数理解析研究所講究録
第 284 巻 1976 年 1-17

電気回路網のエネルギー，パワーそして混合ポテンシャルについて

早大 理工 電気工学科
松本 隆

§1 はじめに

小文の目的は次の事実を示す事，及び関連するいくつかの問題を検討する事である。

" 実質狭義受動な電気回路網は compact attractor をもつ"

これは，工学的考察："抵抗のパワーが遠くで正になる様な電気回路網の電圧及び電流はある有界領域に入って来るであろう"の形式化である。もちろん，上の事実は無条件には成立しない。この問題と関連する Smale の予想 [1] は正しくない事も示す。上の事実はそれ自身面白いと思うし，力学系の分野で得られた多くの結果が適用可能になり得る点で大切だと思う。

定式化は [1] - [4] に従う。電気回路網の state space Σ は抵抗素子特性 Λ (closed submanifold) の Kirchhoff space K (linear subspace) による切り口 $\Sigma = \Lambda \cap K$ になっていて，ダイナミクスは

$$\pi^* G(X, \cdot) = \omega(\cdot)$$

で記述される。$\pi^* G$, ω は回路が与えられれば決定される。

[2] の仮定 (A) は standing assumption とする。

§2 エネルギー，パワーそして実質狭義受動性

簡単な例から話を始めたい。図1(a)の回路を考える。R_2以外は全て線形非結合とする。R_2はエサキダイオードで図1(b)の様な特性をもっている。R_1'とEをまとめてR_1とし，図1(c)の様な特性をもつものとする。

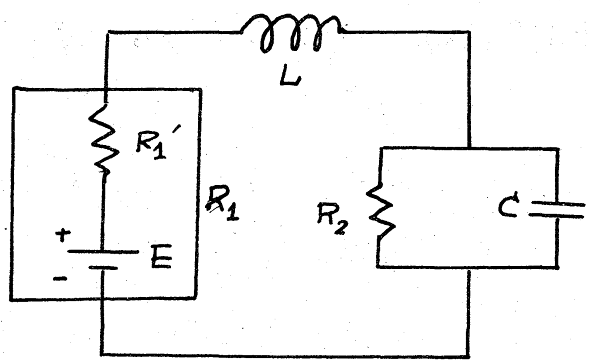

図1(a)

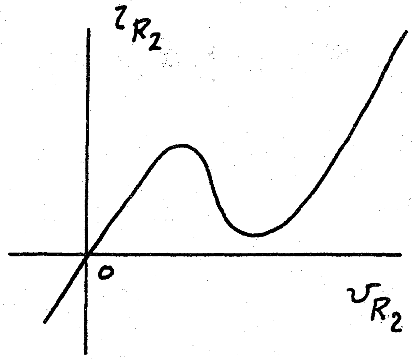

図1(b)

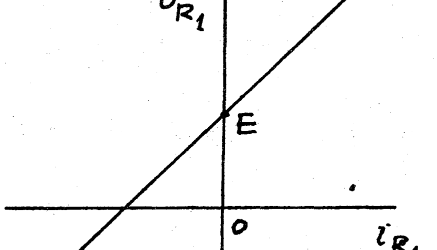

図1(c)

この回路は complete (π が大域的 diffeo.) である。π^{-1}, ω, G は各々次の様になる。

$$\pi^{-1}(v_c, i_L) = (v_{R1}, v_{R2}, v_C, v_L, i_{R1}, i_{R2}, i_C, i_L)$$
$$= (R_1' i_L + E, v_C, v_C, -v_C - R_1' i_L - E, i_L, i_L - f(v_C), i_L)。$$

$$\omega = (i_L - f(v_C))dv_C + (v_C + R_1' i_L + E)di_L$$

$$G = C\, dv_C \otimes dv_C - L\, di_L \otimes di_L.$$

従ってダイナミクスは次式となる。

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_L - f(v_C), \quad L\frac{di_L}{dt} = -v_C - R_1' i_L - E.$$

