数理解析研究所講究録
第283巻 1976年 84-108

Topologically Stable Unfoldings II

千葉大理 福田 拓生

INTRODUCTION [F1] において，関数の topologically stable unfolding の存在，唯一性，余次元一定のときの有限性について考察した。写像芽に関しても，同様の考察により次の定理を証明することができる。

定理 次元 r を任意に固定したとき，次元 r の topologically stable unfolding をもつ写像芽の位相型とそれらの top. stable unfolding の位相型は有限個である。

この定理の証明において，THOM の isotopy lemma と C^0-sufficiency に関する定理（§2 定理2.3 p7）が基本的役割をはたす。この定理2.3 を仮定すれば，上の定理は[F1]における と同様に証明できることを一言注意して，上の定理の証明は他の場所にゆずり，ここでは C^0-sufficiency に関する定理のみを証明する。

ここでの議論は 実C^∞級でなされているが，Complex analytic の場合にそのまゝ翻訳できる。証明中 Whitney stratification の概念と Thom の isotopy lemma が使われるが [M_1], [F_2] を参照のこと。上の定理にある stable unfolding の定義は§1でなされる。

目 次

§1 unfoldings ······ 2

§2 C^0-k-determinacy 又は C^0-sufficiency（主定理）······ 5

§3 関数の場合の主定理の証明 ················ 8

§4 写像芽の場合の主定理の証明 ······ 15

§1 unfoldings

<u>定義1.1</u> C^∞級写像 $f_i : M_i \to N_i$, $i=1.2$ が <u>C^0-同値</u>（C^0-equivalent）であるとは，同相写像 $h : M_1 \to M_2$ と $h' : N_1 \to N_2$ が存在して，$f_2 \circ h = h' \circ f_1$ が成立つときにいう。写像芽の C^0-同値についても同様に定義する。

<u>定義1.2</u> C^∞級写像芽 $f : (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, c)$ に対して，C^∞級写像芽 $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell, (a, b)) \to (\mathbb{R}^n, c)$ が 条件

$$F(x, b) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^m$$

を満たすとき F を f の b を中心とする <u>ℓ次元開折</u> <u>(unfolding)</u> という。

定義1.3　$F:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^r,(a,b))\to(\mathbb{R}^n,c)$ 及び $G:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^s,(a',b'))\to(\mathbb{R}^n,c')$ をそれぞれ $f:(\mathbb{R}^m,a)\to(\mathbb{R}^n,c)$ 及び $g:(\mathbb{R}^m,a')\to(\mathbb{R}^n,c')$ の開折とする。そのとき 写像芽の組 $\Phi=(H_1,H_2,\varphi)$ が 次の条件をみたすとき Φ を G から F への C^0級開折園射とよぶ：

(1)　$H_1:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^s,(a',b'))\to(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^r,(a,b))$

$H_2:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s,(c',b'))\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,(c,b))$

$\varphi:(\mathbb{R}^s,b')\to(\mathbb{R}^r,b)$

は 連続写像芽で 次の図式 が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^r \arrow[r, "F\times id_{\mathbb{R}^r}"] & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^r \\
\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^s \arrow[u, "H_1"'] \arrow[r, "G\times id_{\mathbb{R}^s}"] & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s \arrow[u, "H_2"'] \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^s \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

但し $F\times id_{\mathbb{R}^r}(x,u)=(F(x,u),u)$　, $\pi(y,u)=u$.

(2)　$H_1(x,u)=(h_{1,u}(x),\varphi(u))$　, $H_2(y,u)=(h_{2,u}(x),\varphi(u))$

とかけるが, $h_{1,u}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 及び $h_{2,u}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は共に homeomorphism の芽である。

$\Phi=(H_1,H_2,\varphi)$ が G から F へ C^0級開折園射であることを 記号 $\Phi:G\to F$ であらわす。

<u>定義1.4</u>　開折圏射　$\Phi=(H_1,H_2,\varphi):G\to F$ が <u>C^0級開折同型</u> であるとは H_1, H_2, φ がそれぞれ homeomorphism であるときにいう。開折圏同型 $\Phi: G\to F$ が存在するとき F と G は開折として <u>C^0-equivalent</u> であるという。

<u>定義1.5</u>　f の開折 F が f の <u>C^0-普遍開折</u>であるとは，f の他の任意の開折 G に対して，開折圏射 $\Phi: G\to F$ が存在するときにいう。

<u>定義1.6</u>　$f:(\mathbb{R}^m,a)\to(\mathbb{R}^n,c)$ の開折 $F:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^r,(a,b))\longrightarrow(\mathbb{R}^n,c)$ が <u>C^0-安定開折(topologically stable unfolding)</u> であるとは，点 (a,b) の任意の近傍 $U\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^r$ と F の任意の代表元 $\tilde{F}\in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$ に対して $\tilde{F}$ の $C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$ における Whitney 位相での近傍 $N(\tilde{F})$ が存在して次の条件をみたすときにいう：

