数理解析研究所講究録
第 283 巻 1976 年 52-57

2次元K(π, 1)について

東大 理　大川哲介

2次元K(π, 1)に関する未解決問題の一つに，Whiteheadの問題[4]：

<u>Problem</u>　2次元K(π, 1) complexのsubcomplexはやはりK(π′, 1)であるか？

（注．complexはCW complexの意味にとる）

がある．2次元complex Kに対し，これがK(π, 1)となるための必要十分条件は，$\pi_2(K)=0$なることであるから，易しそうに見えるが，簡単にはいかない．難しさの原因として，

i) $\pi_i(K)$ $(i=1, 2)$は（直観的な意味で）計算不能である．

ii) $\pi_i(K)$ $(i=1, 2)$の良いfiltrationが知られていない．

iii) Kが有限であっても，$\pi_2(K)$は$\pi_1(K)$上のmoduleとして，一般に有限生成でない（Stallings [3]）．

等がある．御利益の一例として

- $K=S^{n+2}-S^n\vee S^n\vee\cdots\cdots\vee S^n$ とするとき，

Kが2次元complexにホモトピー同値ならば，（特に $K=S^3-S^1$ (knotted) ならば），$K=K(\pi,1)$ である．が直接の系として出る．部分的解決についてはAdams [3]，還元定理については，Papakyriakopoulos [2] を見よ．

ここではWhiteheadの問題の対偶命題の部分的解決となっている次の定理の略証を与えることを目的とする．

定理. Kをclosed 3-mfd. Mの2-skeletonとし，Kはまた，2次元 $K(\pi,1)$ complex Lのsubcomplexにもなっているとする．このとき $H_*(M)\cong H_*(S^3)$.

（但し，2-skeletonの意味として，Mを0-cell及び3-cellが1個宛になるようにPLCW分割したときの2-skeletonの意味にとる．）

この定理の意味として，例えばMをlens spaceに取ると，$K\subset L$，$\pi_2(L)=0$，$\dim L\leq 2$ の仮定のもとに，$\pi_1(K)$ は見かけのtorsionを含まぬことが分る．

Key lemma. Mをclosed 3-mfd; KをMの勝手なPLCW割分（tameなCW分割の意）の2-skeleton，LはKを含む2-dim CW complex，$i: K\hookrightarrow L$ はinclusionとする．このとき $i_*: \pi_2(K)\to\pi_2(L)$ がzero map.ならば $i_*: \pi_1(K)\to\pi_1(L)$ もzero map.となる．

証明.

① Hurewicz 写像 $\Xi: \pi_2(K) \to H_2(K)$ は，零写像として良い．右図に於いて $f = i_*$ は零写像で，$g = i_*$ は単射だから．

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(K) & \xrightarrow{f} & \pi_2(L) \\ \Xi \downarrow & & \Xi \downarrow \\ H_2(K) & \xrightarrow{g} & H_2(L) \end{array}$$

② K は M を 0-cell，3-cell が 1 個宛になる様な PL CW 分割の 2-skeleton として良い．3-cell が 2 個以上あるとその attaching map. の Hurewicz image が $\neq 0$ となり，① に反する．0-cell が 2 個以上あれば，1-cell をつぶして行けば良い．以下この意味の K を $K = (M)^2$ と記す．

③ $(M_1 \# M_2)^2 = (M_1)^2 \vee (M_2)^2$

但し M_i $(i=1, 2)$ は closed 3-mfd's，# は connected sum

④ M : prime として良い（∵③），$M \neq S^1 \times S^2$ として良い（∵ $(S^1 \times S^2)^2 = S^1 \vee S^2$, and ①）

⑤ $K \ni *$ に於ける（local な意味での）link は連結として良い．（∵ Kneser conjecture，①）但し $* = K$ の 0-cell

⑥ K の M に於ける正則近傍を N，$f: N \to K$ を retraction $g: S^2 \xrightarrow{\approx} \partial N$ を homeo，P を S^2 の cell 分割で $f \circ g$ が P の各 cell 上で homeo を導く様な cellular map. となる様なものとし，$\alpha = [f \circ g] \in \pi_2(K)$ とする．$\tilde{L}$ を L の univ. covering space，$h: S^2 \to \tilde{L}$ を，次の図式が可換