次にキャパシタとインダクタにたくわえられるエネルギーは

$$E(v_C, i_L) = \frac{1}{2}Cv_C^2 + \frac{1}{2}Li_L^2$$

抵抗のパワーは

$$W(v_C, i_L) = v_C f(v_C) + R_1' i_L^2 + E i_L$$

である。この時次式が成立する [1], [3]:

$$\frac{dE(v_C(t), i_L(t))}{dt} = -W(v_C(t), i_L(t)).$$

今，特別な場合として $C = 1$ (Farad), $L = 1$ (Henry), $R_1' = 0.25$ (Ohm), $E = 2.0$ (Volt), $i_{R2} = f(v_{R2}) = (v_{R2} - 1.7)^3 - 2(v_{R2} - 1.7) + 1.513$ (Volt) とする。図2に等エネルギー曲線，パワー，周期解及び平衡点が示してある。

$$W > 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^2 - \Omega$$
$$W = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

$$W < 0 \quad \text{on} \quad \mathrm{Int}\,\Omega$$

である。まず，平衡点は$\partial\Omega$に含まれる。$\partial\Omega$以外ではエネルギーが減少，あるいは増加しているからである。又，同期解上ではエネルギーが増えた分だけ減らなければならないのでΩへの出入をくり返す。ところでΩを含む最小の等エネルギー曲線　$E = 32$　の外側からのトラジェクトリーは必ず

$$\mathcal{E} = \{ (v_C, i_L) \mid E(v_C, i_L) \leq 32 \}$$

にすい込まれる。又，$\mathcal{E}$が不変集合である事も明らかである。以上の事から抵抗のパワーの性質が compact attractor の存在と密接に関連している事がわかる。抵抗のパワーが常に非負である回路を受動回路と呼んでいるから，上の様な性質をもった回路を"実質受動"回路と呼ぶ事は自然な印象を受ける。尚，上のΩは連結であるとは限らない。図3にその様な場合を示す．但し，$R_i' = 1.6\,(Ohm)$，$E = 4.0\,(Volt)$である。

である。

以上の事をふまえて形式化を行なう。ρ 個の抵抗，γ 個のキャパシタ，λ 個のインダクタを含む回路網を考える。R, C, L は各々，抵抗，キャパシタ，インダクタに関する変数である事を示す。$b=\rho+\gamma+\lambda$ とする。まず $\pi_R' : \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^\rho$ を射影

$$\pi_R'(v, i) = (v_R, i_R) \tag{2.1}$$

で定義し

$$\Lambda_R = \pi_R'(\Lambda) \tag{2.2}$$

とおく。$W_R' : \mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$W_R'(v_R, i_R) = \sum_{n=1}^{\rho} v_{Rn}\, i_{Rn} \tag{2.3}$$

で定義し，$W_R : \Lambda_R \to \mathbb{R}$ を

$$\Lambda_R \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathbb{R}^\rho \times \mathbb{R}^\rho \xrightarrow{W_R'} \mathbb{R} \tag{2.4}$$

で定義する。工学的考察により，W_R は抵抗のパワーである。W_R を Σ へ引き戻したもの：

$$W = W_R \circ \pi_R' \circ \imath \tag{2.5}$$

が重要な役割を演じる。$\imath = \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ は inclusion である。$E_{C,L} : \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$E_{C,L}(v_C, i_L) = \int_{I_C}^{v_C} \sum_{m,n=1}^{\gamma} C_{mn}(v_C')\, v_{Cm}'\, dv_{Cn}' + \int_{I_L}^{i_L} \sum_{m,n=1}^{\lambda} L_{mn}(i_L')\, i_{Lm}'\, di_{Ln}' \tag{2.6}$$

で定義する。Γ_C (Γ_L) は $\mathbb{R}^{\gamma}$ ($\mathbb{R}^{\lambda}$) の点 v_C (i_L) と原点とを結ぶ滑らかな曲線である。$C_{mn}(v_C')$, ($L_{mn}(i_L')$) は増分キャパシタンス行列（増分インダクタンス行列）であって対称正値である。もちろん (2.6) は Γ_C, Γ_L のとり方によらない。工学的考察から，(2.6) はキャパシタとインダクタにたくわえられるエネルギーである。

$$E = E_{C,L} \circ \pi \tag{2.7}$$

とおく。今，$\alpha(t)$ を回路網が成生する Σ 上の flow とすると

$$\frac{dE(\alpha(t))}{dt} = -W(\alpha(t)) \tag{2.8}$$

が成立する．[1], [3].

