数理解析研究所講究録
第283巻 1976年 58-62

$\mathbb{P}^2$における曲線の余空間の基本群について

東大 理学部 岡 睦雄

ここでは主としてZariski予想を念頭において得られた複素射影空間$\mathbb{P}^2$の曲線の余空間に関する基本群について、いくつかの結果を紹介します。詳しい証明は参照された論文を見てほしい。

(I) Reducible curve の場合.

今$\mathbb{C}^2$の中に2つの曲線C_1, C_2があって、互に一般の位置(i.e. C_1とC_2は無限遠$\mathbb{P}^1$で交わらず、$\mathbb{C}^2$の中の交点はいずれもtransverse)にあると仮定する。

定理1 (岡-坂本 [4]) 上の仮定のもとで、$\pi_1(\mathbb{C}^2-C_1\cup C_2)$は$\pi_1(\mathbb{C}^2-C_1)\times\pi_1(\mathbb{C}^2-C_2)$に同型である.

系1. 曲線Cの既約成分C_j $(j=1,\cdots,r)$が全て正則で、各々一般の位置にあると仮定する. そのとき$\pi_1(\mathbb{P}^2-C)$は可換群である. ($\mathbb{Z}^{r-1}\oplus\mathbb{Z}/d_0\mathbb{Z}$と同型. ここに$d_0$は各成分$C_j$の次数の最大公約数.)

この系1とLê-Hammの切断定理を使えば. 応用として次の定理が得られる.

定理2 $\mathbb{P}^{n+1}$の中の正則な超~~平面~~曲面V_j $(j=1,2,\cdots,r)$が

互いに一般の位置にあるとする．$V = \bigcup_{j=1}^{} V_j$ とすれば，
(i) $\pi_1(\mathbb{P}^{n+1} - V)$ は可換で，(ii) $\pi_j(\mathbb{P}^{n+1} - V) = 0$
$(2 \leq j \leq n)$．([6])．

(III) Irreducible curve の場合．

既約曲線に関しては殆んど知られていない。Zariski による次数6で，6この cusp 特異点をもち，π_1 が $\mathbb{Z}_2$ と $\mathbb{Z}_3$ の自由積 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ になる例が主な結果であろう。ここでは次の方程式で定義される曲線の余空間の基本群に関して，計算結果を報告します．

$$C : \prod_{j=1}^{l} (Y - \beta_j Z)^{\nu_j} - \prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i Z)^{\lambda_i} = 0$$

ここに，X, Y, Z は $\mathbb{P}^2$ の homogeneous coordinate．
α_i, β_j は複素数．λ_i, ν_j は正の整数．

$n = \sum \nu_j = \sum \lambda_i$ は C の次数．

定理．C の特異点が $\{P_{ij} = [\alpha_i ; \beta_j ; 1]\}$ 以外にないと仮定する．(これは α_i, β_j を十分一般にえらべば，満たされる。)
その時 $G = \pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ とすると

(i) G の center は cyclic group $\mathbb{Z}_a$ を含む．
$a = ns/\lambda\nu$; $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_l)$
$s = (\nu, \lambda)$．

(ii) $G/\mathbb{Z}_a \cong \mathbb{Z}_{\nu/s} * \mathbb{Z}_{\lambda/s} * F(s-1)$

(ii) G の commutator group $D(G)$ は free group で，特に $s=1$ とすると rank $(\nu-1)(\lambda-1)$ の free group. ([3])

この定理より得られる興味ある例を2,3のべる.

(I) 可換になる例

$$C:\ (Y^r - Z^r)(Y^l - 2Z^l)^2 - \varepsilon (X^s - Z^s)(X^m - 2Z^m)^3 = 0$$

($n = r+2l = s+3m$; $s=r=0$ ではない.)

ε は適当な複素数. G は $\mathbb{Z}_n$ と同型だが，曲線 C は lm 個の $(2,3)$-cusp をもつ. この例で G を abelian のまま入れられる cusp の数は.

n	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$	100
# of cusps	4	6	8	12	15	15	20	20		1650

一般の n に関しては
$$\begin{cases} \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n}{3}\right] & \text{if } 6 \nmid n \\ \frac{n^2}{6} - \frac{n}{3} & \text{if } 6 \mid n \end{cases}$$

(II) 非可換，Center あり.

$$C:\ (X^{pr} + Z^{pr})^q + (Y^{qr} + Z^{qr})^p = 0.$$

$(p,q) = 1$, $p, q, r \geq 2$.

i) Center $\cong \mathbb{Z}_r$

ii) $G/\mathbb{Z}_r \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$

iii) Commutator $D(G) \cong F((p-1)(q-1))$

(free group of rank $(p-1)(q-1)$.)
とくに, $p=r=2$, $q=3$ とすると. $G \cong SL(2,\mathbb{Z})$.

(III). Center なし (非可換).

$$C: (X^p+Z^p)^q + (Y^q+Z^q)^p = 0.$$

(i) $G \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$

(ii) Center $= \{e\}$

(iii) $D(G) \cong F((p-1)(q-1))$.

この例で, $p=2$, $q=3$ とすると Zariski の例が得られる.

文献

[1] Oka, M. On the fundamental group of a reducible curve in $\mathbb{P}^2$. (J. London Math. Soc. (2), 12 (1976) 239–252)

[2]. Oka, M. Some plane curves whose complements have non-abelian fundamental groups. Math. Ann. 218, 55–65 (1975).

[3]. On the fundamental group of the complement of certain plane curves (to appear)

[4]. OKA, M – Sakamoto, K: Product theorem of the fundamental group of a reducible curve (to appear).

[5] Zariski : On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve. Amer. J. Math. 51 (1929).

[6] OKA, M: On the topology of the complement of a hypersurface in $\mathbb{P}^{n+1}$ (to appear).

[7]. Lê - Hamm : Un theorémè de Zariski du type de Lefschetz, Ann. Sci. de l'Ecole Normale Superieure. fasc. 3. 1973.