（条件）　任意の写像 $\tilde{G}\in N(\tilde{F})$ に対して 点$(a',b')\in U$ が存在して $\tilde{G}$ の (a',b') における写像芽

$$G:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^r,(a',b'))\longrightarrow(\mathbb{R}^n,c')\ ,\quad c'=\tilde{G}(a',b')$$

が r 次元開折として F に C^0-同値になる。

<u>定義1.7</u>　$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への C^∞級写像の芽全体の集合を

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ であらわす。C^∞級写像芽 $f:(\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, c)$ の topological codimension が r 以下（top codim $f \leq r$）であるとは，次の条件をみたすときにいう：

（条件）$f \in M$ なる codimension $\leq m+r$ の $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ の smooth な submanifold M が存在し，任意の2元 $g, h \in M$ は互いに C^0-同値な C^0-安定開折をもつ。

但し，$\pi_k : \mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ を写像芽にその k-jet を対応させる自然な射影とするとき，$\mathcal{E}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ の部分集合 M が codimension $\leq m+r$ の smooth な submanifold であるとはある $k \geq 0$ に対して smooth な codim $\leq m+r$ の submanifold $M_k \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ が存在して $M = \pi_k^{-1}(M_k)$ となるときにいう

§2 C^0-k-determinacy.

定義2.1 k-jet $z \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ が C^0-sufficient jet であるとは，z の代表元である任意の写像芽 f, g が互いに C^0-同値になるときにいう。又写像芽 f が C^0-k-determinate であるとは f の k-jet が C^0-sufficient であるときにいう。

C^0-k-determinacy に関して 次の古典的結果がある。

<u>補題2.2</u> (Thom [T]) 任意の自然数の組 $(r; m, n)$ に対して (r, m, n) のみで定まる自然数 $s = s(r; m, n) \geq r$ が存在して 次の条件をみたす。

(1) $\pi = \pi^s_r : J^s(m, n) \to J^r(m, n)$ を自然な射影とするとき，任意の jet $z \in J^r(m, n)$ に対して，$\pi^{-1}(z)$ の proper な代数的部分集合 Σ_z (これを<u>分岐多様体</u>という) が存在する。

(2) $j^s f(0) \in \pi^{-1}(z) - \Sigma_z$ ならば f は C^0-s-determinate である。

[T] においては 数 $s = s(r; m, n)$ は全然評価されてない。我々は 本稿で，この $s = s(r; m, n)$ を次の様に評価できる：

$$(*) \quad s(r; m, n) = \begin{cases} r + \left[\dfrac{m}{n-m+1}\right] + 1 & \text{if } m \leq n \\ r + n + 1 & \text{if } m \geq n \end{cases}$$

更に上の補題は 次のように改良できる。

<u>定理2.3</u>　$\Delta=\Delta(r;m,n)$ を上の(*)で与えるとき，任意の semi-algebraic set $W \subset J^r(m,n)$ に対して closed semi-algebraic subset $\Sigma_W \subset (\pi^\Delta_r)^{-1}(W)$ で次の条件をみたすものが存在する。

(1) $\dim \Sigma_W < \dim (\pi^\Delta_r)^{-1}(W)$

(2) $j^\Delta f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma_W$ ならば 制限写像

$$f|C(f) : C(f) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

は finite-one map である，ここに $C(f)$ は f の特異点の集合をあらわす。

(3) $\pi^{-1}(W) - \Sigma_W$ の jet は全て sufficient jet である。更に，もし f_1 と f_2 の Δ-jet $j^\Delta f_1(0)$ と $j^\Delta f_2(0)$ が $(\pi^\Delta_r)^{-1}(W) - \Sigma_W$ の同じ連結成分に属すならば，f_1 と f_2 は C^0-同値である。

Introduction における stable unfolding の有限性に関する定理の証明において，基本的役割を果すのは トムの isotopy lemma，多項式写像の stratification 及び この定理である。以下 この定理の証明についやされる。

§3　関数の場合の定理2.3の証明

関数の場合も写像芽の場合も　定理2.3の証明の原理は同じであるが，関数の場合の証明は，写像芽のそれに比して非常に簡単であるので，証明の方針の見通しをよくするため，証明を関数の場合と写像の場合に分ける。