[定義] コンパクト集合 $\Omega \subset \Sigma$ があって

$$W > 0 \quad \text{on} \quad \Sigma - \Omega \tag{2.9}$$

が成立する時，この回路網を Ω に関して実質狭義受動という。

[結果1] 次の仮定をする。

(1) E は proper

(2) 回路網は，ある Ω に関して実質狭義受動．

この時

$$\alpha = \max_{\alpha \in \Omega} E(\alpha) \tag{2.10}$$

$$\mathcal{E} = \{\alpha \in \Sigma \mid E(\alpha) \leq \alpha\} \tag{2.11}$$

で定義される $\mathcal{E}$ (compact) は次の意味で attractor である:

$\alpha(0) \in \Sigma - \mathcal{E}$ に対して

(i) $t_1 > 0$ があって $\alpha(t) \in \mathcal{E},\ t \geq t_1$,

あるいは

(ii) $\lim_{t \to \infty} \alpha(t) \in \mathcal{E}$。

(注) $C_{mn}(v_c)$, $L_{mn}(i_L)$ は対称正値なので $E \geq 0$ である。上の条件(1)は工学的には極めて自然な条件である。それは，エネルギーが有限であれば回路網内の変数も有限である事を述べているからである。

[定義] コンパクト集合 $\Omega \subset \Sigma$ があって

$$\inf_{\alpha \in \Sigma - \Omega} W(\alpha) > 0 \qquad (2.12)$$

が成立する回路網を Ω に関して実質強受動という。

[結果2] 次の仮定をする。

(1) E は proper.

(2) 回路網は Ω に関して実質強受動.

この時，結果1の(i)のみが起る。

(注) 平衡点 $\subset \{\alpha \in \Sigma \mid W(\alpha) = 0\}$

さて実質狭義受動性や実質強受動性は抵抗のパワーに関する性質を Σ 上に引き戻して考えたものである。そこで自然に起る疑問は"抵抗素子特性のみを調べる事によって上の性質

を保証する事は可能か？”である。これと関連して Smale [1] は次の問題を提起している：

［問題］ π は global diffeo. とする。もしある $k>0$ に対して $\|(v_R, i_R)\|$ 十分大なる点で

$$W_R \geqslant k \sum_{n=1}^{\rho} \left(v_{R_n}^2 + i_{R_n}^2 \right) \qquad (2.13)$$

が成立すれば compact attractor は存在するか？

条件 (2.13) の工学的意味は明らかではないが，要するに (2.13) から (2.12) が出るかということであろう。しかし，次の例が示す様に，これは正しくない。

［例1］ 図4の回路を考える。素子は全て線形非結合で，値は全て1とする。Λ_R は1次元線形部分空間であって，原点以外の任意の点で

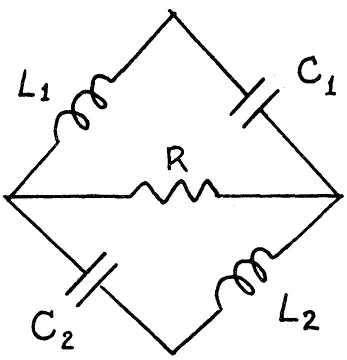

図 4

$$W_R = v_R i_R = v_R^2 = i_R^2 \geqslant k\,(i_R^2 + v_R^2)$$

$$0 < k < \frac{1}{2}$$

が成立する。この例では π が global diffeo. となり，ダイナミクスは次式で与えられる：

$$\left.\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= i_{L_1}, \qquad C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = i_{L_2} \\ L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} &= -v_{C_1} - R\,(-i_{L_1} + i_{L_2}) \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

$$L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} = -v_{C_1} + R(-i_{L_1} + i_{L_2}) \quad \Big\}$$

ところで任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} v_{C_1}(t) &= a \sin t, \quad v_{C_2}(t) = a \sin t \\ i_{L_1}(t) &= a \cos t, \quad i_{L_2}(t) = a \cos t \end{aligned} \qquad (2.15)$$

