易にたしかめられる．こゝで $K \subset \Delta'(I)$ に対し，$\pi: E(\mathcal{U}) \longrightarrow |\Delta'(I)|$ による $|K|$ の逆像を $E(\mathcal{U})\big||K|$

で表わすものとする

ところで，$\Delta'(I)$ における $\Delta'(\rho)$, $\Delta'(\lambda(\rho))$ の正則近傍をそれぞれ N_0, N_1 で表わすとき；$N_0 \cup N_1 = \Delta'(I)$,
$N_0 \cap N_1 = \hat{*}_\rho \Delta'(\lambda(\rho))$, $N_0 \searrow \iota_\rho \Delta'(\rho)$, $N_1 \searrow \iota_{\lambda(\rho)} \Delta'(\lambda(\rho))$ となることはよく知られている．これから $E(\mathcal{V})\,\|N_0| \cup E(\mathcal{V})\,\|N_1| = E(\mathcal{V})$, $E(\mathcal{V})\,\|N_0| \cap E(\mathcal{V})\,\|N_1| = E(\mathcal{V})\,\||\hat{*}_\rho \Delta(\lambda(\rho))|$, $E(\mathcal{V})\,\|N_0| \searrow E(\mathcal{V})\,\||\iota'_\rho \Delta(\rho)|$, $E(\mathcal{V})\,\|N_1| \searrow E(\mathcal{V})\,\||\iota_{\lambda(\rho)} \Delta'(\lambda(\rho))|$ が得られる．
一方，$V^{*}_{\circ}\rho \cup V^{*}_{\circ}\lambda(\rho) = V^*$, $V^{*}_{\circ}\rho \cap V^{*}_{\circ}\lambda(\rho) = V^{*}_{*}\rho$ は明らかであるから，次のホモトピー可換な図式が得られる

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & E(\mathcal{V})\,\|N_1| \arrow[dr] \arrow[dd, "f\circ\lambda(\rho)" near start] & \\
E(\mathcal{V})\,\|N_0 \cap N_1| \arrow[urr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f*\rho"'] & & & E(\mathcal{V}) \arrow[dd, "f"] \\
 & E(\mathcal{V})\,\|N_0| \arrow[urr] \arrow[dd, "f\circ\rho"] & V^{*}_{\circ}\lambda(\rho) \arrow[dr] & \\
V^{*}_{*}\rho \arrow[urr] \arrow[dr] & & & V^* \\
 & V^{*}_{\circ}\rho \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

この図式を用いて，$f: E(\mathcal{V}) \longrightarrow V^*$ がホモトピー同値であることを示そう．$\dim \Delta(I) = 0$ のときには $f_\sigma = f_{\hat{\rho}}$ の定義から自明である．$\dim \Delta(I) > 0$ とし，これ以下の次元で写像はホモトピー同値を与えているものとする．このとき $\rho = \{i\}$ $(i \in I)$, $\lambda(\rho) = I \setminus \{i\}$ とすれば，$f\circ\rho$, $f\circ\lambda(\rho)$, $f*\rho$ は帰納法の假定からホモトピー同値がいえ，したがって van Kampen の定理，Mayer-Vietoris の定理により

f がホモトピー同値であることが示される．　　　　証明終

この定理により $PF^n \setminus PV$ のホモロジーが多くの場合容易に計算される。それを用いて例えば次のことが示される．

系　任意の $p \in \Delta(I)$ に対して $\dim_F V_p = n - \dim p - 1$ となるとき，$\mathcal{V}$ は一般的であるとよぶ．$\mathcal{V}$ が一般的であり，かつ $F = \mathbb{C}$ ならば $n \geqq 3$ の条件の下に次のことが成り立つ．

$$PF^n \setminus PV \simeq (\overset{m}{\times} S^{d-1})^{(d-1)n}$$

ただし $m = \# I - 1$，$d = \dim_{\mathbb{R}} F$ とし，$(\overset{m}{\times} S^{d-1})^p$ は $\overset{m}{\times} S^{d-1}$ の最も経済的な胞体分割の p 骨格を表わす

$F = \mathbb{R}$ の場合は上の事実を示すことは容易である．$F = \mathbb{C}$ の場合はこの結果は服部晶夫氏によって得られたものである．

2.　$\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in I\}$ を $\mathbb{R}^n$ の超平面の集まりで次の条件 (C_0)，(C_1) のいずれかをみたすものとする．

(C_0)　I は有限集合で，M_i はすべて原点を通る．

(C_1)　$\mathcal{M}$ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな凸多面体による $\mathbb{R}^n$ の胞体分割を与える．