次の elementary な　補題を準備する。

<u>補題3.1</u>　任意の写像 $f=(f_1,\dots,f_n)\in C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ と任意の点 $p\in\mathbb{R}^m$ 及び任意の整数の組 $r,s\geqq 0$ に対して，次数 $r+s+1$ の多項式写像 $h_p=(h_{1,p},\dots,h_{n,p})\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$

$$(*)\qquad h_{i,p}=\sum_{|\omega|\leq r+s}a_{i\omega}(p)x^\omega$$

で　次の条件をみたすものが存在する：

(1)　$j^r h_p(0)=j^r f(0)$

(2)　$j^s h_p(p)=j^s f(p)$

(3)　$j^{r+s+1}h_0(0)=j^{r+s+1}f(0)$

更に

(4)　$h_{i,p}$ の係数 $a_{i\omega}(p)$ は p に依存するが，それは p の　C^∞級関数であるようにえらべる。

<u>証明</u>　$n=1$ のときに証明すれば充分である。

関数 g の点 p における l 次の Taylor 級数を $\tau_p^l g$ であらわす。すなわち

$$(5)\quad \tau_p^l g(x) = \sum_{|\omega|\le l} \frac{1}{\omega!} \frac{\partial^{|\omega|} g}{\partial x^\omega}(p)\,(x-p)^\omega .$$

原点において r[redacted] 次[redacted]の flat な関数 f, すなわち

$$(6)\quad \frac{\partial^{|\omega|}}{\partial x^\omega} f(0) = 0 \qquad 0 \le |\omega| \le r+\text{[redacted]}$$

なる f に対して補題を証明すれば充分である。実際，任意の f に対して $g = f - \tau_0^{r\text{[redacted]}} f$ は原点において r[redacted] 次まで flat であり，g に対して補題の条件をみたす多項式 h_p' が存在すれば　$h_p(x) = h_p'(x) + \tau_0^{r\text{[redacted]}} f$　は f に対して補題の条件をみたす。

従って f は原点において r[redacted] 次まで flat とする。そのような f に対して f は次の形にかける (J. Milnor, Morse theory (p5) lemma 2.1 参照)

$$(7)\quad f(x) = \sum_{|\omega| = r\text{[redacted]}+1} x^\omega f_\omega(x)$$

従って

$$(8)\quad f(x) = x^\omega g(x) \qquad \text{for some } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_m),\ |\omega| = \omega_1 + \cdots + \omega_m = r\text{[redacted]}+1$$

なる形の関数に対して補題を証明すればよい。所で

(9) $h_p(x) = x^\omega \tau_p^s(g(x))$

とおけば　条件 (1) (3) (4) は明らかにみたされる。条件(2)は

(10) $\tau_p^\ell(g_1 g_2) = \tau_p^\ell(\tau_p^\ell g_1 \, \tau_p^\ell g_2)$

が任意の二つの関数 g_1, g_2 に対して成立つので明らかである。実際

$$\tau_p^s(h_p(x)) = \tau_p^s(x^\omega \, \tau_p^s(g(x))) = \tau_p^s(\tau_p^s(x^\omega) \, \tau_p^s(g(x)))$$
$$= \tau_p^s(x^\omega g) = \tau_p^s(f)$$

Q.E.D.

定理2.3　を関数の場合に限ると　次の形になる。

<u>定理3.2</u>　任意の semi-algebraic set $W \subset J^r(m,1)$ に対し，closed semi-algebraic set $\Sigma_W \subset (\pi_r^{r+2})^{-1}(W)$ で次の条件をみたすものが存在する。

(1)　$\dim \Sigma_W < \dim (\pi_r^{r+2})^{-1}(W)$

(2)　$j^{r+2}f(0) \in (\pi_r^{r+2})^{-1}(W) - \Sigma_W \Longrightarrow 0 \in \mathbb{R}^m$ は f の孤立特異点である。

(3)　任意の jet $z \in \pi^{-1}(W) - \Sigma_W$ は sufficient

(4)　更に，もし関数芽 f, g の $(r+2)$-jet

$j^{r+2}f(0)$ と $j^{r+2}g(0)$ が $\pi^{-1}(W)-\Sigma_W$ の同じ連結成分に属すならば f と g は C^0-同値である。

<u>記号</u> 集合 $M(k)=\{0,1,2,\dots,k\}$ の m 個のコピーの直積 $M(k)^m$ の元 $\alpha=(\alpha^1,\dots,\alpha^m)$ に対して

$$\deg\alpha=\alpha^1+\cdots+\alpha^m$$ と定める。

$$C(m,k)=\{\alpha\in M(k)^m \mid \deg\alpha=k\}$$ とおく。

$C(m,k)$ は有限集合で その濃度 $\#C(m,k)=(m+k-1)!/k!(m-1)!$

$C(m,k)=\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}$ と適当に順序づける。$N=\#C(m,k)$