は(2.14)の解である。これは周期解であって compact attractor は存在しない。実際,

$$W = R(i_{L_2} - i_{L_1})^2$$

であって実質狭義受動性を満足するコンパクトなΩは存在しない。図5に様子を示してある。

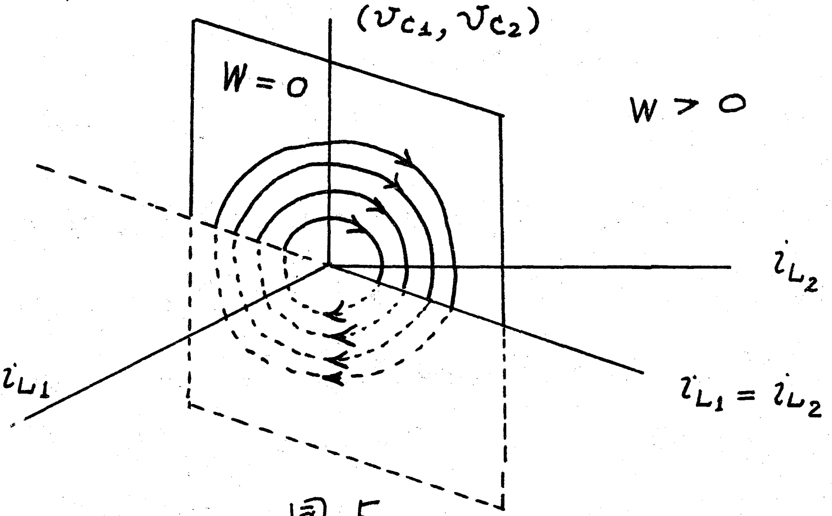

図5

以下, W_R の性質が W まで保たれる条件について考える。

[定義] コンパクト集合 $\Omega_R \subset \Lambda_R$ があって

$$W > 0 \quad \text{on} \quad \Lambda_R - \Omega_R$$

が成立する抵抗回路を Ω_R に関して実質狭義受動という。又

$$\inf_{(v_R,\, i_R)\in \Lambda_R - \Omega_R} W_R(v_R,\, i_R) > 0$$

が成立する時，Ω_Rに関して実質強受動という。

さて，(2.1)で定義したπ_R'を用いて

$$\chi = \pi_R' \circ \iota \qquad (2.16)$$

を定義する。求める条件は$\chi^{-1}(\Omega_R)$がコンパクトになる為の条件である．Kirchhoff space Kに対してχ_K及び inclusion ι_Kを図6の様に定義する。χ_Kがproper

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\iota_K"] & K \arrow[r, "\text{inclusion}"] \arrow[dr, "\chi_K"'] & \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \arrow[d, "\pi_R'"] & \\
& & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p & \supset \Lambda_R
\end{tikzcd}$$

図6

であれば$\chi = \chi_K \circ \iota_K$であるから，$\chi$もproperとなり，$\chi^{-1}(\Omega_R)$がコンパクトになる。次に$\chi_K$がproperになる為の十分条件を与える。回路の定義するlinear graphで全てのnodeを含み，loopを含まないsubgraphをtreeと呼ぶ。

［結果3］ 抵抗回路はΩ_Rに関して実質狭義(強)受動であるとする。もし，次の条件：

(条件B) (i) 抵抗のみからなるtree T_R^*が存在する.

(ii) キャパシタ及びインダクタを全て含むtree $T_{C,L}$が存在する.

が満たされていると，回路網も実質狭義(強)受動である。

(証明)　$K = \mathrm{Ker}\, B \times \mathrm{Ker}\, Q$　である[2],[3]，但しB及びQは基本ループ行列及び基本カットセット行列である。treeの電圧はKer Bの(global) coordinate になる。条件(B)(i)より，回路網内の全ての電圧 $v \in \mathrm{Ker}\, B$は v_Rの1次結合となる：

$$v = A_v \; v_R \tag{2.17}$$

又，cotree (tree の補集合)の電流はKer Qのcordinate となる。条件(B)(ii)より，$T_{C,L}$のcotree には抵抗しか含まれない。従って $i \in \mathrm{Ker}\, Q$ は i_R の1次結合で表現される：

$$i = A_i \; i_R \; . \tag{2.18}$$

さて χ_Kがproper である事を言うには

$$\|(v, i)\| \longrightarrow \infty \;, \; (v, i) \in K \Longrightarrow \|(v_R, i_R)\| \longrightarrow \infty$$