いま，各 $i \in I$ に対し $\mathbb{R}^n$ 上の一次式 l_i で $l_i^{-1}(0) = M_i$ となるものを定めておく．$\mathbb{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$ と考え，$e \in \mathbb{Z}_3$ に対し $M_i^e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{sgn} l_i(x) = e\}$ と定める．このとき，$\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ に対し，$C_0(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{sgn} l_i(x) = \varepsilon(i),\ i \in I\}$

とおく．$C_0(\varepsilon)=\cap\{M_i^{\varepsilon(i)} \mid i\in I\}$ となる．ここで，(C_0) の場合には，$C(\varepsilon)=C_0(\varepsilon)\cap D^n$ （$D^n=\{x\in \mathbb{R}^n \mid |x|\leq 1\}$），$(C_1)$ の場合には $C(\varepsilon)=C_0(\varepsilon)$ とおき，凸胞複体 $P(\mathcal{M})$ を $P(\mathcal{M})=\{C(\varepsilon)\mid \varepsilon: I\to \mathbb{Z}_3\}$ で定義する．明らかに $P(\mathcal{M})$ は PL多様体の凸胞体分割を与えるから，$C(\varepsilon)$ の双対胞体 $D(\varepsilon)$ を $D(\varepsilon)=\cup\{|\hat{C}_0,\hat{C}_1,\cdots,\hat{C}_p| \mid C(\varepsilon)=C_0<C_1<\cdots<C_p\}$ で定義して差支えない．ここで $\hat{C}_i$ は C_i の重心を表わすものとする．これを用いて，CW 複体 $R(\mathcal{M})$ を次のように定義しよう．

$$R(\mathcal{M})=\cup\{D(\varepsilon)\times D(\theta) \mid \varepsilon,\theta: I\to\mathbb{Z}_3,\ D(\theta)<D(\varepsilon),\ \dim D(\theta)=0\}/(\sim)$$

ここで $\cup$ は互に素な和集合を表わし，$\sim$ は次の関係で生成される同値関係を表わすものとする．$(x,y)\in D(\varepsilon)\times D(\theta)$，$(x',y')\in D(\varepsilon')\times D(\theta')$ は $D(\varepsilon')<D(\varepsilon)$ かつ $\theta'(i)=\theta(i)$ $(i\in\varepsilon^{-1}(0))$ が成り立つとき $(\iota_{\varepsilon'}^{\varepsilon}(x'),y)\sim(x',y')$ とする．ここで $\iota_{\varepsilon'}^{\varepsilon}: D(\varepsilon')\subset D(\varepsilon)$ は自然な移入，かつ $y\in D(\theta)$，$y'\in D(\theta')$ とする．以下 $D(\varepsilon)\times D(\theta)$ の $R(\mathcal{M})$ への像を $\chi(D(\varepsilon)\times D(\theta))$ とかく．

いま $\mathbb{R}^n$ の超平面 M の複素化を $M^{\mathbb{C}}$ で表わし，上記の $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}=\{M_i^{\mathbb{C}}\mid i\in I\}$ で定義する．また $M^{\mathbb{C}}=\cup\{M_i^{\mathbb{C}}\mid i\in I\}$ と表わすとき，次のことが成り立つ．

定理2　$\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}} \simeq R(\mathcal{M})$

証明 $\mathbb{C}^n$ の実部全体を $\mathcal{R}\mathbb{C}^n$, 虚部全体を $\mathcal{I}\mathbb{C}^n$ と書き, それぞれを $\mathbb{R}^n$ と同一視する. このとき, Deligne の手法を拡張して, 一般の $\mathcal{M}$ に対して $\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}}$ の次のような開被覆を考えることにする. $\varepsilon: I \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ に対し $O(\varepsilon) \subset \mathcal{R}\mathbb{C}^n$ を $\hat{C}(\varepsilon)$ の $'P(\mathcal{M})$ における開星状体 $\mathring{St}(\hat{C}(\varepsilon), 'P(\mathcal{M}))$ とする. ただし, $'P(\mathcal{M})$ は $P(\mathcal{M})$ の重心細分とする. また $\delta: I \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ に対し $Y(\delta) \subset \mathcal{I}\mathbb{C}^n$ を $Y(\delta) = \cap \{ M_i^{\delta(i)} \mid \delta(i) \neq 0 \}$ とする. ここで $\mathbb{C}^n \approx \mathcal{R}\mathbb{C}^n \times \mathcal{I}\mathbb{C}^n$ の開被覆 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{M})$ を次のようにして定義する.

$$\mathcal{U} = \{ O(\varepsilon) \times Y(\delta) \mid \varepsilon, \delta: I \to \mathbb{Z}_3,\ \varepsilon^{-1}(0) \cup \delta^{-1}(0) = I,\ \varepsilon^{-1}(0) \cap \delta^{-1}(0) = \phi \}$$