$\mathbb{R}^N$ の元 $(a_1,\dots,a_N)$ に対して 斉次式 $\sum_{i=1}^{N}a_iX^{\alpha_i}$ を

$$\sum a_iX^{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{N}a_iX^{\alpha_i(1)}\cdots X_m^{\alpha_i(m)}$$

で定義する，但し $\alpha_i=(\alpha_i(1),\dots,\alpha_i(m))$ 。

特に ~~$C(m$~~ $k=r+1$, $r+2$ のとき，

$$C(m,r+1)=\{\alpha_1,\dots,\alpha_\mu\} \qquad \mu=\#C(m,r+1)$$

$$C(m,r+2)=\{\beta_1,\dots,\beta_\nu\} \qquad \nu=\#C(m,r+2)$$

とおく。

<u>定理3.2の証明</u> $z\in W\subset J^r(m,1)$ とし，z が r 次の多項式 $y=P_z(x)$ で代表されるとする。すると次の1対1

対応が自然に得られる。

$$(\pi_{r}^{r+2})^{-1}(W) = \{ \text{polynomials } y = P_z(x) + \sum_{i=1}^{\mu} a_i x^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{\nu} b_j x^{\beta_j} \}$$

$$\Big\updownarrow \text{1対1}$$

$$\{(z, a_1, \cdots, a_\mu, b_1, \cdots b_\nu)\} = W \times \mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}^\nu$$

$$\Omega = \{(x, z, a, b)\} = \mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}^\nu$$

$$O = \{(x, z, a, b) \in \Omega \mid P_{a,b,z}(x) = P_z(x) + \sum a_i x^{\alpha_i} + \sum b_j x^{\beta_j} = 0\}$$

$$S = \{(x, z, a, b) \in \Omega \mid d_x P_{a,b,z}(x) = 0\}$$

$$Q = \{(0, z, a, b)\}$$

とおく。

Qと $W \times \mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}^\nu$ 及び $(\pi_r^{r+2})^{-1}(W)$ を同一視する。

Wが semi-algebraic な manifold として一般性を失なわない。Ωの stratification $\mathcal{S}(\Omega)$ で，Q, $S \cap O$, S, O がそれぞれ Ω の substratified set になるようなものが存在する。(see [F$_2$])

$$\Sigma_W = \overline{\bigcup_{\substack{X \in \mathcal{S}(Q) \\ \dim X < \dim Q}} X}$$

, $\mathcal{S}(Q)$は 上の Ω の substratified set として与えられた Qの stratification

とおくと，これが求めるものである。まず Σ_W は $Q = \pi^{-1}(W)$ の closed semi-algebraic subset で $\dim \Sigma_W < \dim Q$ である。

次に条件 (2)(3)(4) をチェックしよう。明らかに条件(3)は(4) に含まれている。故に(2)(4) をチェックするとよい。

$j^r f(0) = z \in W$ なる $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ に対し，補題3.1によると，任意の点 $p \in \mathbb{R}^m$ に対して多項式 $h_p(x) = \sum_{|\omega| \le r+2} a_\omega(p) x^\omega$ で次の条件をみたすものが存在する。

(5) $j^r h_p(0) = j^r f(0) = z$

(6) $j^1 h_p(0) = j^1 f(p)$

(7) $j^{r+2} h_0(0) = j^{r+2} f(0)$

条件(5)より h_p は次の形をしている。

$$h_p(x) = P_z(x) + \sum a_i(p) x^{\alpha_i} + \sum b_j(p) x^{\beta_j}$$

そのとき写像 $jf : \mathbb{R}^m \longrightarrow \Omega$ を次式で定義する。

(8) $jf(p) = (p, z, a_1(p), \dots, a_\mu(p), b_1(p), \dots, b_\nu(p))$

補題3.1によると jf は C^∞級である。次の性質を得る。

(10) jf は Q に transversal

(11) $f^{-1}(0) = jf^{-1}(\Theta)$

(12) $C(f) = f$の特異点の集合 $= jf^{-1}(S)$

<u>(2)の証明.</u> $j^{r+2} f(0) = jf(0) \in Q - \Sigma_W$ とする。$\mathrm{codim}\, Q$ in $\Omega = m = \mathrm{codim}\, S$ in Ω，かつ $j^{r+2} f(0) = jf(0)$ の属する Q の strata の codimension も m，従って $jf(0)$ の近くには $S - Q$ の