を示せばよい。しかしこれは(2.17),(2.18)より明らかである。最後にKはtreeの選び方によらないので結果が従う。

(証明終)

上の条件(B)は次のChua-Green [5]の条件と等価である。
"キャパシタ及びインダクタのみからなるカットセット及びループが存在しない"

実際に条件を調べる時は上の(B)の方が容易である事が多

い。結果3は要するに抵抗の数が沢山ある回路網では実質狭義(強)受動性が保たれる事を述べている。例えば図1(a)の回路では(B)が満足され，図4の回路では(B)(i)，(ii)共に満足されない。一方抵抗の全くない回路はHamiltonian systemになる。次に具体的にどの様な回路網がcompact attractorをもつか検討する。

［結果4］キャパシタ，インダクタ，Ebers-Mollモデル[6]によるトランジスタ，エサキダイオード，接合ダイオード，ツェナダイオード，線形非結合抵抗及び独立電圧源を含む回路網を考える。適当な電源変換により，独立電圧源は他の抵抗の中に含まれているものとする。次の条件を仮定する。

(1) Eはproper

(2) 条件(B)

この時回路網は実質強受動である。従ってcompact attractorをもつ。

この結果は比較的使い易い。例えば次の図の回路がcompact attractorをもつ事は殆んど自明である。但しトランジスタ以外は全て線形非結合とする。証明には[7, 8]の結果を用いる。

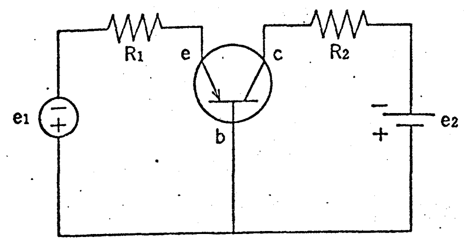

図 7 (a)

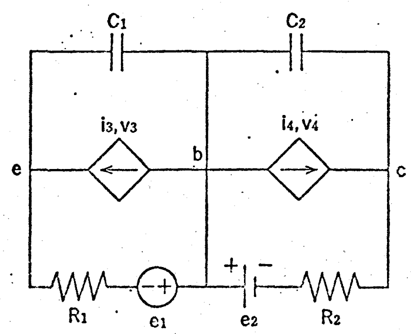

図 7 (b)

次に Smale の予想が成立する為の十分条件を与える。

[結果 5] 抵抗のパワーは (2.13) を満足しているとし，π は global diffeo. とする。次の条件を仮定する。

(1) キャパシタ及びインダクタは一様正値：

$$\langle v_c, (C_{mn}(v_c))\, v_c \rangle \geqslant \xi \| v_c \|^2,$$

$$\langle i_L, (L_{mn}(i_L)), i_L \rangle \geqslant \xi \| i_L \|^2, \quad \xi > 0.$$

(2) 条件 (B)

この時回路網は実質強受動，従って compact attractor が存在する。

[問題] complete な回路を考える。線形抵抗をいくつか加える事により，条件 (B) が満足され，かつ complete になる様にできるか？

[問題] ダイナミクスが $dx/dt = f(x)$ と書けているとする。回路が実質狭義受動であれば $\deg(f) = 1$? 従ってもし平衡点が全て非退化であれば平衡点の個数は奇数個。(これは我々の経験と良く一致する。

§3 混合ポテンシャル

回路網が相反であると，Σ上の関数 P があってダイナミクスは P の π^*G に関する gradient 系となる：

$$\pi^*G(X,\ \cdot) = dP(\cdot)$$

P は電気回路の混合ポテンシャルと呼ばれている：

$$P = \int \sum_{n=1}^{\rho} v_{Rn}\, di_{Rn} + \sum_{n=1}^{\gamma} v_{Cn}\, i_{Cn}$$

第1項は物理学に現われない量ではない[9]が，明確な特徴付けは行なわれていない。第2項はキャパシタのパワーである。従って P は妙な量になっている。逆に言えば，P は今迄の物理量では解釈できない新しい量であるといえる。一般に π^*G は positive definite ではないので，gradient 系であってもトラジェクトリーは複雑な様相を示す。図1の回路は相反であって P が存在する。図8に P の等高線と関連する諸量を示す。