$U(\varepsilon, \delta) = O(\varepsilon) \times Y(\delta)$ とおく. $U(\varepsilon_0, \delta_0) \cap U(\varepsilon_1, \delta_1) \cap \cdots \cap U(\varepsilon_p, \delta_p) \neq \phi$ となるための必要十分条件は, 適当な置換 ω をとると $C(\varepsilon_{\omega(0)}) > C(\varepsilon_{\omega(1)}) > \cdots > C(\varepsilon_{\omega(p)})$ および $Y(\delta_{\omega(0)}) \supset Y(\delta_{\omega(1)}) \supset \cdots \supset Y(\delta_{\omega(p)})$ が同時に成り立つことである. これは $\theta = \theta(\varepsilon, \delta)$ を $\theta = \varepsilon + \delta$ で定義するとき, $\chi(D(\varepsilon_{\omega(0)}) \times D(\theta_{\omega(0)})) < \chi(D(\varepsilon_{\omega(1)}) \times D(\theta_{\omega(1)})) < \cdots < \chi(D(\varepsilon_{\omega(p)}) \times D(\theta_{\omega(p)}))$ が成り立つことと同値である. したがって, $\mathcal{U}$ の脈複体 $K(\mathcal{U})$ を $K(\mathcal{M})$ とかくことにすれば $K(\mathcal{M}) \cong {}'R(\mathcal{M})$ となる. ここで $'R(\mathcal{M})$ は $R(\mathcal{M})$ の重心細分である.

一方 $\mathcal{U}$ は可縮な開集合による $\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}}$ の被覆

であることから，$K(\mathcal{U})$ は $\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}}$ とホモトピー同型である　　　証明終

この応用として，例えば次のことが証明される．各 $i \in I$ に対し M_i に関する $\mathbb{R}^n$ の反転を s_i で表わし，$S = \{s_i | i \in I\}$ とする．S で生成される $\mathbb{R}^n$ の運動群の部分群を W で表わそう．W が $P(\mathcal{M})$ の n 次元胞体の集合の上に忠実かつ推移的に作用するとき，$\mathcal{M}$ を Weyl 群 W の Weyl 壁の集まりとよぶ。

定理3　$\mathcal{M}$ が Weyl 壁の集まり，W をその Weyl 群とする．このとき

$$(\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}})/W \simeq R(\mathcal{M})/W$$

証明　定理2のホモトピー同値が W の作用と可換であることを用いればよい

さて $\mathcal{M}$ が Weyl 壁の集まりであるとしよう．$P(\mathcal{M})$ の胞体 $C(\theta)$ で $\dim C(\theta) = n$ となるものを任意に一つ定める．$C(\varepsilon_i)$ を $C(\varepsilon_i) < C(\theta)$ かつ $\dim C(\varepsilon_i) = n-1$ となる胞体とし，これに $C(\theta)$ からひきおこされた向きをつける．また $C(\delta_{ij}) = C(\varepsilon_i) \cap C(\varepsilon_j)$ とし $m_{ij} = \# \delta_{ij}^{-1}(0)$，すなわち $C(\delta_{ij})$ を通る $\mathcal{M}$ に属する超平面の数を m_{ij} とする．いま $D(\varepsilon_i)$ に $C(\varepsilon_i)$ に双対的な向きをつけ，$x_i = \chi(D(\varepsilon_i) \times D(\theta))$ とする．これは $R(\mathcal{M})/W$ の閉曲線を与

えることは明らかであろう．さらに x_i, x_j に関する語 r_{ij} を

$$r_{ij} = (x_i, x_j ; m_{ij}) \cdot (x_j, x_i ; m_{ij})^{-1}$$

で定義する．

$$(x, x' ; m) = \begin{cases} \overbrace{xx' \cdots xx'}^{2m\text{個}} & m \equiv 0 \mod 2 \\ \overbrace{xx' \cdots xx'}^{2m\text{個}}x & m \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

とする．

定理4

$$\pi_1((\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}})/W) \cong F(x_i)/N(r_{ij})$$

こゝで $F(x_i)$ は x_i で生成される自由群，$N(r_{ij})$ はその中で r_{ij} によつて生成される最小の正規部分群とする

これは $\pi_1((\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}})/W)$ が W に対応する一般組み紐群となることを示している．このことは M が (C_0) をみたすとき，すなわち W が普通の Weyl 群のときには Brieskorn によつて知られている．

この外，(C_0) の場合における Deligne の条件の (C_1) の場合への類似の下に $\mathbb{C}^n \setminus M^{\mathbb{C}}$ が $K(\pi, 1)$ になることが示されるが，こゝでは省略する