strata は存在しない。故に原点の近傍では，(12)より，

$$C(f) = jf^{-1}(S) = jf^{-1}(Q) = \{0\}$$

となり 原点は f の孤立特異点である。

<u>(4)の証明。</u> $j^{r+2}f(0)$, $j^{r+2}g(0)$ が $\pi^{-1}(W)-\Sigma_W$ の同じ連結成分に属すとする。 f_t を $f_0=f$, $f_1=g$ かつ $j^{r+2}f_t(0)\in\pi^{-1}(W)-\Sigma_W$ なる smooth なホモトピーとする。 そのとき， $I=(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ とおき，

$$F : \mathbb{R}^m\times I \longrightarrow \mathbb{R}\times I \quad \text{を} \quad F(x,t) = (f_t(x), t)$$

$$\pi : \mathbb{R}\times I \longrightarrow I \quad \text{を} \quad \pi(y,t) = t$$

$$jF : \mathbb{R}^m\times I \longrightarrow \Omega \quad \text{を} \quad jF(x,t) = jf_t(x)$$

で定義する。 F が C^∞ 級であるように f_t はとれる。

$j^{r+2}f_t(0)\in Q-\Sigma_W$ で jF は Ω の全ての strate に横断的なので $\mathbb{R}^m\times I$ に Ω からの induced stratification を入れることができる。 $\mathbb{R}\times I$ に

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}\times I) = \{0\times I, (\mathbb{R}-\{0\})\times I\}$$

なる自然な stratification を入れると，F は Thom-map over π となり，2nd-isotopy lemma より f と g は C^0-同値。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m\times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "jF"] & \mathbb{R}\times I \arrow[r, "\pi"] & I \\
\Omega & &
\end{tikzcd}$$

Q.E.D

§4 写像芽の場合の主定理の証明.

$s > r$ のとき, $\pi = \pi^s_r : J^s(m,n) \longrightarrow J^r(m,n)$ を自然な写影とする。

補題4.1　$W \subset J^r(m,n)$, $X \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ を任意の semi-algebraic set とする。そのとき $(\pi^{r+k+1}_r)^{-1}(W)$ の中の closed semi-algebraic set $\Sigma = \Sigma(X, W)$ が存在して次の条件をみたす:

(1)　$\dim \Sigma < \dim \pi^{-1}(W)$

(2)　$j^{r+k+1}f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma \Rightarrow j^k f : \mathbb{R}^m \to J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

は (原点を除いて) 原点の近傍で X に横断的

(3)　$\operatorname{codim} X = m \Rightarrow j^k f^{-1}(X) \cap U = \{0\}$ or ϕ

for some small neighborhood U.

証明. 定理3.2と同様の考察をくりかえす。$z \in W \subset J^r(m,n)$ とし, z が r 次の多項式写像 $(y_1, \cdots, y_n) = (P_{1,z}(x), \cdots, P_{n,z}(x))$ で代表されているとする。$s = r+k+1$ とおく。

$$(\pi^s_r)^{-1}(W) = \{\text{多項式写像}(y_1, \cdots, y_n) \,;\, y_j = P_{j,z}(z) + \sum_{r<|\omega|\leq s} a_i^{\omega} x^{\omega}\}$$

$$\updownarrow \ 1\text{対}1$$

$$W \times \mathbb{R}^{n \times \nu} = \{(z, a_1^{\omega_1}, \cdots, a_1^{\omega_\nu}, a_2^{\omega_1}, \cdots, a_n^{\omega_1}, \cdots, a_n^{\omega_\nu})\}$$

，但し　$\nu = \sum_{l=r+1}^{s} (m+l-1)!/l!(m-1)!$

$$\Omega = \{(x, z, a_i^{\omega})\} = \mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^{n\times\nu}$$

$$j_\Omega : \Omega \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad を$$

$$j_\Omega(x, z, a_i^{\omega}) = j^k(P_z + \sum a^{\omega} x^{\omega})(x)$$

で定義する。$P_z = (P_{1,z}, \ldots P_{n,z})$ は　zを代表する多項式。

補題3.1　によると　j_Ω　は

$$Q = \{(0, z, a_i^{\omega})\} = 0 \times W \times \mathbb{R}^{n\times\nu}$$

以外では　submersion　になっている。(ie, $j_\Omega|_{\Omega-Q}$　が submersion). 又　j_Ω は多項式写像，X　は semi-algebraic なので　$X^* = j_\Omega^{-1}(X) - Q$　は　semi-algebraic manifold としてよい。　pair　X^*　と Q　が　Whitney の条件をみたさぬ Q の点を　Σ　とおくと　これが補題 3.1 の求めるものである。(もちろんここで　Q と $\pi^{-1}(W)$ は同一視している。)

実際，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$　が　$j^s f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma$　とする。

fに対して　$jf : \mathbb{R}^m \longrightarrow \Omega$　を

$$jf(p) = (p, j^s f(0), a_i^{\omega}(p))$$

とおく。　但し，$a_i^{\omega}(p)$ は　fと p に対して，補題3.1で保障された多項式写像の係数である。　次の性質を得る。

(4) jf は Q に横断的

(5) $j^k f = j_\Omega \circ (jf)$

(6) $jf^{-1}(X^*) = jf^{-1}(X) - \{0\}$

今 $j^s f(0) \in Q - \Sigma$ かつ $(Q - \Sigma)$ と X^* は Whitneyの条件をみたすので (4) より

(7) jf は X^* に transversal

j_Ω が submersion なることと (5), (7) より 補題4.1 が証明された。

Q.E.D.