残念ながら紙数がつきたので他の事柄については別の機会にゆずりたい。御討議いただいた平野哲，沢田賢，の両氏に感謝する。

References

[1] S. Smale, On the mathematical foundations of electrical cicuit theory, J. Differential Geometry, 7, 193−210, (1972)

[2] T. Matsumoto, On the dynamics of electrical networks, J. Differential Equations, May (1976)

[3] 松本，電気回路網のダイナミクスについて，数理研講究録 254，(1975)

[4] 川上，非線形相反回路網のスカラ値関数について．電子通信学会技術研究報告，CST 75−94 (1976)

[5] L. Chua and D. Green, Graph theoretical properties of nonlinear networks, Preprint

[6] J. Ebers. and J. Moll, Large signal behavior of junction transistors, Proc. IRE,

[7] 松本，佐藤，非線形回路網における実質受動性について，電子通信学会論文誌，to appear

[8] 松本，佐藤，非線形抵抗回路網の実質受動性と動作点の存在について，同上，to appear

[9] K. Takeyama and K. Kitahara, A theory of domain-and filament-formation due to carrier−

density fluctuations in conductors with negative differential resistance, J. Phys. Soc. Japan, 39, 125–131 (1975)

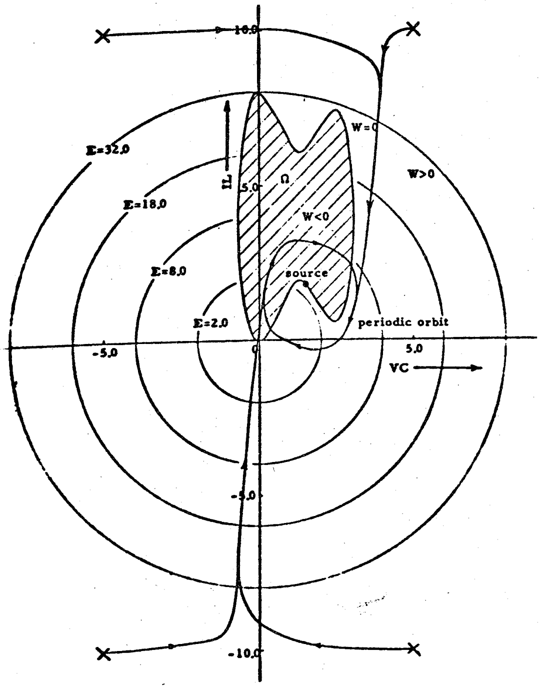
10.0
E=32.0
E=18.0
E=8.0
E=2.0
IL
5.0
Ω
W=0
W>0
W<0
source
periodic orbit
-5.0
5.0
VC
-10.0

图 2

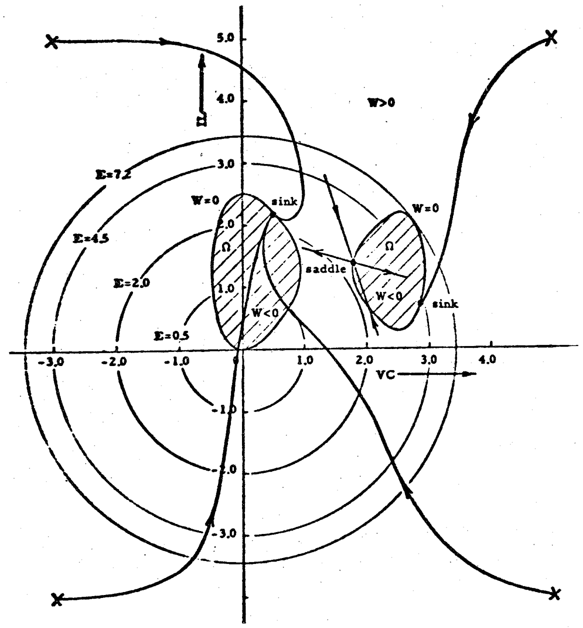
5.0
4.0
3.0
IL
W>0
E=7.2
E=4.5
E=2.0
E=0.5
W=0
sink
Ω
saddle
W<0
sink
-3.0
-2.0
-1.0
1.0
2.0
3.0
4.0
VC