となるような celluler map,

$\beta = [h] \in \pi_2(\tilde{L}) = H_2(\tilde{L}) = Z_2(\tilde{L})$

$Z_2(\tilde{L})$ は CW complex としての

2-cycle の群. このとき仮定により,

$\beta = 0$ となる.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f\circ g"'] & \tilde{L} \arrow[d, "\pi"] \\ K \arrow[r, hook, "i"'] & L \end{tikzcd}$$

⑦ P $(|P| = S^2)$ の 0-cell a_i $(i=1,2)$ が共役であるとは, P の $^{\exists}$2-cell $p_i : D^2 \to S^2$ と $\exists\, a_0 \in \partial D^2$ で $(i=1,2)$ $f\circ g \circ p_1 = f \circ g \circ p_2$, $a_i = p_i(a_0)$ $(i=1,2)$ なるものが存在するときに云う. a_1, a_2 を結ぶ S^2 の path l を $f\circ g$ によりK上へ落としたものを $\bar{l} : S^1 \to K$ とすると, $[\bar{l}] = 1 \in \pi_1(L)$ となる. (∵) $h \circ p_1(D^2)$ を $h\circ p_2(D^2)$ へ写す covering transf. が $[\bar{l}]$ だから $[\bar{l}] \neq 1$ とすると, $\beta \neq 0 \in Z_2(\tilde{L})$ となり矛盾.

⑧ P の任意の2つの 0-cell a, b に対し, P の 0-cell $a_0, a_1 \cdots a_n$ で, $a_0 = a$, $a_n = b$, a_{i-1} と a_i は共役 $(i=1,2,\cdots n)$ なるものが存在する (∵ ⑤)

⑨ P の任意の2つの 0-cell a, b に対し, a と b を結ぶ S^2 上の path を l, $\bar{l} = f\circ g \circ l : S^1 \to K$ とすると $[\bar{l}] = 1 \in \pi_1(L)$ (∵ ⑧)

⑩ Kの任意の 1-cell はPのある 1-cell から homeo で写って来ている.

⑪ $i_*: \pi_1(K) \to \pi_1(L)$ は零写像 (∵⑨⑩) q.e.d

定理の証. 定理の仮定の下に下図の ∂ は同型である.

$$\pi_1(L) \xleftarrow[0]{} \pi_1(K) \xleftarrow{\partial} \pi_2(L, K) \longleftarrow \pi_2(L) = 0$$

(∵ lemma)

Kの各 1-cell a に対し, $\partial^{-1}[a] \in \pi_2(L, K)$ を cellular map. $f_a: (D^2, S^1) \to (L, K)$ で実現し, f_a は各 2-cell 及び S^1 上で homeo を導くものとする. すると f_a は $C_2(L) = C_2(K) \oplus C_2(L-K)$ の元を表わすと考えられ, そのうちの $C_2(K)$-成分を $\bar{f}_a$ で表わし, $\bar{f}: C_1(K) \to C_2(K)$ を $\bar{f}(a) = \bar{f}_a$ で定義する. またKの各 2-cell $\alpha: (D^2, S^1) \to (L, K)$ に対し, S^1 の cone $C(S^1)$ 上の値を, 各 1-cell $a \subset S^1$ の cone 上での値を f_a で与えて拡張すれば, α は $\bar{\alpha}: S^2 \to L$ へ拡張される. $\pi_2(L) = 0$ より, $\Phi([\bar{\alpha}]) = 0 \in H_2(L)$. $\bar{\alpha}$ はその作り方より $\bar{\alpha} = (\bar{f} \circ \partial + id)\alpha = 0$ $(\partial: C_2(K) \to C_1(K),\ id: C_2(K) \to C_2(K))$

∴ $\bar{f} \circ \partial = -id$, これは $\partial: C_2(K) \to C_1(K)$ が split することを示し, 任意の Abel 群 A に対し, $H_2(K, A) = 0$

ところで $H_2(M, A) = H_2(K, A) = 0$ だから M は orientable, $H_1(M)$ は torsionfree, $b_2(M) = 0$ となり, $H_*(M) = H_*(S^3)$ が導びかれる. q.e.d

参考文献

[1] J. F. Adams, A new proof of a theorem of W.H. Cockcroft J. London Math. Soc. 30 (1955)

[2] C.D. Papakyriakopoulos, Attaching 2-cells to a complex. Ann. of Math. 78 (1963)

[3] J.R. Stallings, A finitly presented group whose 3-dimensional integral homology group is not finitly generated, Am. J. Math. 85 (1963)

[4] J.H.C. Whitehead, On adding relation to homotopy groups Ann. of Math. 42 (1941)