補題4.2. 整数 r, m, n に対して $s = s(r, m, n)$ を 6頁の (*) で与えられる数とする。任意の semi-algebraic set $W \subset J^r(m, n)$ に対して closed semi-algebraic set $\Sigma \subset (\pi^s_r)^{-1}(W)$ が存在して次の条件をみたす。

(1) $\dim \Sigma < \dim (\pi^s_r)^{-1}(W)$

(2) $j^s f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma \Rightarrow f$ の特異点集合 $C(f)$ は stratification $\mathcal{S}(C(f))$ をもち、任意の strata $X \in \mathcal{S}(C(f))$ に対して $f|X : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は immersion となる。

証明. まず, Thom-Boardman singularity $\Sigma^{i_1 \cdots i_k} \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $i_k \neq 0$, で $\operatorname{codim} \Sigma^{i_1 \cdots i_k} \leq m$ なるものが存在す

る sequence $(i_1, \cdots i_k)$ の最大の長さ $k = k(m,n)$ を求める。

$m \leq n$ の場合は $\operatorname{codim} \Sigma^{\overbrace{1,\cdots 1}^{k}} = m$ となる k

$m \geq n$ の場合は $\operatorname{codim} \Sigma^{\overbrace{m-n+1,\cdots 1}^{k}} = m$ となる k

がそうである。J. Boardman [B_1] によると，それは

$$(3) \quad k = k(m,n) = \begin{cases} [m/n-m+1] & \text{if } m \leq n \\ n & \text{if } m \geq n. \end{cases}$$

となる。以下議論は同じなので $m \geq n$ の場合に証明する。

$$S_1 = \text{closure of } \Sigma^{m-n+1} \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$$S_2 = \bigcup_{\operatorname{codim} \Sigma^I > m} \Sigma^I \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

とおくと，S_2 は $\operatorname{codim} > m$ の $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ の algebraic subset である。$S_1 - S_2$ を次の形の Thom-Boardman singularity の和集合に分割できる。

$$(4) \quad S_1 - S_2 = \Sigma^{\underbrace{m-n+1, 1, \cdots, 1}_{k}} \cup \bigcup \Sigma^{i_1, \cdots, i_{k-1}, 0}$$

$S_1 - S_2$ の stratification で $\{\Sigma^{m-n+1, 1, \cdots 1}, \Sigma^{i_1, \cdots i_{k-1}, 0}\}$ を細分して得られるものが存在する。$S_1 - S_2$ の semi-algebraicity から $S_1 - S_2$ の stratification $\mathcal{S}(S_1 - S_2)$ の strata の数は有限個である。補題 4.1 によると $(\pi_{\hat{c}})^{-1}(W)$ の semi-algebraic set Σ で $\dim \Sigma < \dim \pi^{-1}(W)$ で，$j^A f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma \Rightarrow j^A f$ は $\mathcal{S}(S_1 - S_2)$ の strata に transverse である

ようなものが存在する。このΣが求めるものである。

実際 $j^k f(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma$ とする。

(5) $C(f) = (j^k f)^{-1}(S_1)$

なので，$C(f)$のstratificationを

(6) $\mathcal{S}(C(f)) = \{0\} \cup \{(j^k f)^{-1}(X) - \{0\} \mid X \in \mathcal{S}(S_1 - S_2)\}$

とおけばよい。$f|\{0\} : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ は明らかにimmersion.

又 $\operatorname{codim} \Sigma^{m-n+1, 1 \cdots 1} = m$ なので $X \subset \Sigma^{m-n+1, 1 \cdots 1}$ ならば

補題4.1より，$(j^k f)^{-1}(X) - \{0\} = \phi$. 一方 $X \subset \Sigma^{i_1 \cdots i_k, 0}$

ならば $f|(j^k f)^{-1}(X)$ がimmersionであることは，$\Sigma^{i_1 \cdots i_k, 0}$

の定義と横断性より明らかである。(see [B])

補題 4.2 Q.E.D.