图 3

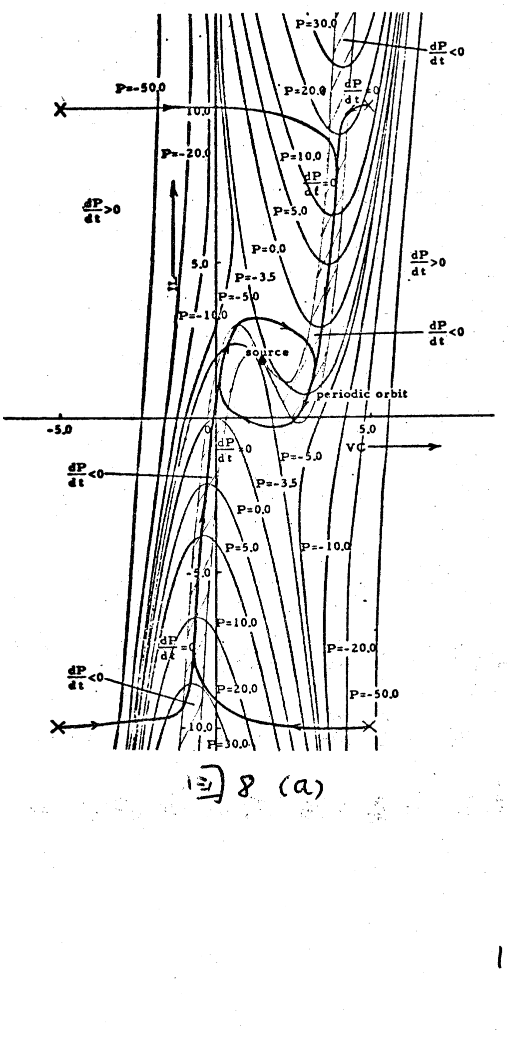
P=30.0
P=-50.0
P=20.0
P=-20.0
P=10.0
P=5.0
P=0.0
P=-3.5
P=-5.0
P=-10.0
source
periodic orbit
VC
P=-20.0
P=-50.0
P=20.0
P=30.0

图 8 (a)

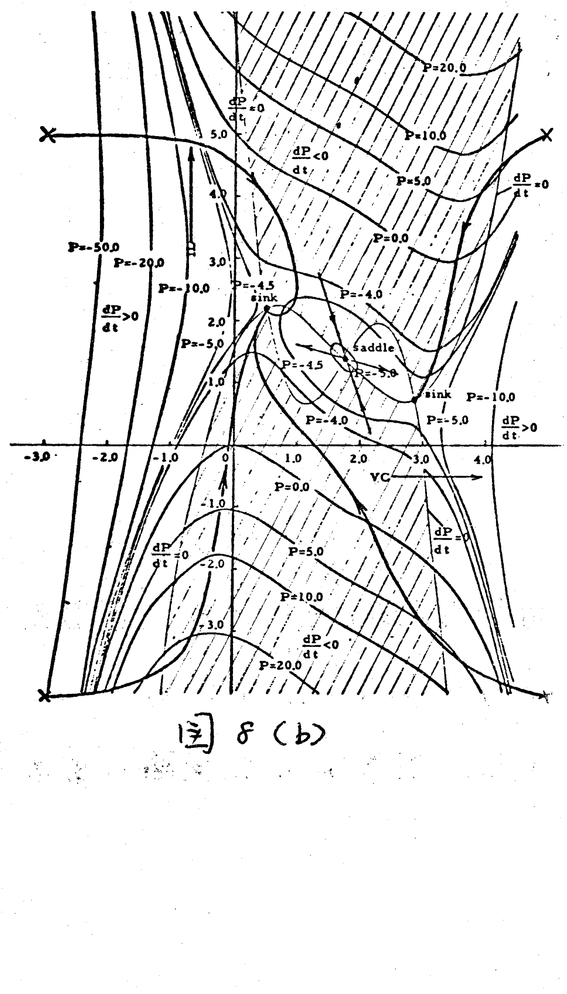
P=20.0
P=10.0
P=5.0
P=0.0
P=-50.0
P=-20.0
P=-10.0
P=-4.5
sink
P=-4.0
saddle
P=-5.0
P=-10.0
P=5.0
P=10.0
P=20.0
VC

图 8 (b)