補題4.3 $X, Y \subset \mathbb{R}^{n+k}$ を二つのsubmanifolds, $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ を自然な射影とする。次の条件をみたすとする。

(1) $Y \supset \partial X$ で pair (X, Y) はWhitneyの条件(b)をみたす。

(2) $\pi(X)$, $\pi(Y)$ は $\mathbb{R}^n$ のsubmanifoldで $\pi|X : X \to \pi(X)$ 及び $\pi|Y : Y \to \pi(Y)$ はsubmersion.

そのとき $\Longrightarrow$

(3) pair $(\pi(X), \pi(Y))$ はWhitneyの条件(b)を満す。

証明 "pair (X, Y) が Whitney の条件を点 $y \in Y$ で満たす" とは "y に収束する X の点列 $\{x_i\}$ と Y の点列 $\{y_i\}$ に対し，x_i と y_i を結ぶ直線 $\widehat{x_i y_i}$ がある直線 l に収束し，$T_{x_i}(X)$ がある空間 τ に収束するならば，

$$(4) \qquad \tau > l$$

となる" であった。所で 条件(4) は 次の条件(5)と同値である。

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} \arg\left(\widehat{x_n y_n}, T_{x_n}(X)\right) = 0$$

ここに $\arg$ は角度をいみする。Whitney の 条件(b)を (5)で定式化すると 補題4.3 は 明白である。

Q.E.D.

主定理(＝定理2.3)の証明.

$\Sigma = \Sigma_W$ を 補題 4.2 で得られるそれとする。定理2.3 における条件 (1)，(2) は補題4.2 から自明である。(3)を証明する長い旅路に出よう。

整数 N を充分多きくとっておく。例えば $N > \max(m, n)$

$$J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N = J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \cdots \times J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

とおく。但し $k = k(m, n)$ は P18 の 式(3) で与える。

$$\Omega = \{(x, z, a_i^{\omega})\} = \mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^{n \times \nu} = \mathbb{R}^m \times \pi^{-1}(W)$$

を補題4.1の証明の中で与えたものとする。

$$\Omega^N = \Omega \times \cdots \times \Omega \qquad (N\text{個のコピーの直積})$$

とおく。

集合$\{1, \cdots, N\}$の部分集合$\sigma = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_\ell \mid \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_\ell\}$に対して

$$\Delta_\sigma = \{(y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \mid y_{\sigma_1} = \cdots = y_{\sigma_\ell}\}$$

とおく. 同じ記号で

$$\Delta_\sigma \equiv (\pi^N_{\mathbb{R}^n})^{-1}(\Delta_\sigma)$$

をあらわす, 但し $\pi^N_{\mathbb{R}^n} : J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N \longrightarrow \mathbb{R}^{nN} = \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$

は自然な射影。

$\mathcal{S}(\Sigma, \Delta) = \{\Sigma^{I_1} \times \cdots \times \Sigma^{I_N}, \Delta_\sigma \mid$ ここにΣ^{I_ℓ}は全てのThom-Boardman singularity, $\sigma \subset \{1, \cdots, N\}$をわたりあるく$\}$ とおく。

すると$J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N$のstratificationで集合族$\mathcal{S}(\Sigma, \Delta)$を細分して得られる最大のもの$\underline{\mathcal{S}(J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N)}$が存在する。所で $j_\Omega : \Omega \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ は Q 以外ではsubmersionであったので

$$j_\Omega^N = j_\Omega \times \cdots \times j_\Omega : \Omega^N \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N$$

は$\Omega^N - Q(N)$上でsubmersionである。ここに$\pi_{i\text{-}\Omega} : \Omega^N \to \Omega$を第$i$成分への射影とするとき, $Q^{(N)} = \bigcup \pi_{i\text{-}\Omega}^{-1}(Q)$.

従って $\Omega^N - Q^{(N)}$ には $\mathcal{S}(J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^N)$ を j_Ω^N でひきもどしてえられる stratification $\mathcal{S}(\Omega^N - Q^{(N)})$ がある。

$$\Sigma^{(N)} = \pi_{i\Omega}^{-1}(\Sigma)$$

とおくとき，Ω^N の stratification で次の条件をみたすものが存在する。

(1) $\mathcal{S}(\Omega^N)$ は $\{\mathcal{S}(\Omega^N - Q^{(N)}), Q^{(N)}, \Sigma^{(N)}\}$ を細分したもの

さて，f, g を $j^s f(0), j^s g(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma$ なる写像芽とする。f_t を $f_0 = f$，$f_1 = g$ なるホモトピーで $j^s f_t(0) \in \pi^{-1}(W) - \Sigma$ なるものとする。

$$F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad ; \quad F(x, t) = (f_t(x), t)$$

$$jF : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R} \quad ; \quad jF(x, t) = (jf_t(x), t)$$

$$jF^N : \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^N \times \mathbb{R} \ ; \ jF^N(x_1, \ldots, x_N, t) = (\cdots, jf_t(x_N), t)$$

で定める。補題4.1 の証明中に見た如く，

(2) jF^N は $Q \times \cdots \times Q \times \mathbb{R}$ に横断的である

従って，$\Omega^N \times \mathbb{R}$ に $\mathcal{S}(\Omega^N)$ から induce される自然な stratification $\mathcal{S}(\Omega^N \times \mathbb{R})$ を入れると

(3) jF^N は $\mathcal{S}(\Omega^N \times \mathbb{R})$ の全ての strate に横断的

となる。従って $\cancel{jF^N(\#}$

(4) $jF^N(\mathbb{R}^m\times\cdots\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R})$ には $\mathcal{S}(\Omega^N\times\mathbb{R})$ から induce された stratification $\mathcal{S}(jF^N(\mathbb{R}^{mN}\times\mathbb{R}))$ が存在する。

一方 $\tilde{j}_\Omega^N : \Omega^N\times\mathbb{R}\longrightarrow J^k(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)^N\times\mathbb{R}$ を $\tilde{j}_\Omega^N(p_1,\dots,p_N,t) = (j_\Omega(p_1),\dots,j_\Omega(p_N),t)$ で与えるとき $\tilde{j}_\Omega^N$ は $\Omega^{(N)}\times\mathbb{R}$ 以外ではsubmersion 従って 等式

(5) $(j^kF)^N = \tilde{j}_\Omega^N\circ jF^N$

が成立つ。但し $(j^kF)^N = j^kF\times\cdots\times j^kF : \mathbb{R}^m\times\cdots\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to J^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)^N\times\mathbb{R}$

~~は~~ $(x_1,\dots,x_n,t)\longrightarrow(j^kf_t(x_1),\dots,j^kf_t(x_N),t)$。

$J^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)^N\times\mathbb{R}$ に $\mathcal{S}(J^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)^N)$ から自然に induce される stratification $\mathcal{S}(J^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)^N\times\mathbb{R})$ を入れる。

(6) $\pi_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} : J^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)^N\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$

を $\pi_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}(j^kf_1(p_1),\dots,j^kf_N(p_N),t) = (f_1(p_1),t)$ なる自然な射影とする。 Nを充分大きくとっておくと、

(7) $X, Y\in\mathcal{S}(jF^N((\mathbb{R}^m)^N\times\mathbb{R}))$ に対して

$\pi_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}\circ\tilde{j}_\Omega^N(X)\cap\pi_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}}\circ\tilde{j}_\Omega^N(Y)\neq\phi \overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \pi_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}\circ\tilde{j}_\Omega^N(X)$
$= \pi_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}\circ\tilde{j}_\Omega^N(Y)$ が成立つ

(これは $J^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)^N$ の stratification が、$\mathcal{S}(\Sigma,\Delta)$ の細分 ~~で~~ あったので (p21 参照).)

従って　補題3.3より

(8)　$\mathcal{S}(\mathrm{Image}\,F)=\{\pi_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}\circ \tilde{j}_\Omega^N(X)\mid X\in\mathcal{S}(jF^N(\mathbb{R}^{mN}\times\mathbb{R}))\}$

は Image $F\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$　の stratification を与える。Image F は $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$　の closed set として一般性を失なわぬので，

(9)　$\mathcal{S}(\mathrm{Image}\,F)\cup\{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}-\mathrm{Image}\,F\}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$

は $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ の stratification を与える。

一方　(2)(3)　より，　$\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ には　jF により $\mathcal{S}(\Omega^N\times\mathbb{R})$ の stratification を入れることができる。所でこの stratification を細分して，

$F:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$

が，$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ の stratification を(9)で与えたとき，stratified map になるようにできる。

(10)　$\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\xrightarrow{F}\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\xrightarrow{\pi}\mathbb{R}$

は　定理の中の条件(2)（それはすでに証明された）より Thom map であり，従って　isotopy lemma より　$f_0=f$ と $f_1=g$ は C^0-同値となる。

定理2.3証明完了．

以上．

文　献

[B] J. Boardman. Singularities of diff. maps. Publ. Math I.H.E.S. 33. (1967) 21-57

[F1] T. Fukuda. Topologically stable unfoldings について. 数理研講究録 No257 "C^∞ 写像のトポロジー"

[F2] ———. Types topologiques des polynômes. to appear in Publ Math. I.H.E.S No46

[M] J. Mather. Notes on topological stability. mimeographed Harv. Univ.

[T] R. Thom. Local topological properties of diff. maps Colloq. on Differential Analysis. Oxford Univ. Press.