数理解析研究所講究録
第 284 巻 1976 年 64-78

Stability of Periodic Time Dependent Dynamical Systems

名大 教養部　池上宜弘

§0.

Periodic time dependent dynamical system のある種の安定性，$\tilde{\Omega}\omega$-stability，を[1]に於て定義した．この小論では，この定義の必然性について少し詳しく説明し，[1]の結果を発展させた定理を述べる．

§1.

多様体 M 上の time dependent dynamical system とは次の形の方程式をいう．

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}. \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

以後，M は境界を持たない compact manifold とする．(1)は次の様な $M \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場 X と対応する．

$$X_{(x,t)} = (f(x,t), 1) \in T_x(M) \times T_t(\mathbb{R}) \approx T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}) \cdots\cdots (2)$$

(1)が $f(x,t)=f(x,t+1)$ をみたすとき，このsystemは周期1を持つという．M上の周期1を持つC^r級のtime dependent dynamical system全体が作る集合を$\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$で示すことにする．

(x_0,t_0)を初期値とする(1)の解

$$\varphi(x_0,t_0,\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow M \qquad (t\longmapsto \varphi(x_0,t_0,t))$$

を(x_0,t_0)から出るM上の軌道ということにする．$\varphi(x_0,t_0,t)$を$\varphi_t(x_0,t_0)$とも書く．$\varphi(x_0,t_0,\cdot)$の像を軌跡というが，軌道という言葉で軌跡を意味することもある．$\varphi(x_0,t_0,\cdot)$が周期軌道であるとは，実数$\underset{(\neq 0)}{\sigma}$が存在して任意の$t\in\mathbb{R}$に対して，$\varphi_{t+\sigma}(x_0,t_0)=\varphi_t(x_0,t_0)$が成立することである．周期軌道に対して，この$\sigma$は正数にとれる．この様な$\sigma$の最小正数$\sigma_0$をこの軌道の周期という．上の$\sigma$は$\sigma_0$の整数倍である．

$X\in\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$に対して$M\times S^1$上のautonomous system $\bar{X}$が次の様に定義される．$S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$と考えて，写像$\rho:M\times\mathbb{R}\longrightarrow M\times S^1$は$\rho(x,t)=(x,[t])\in M\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$により定義されるものとする．ただし，$[t]$は$t$を含む$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$のclassである．このとき，

$$\bar{X}_{(x,[t])}=(f(x,t),\ 1)\ \in T_x(M)\times T_{[t]}(S^1)\approx T_{(x,[t])}(M\times S^1)$$

により$\bar{X}$が与えられる．つまり，$\bar{X}$は$M\times\mathbb{R}$上のsystem Xを，$M\times S^1$上に最も自然に巻きつけて得られるものである．

$X \in \mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ の flow を $\Phi : (M\times\mathbb{R})\times\mathbb{R} \longrightarrow M\times\mathbb{R}$ であらわし，$\bar{X}$ の flow を $\bar{\Phi} : (M\times S^1)\times\mathbb{R}\longrightarrow M\times S^1$ であらわすことにする．$\pi_M : M\times\mathbb{R}\longrightarrow M$ 又は $\pi_M : M\times S^1 \longrightarrow M$ をM成分への射影とするとき，

$$\pi_M\circ\Phi(x,t_0,t) = \varphi(x,t_0,t) = \pi_M\circ\bar{\Phi}(x,[t_0],t)$$

が成立する．$\Phi(x,t_0,\cdot)$ を X の $M\times\mathbb{R}$上の軌道，その像を$M\times\mathbb{R}$上の軌跡といい，$\pi_M\circ\Phi=\varphi$ が周期軌道であるとき，Φ を$M\times\mathbb{R}$上の周期軌道という．

$X\in\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ に対し C^r微分同相写像 $T_X : M\to M$ が，$T_X(x)=\varphi_1(x,0)$ により定義される．$M_0 = M\times[0]\subset M\times S^1$ とすると，M_0は$\bar{X}$ の cross-section であるが，$M_0=M$と考えるとき，T_Xは$\bar{X}$に関するM_0上の Poincaré transformation と一致する．従って，以後T_XをX（又は$\bar{X}$）に対する Poincaré map と呼ぶことにする．任意の t に対して $\varphi(x,t_0,t)=x$ となる x をXの特異点といい，$\varphi(x,t_0,\cdot)$ が周期軌道であるとき，(x,t_0) は X の周期点という．

Proposition 1. x が T_Xの周期点．（不動点も含む．）

$\Longleftrightarrow$ $(x,0)$ が周期を有理数とするXの周期点，又はxが特異点．

$\Longleftrightarrow$ $(x,[0])\in M_0$を通る$\bar{X}$の軌道は閉軌道．

特に，$(x,0)$ の周期を $\frac{n}{m}$（既約分数）とするとき，x は n

を周期とする T_X の周期点である.

<u>Proposition 2.</u> $X, Y \in \mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ とし, 各々の Poincaré map を T_X, T_Y とするとき, 同相写像 T_X, T_Y は topologically equivalent であるならば, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ は topologically equivalent である.

<u>注意</u> ある境界を持たない compact manifold M に対し, 次の条件を持つ $X, Y \in \mathcal{P}^\infty(M\times\mathbb{R})$ が存在する; (i) $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ は topologically equivalent, (ii) T_X と T_Y は topologically equivalent ではない, (iii) T_X, T_Y は, Morse-Smale system である.

Proposition 1, 2 により, T_X の軌道の状態から X の軌道に関する情報がある程度得られる. N. Levinson は, ある種の X に関する Poincaré map T_X について, 特に T_X の周期点の数についてしらべている [4].

しかし, T_X の軌道の状態からは X の軌道の状態は十分には分らない. たとえば, x が T_X の不動点としても, $(x, 0)$ が X の周期点なのか特異点なのか分らない.

<u>例.</u> 2階微分方程式

$$x'' - A^2 x = \varepsilon \sin 2\pi t, \qquad x \in \mathbb{R},\ A \neq 0 \cdots\cdots (*)$$

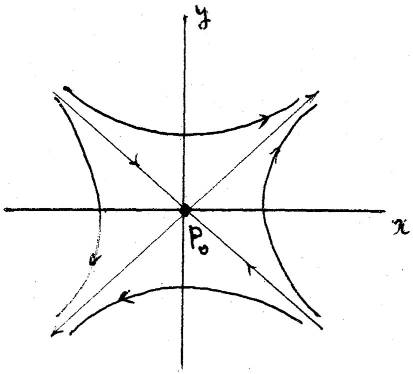
の一般解は

$$x(t) = c_1 e^{At} + c_2 e^{-At} - \frac{\varepsilon}{4\pi^2 + A^2} \sin 2\pi t$$

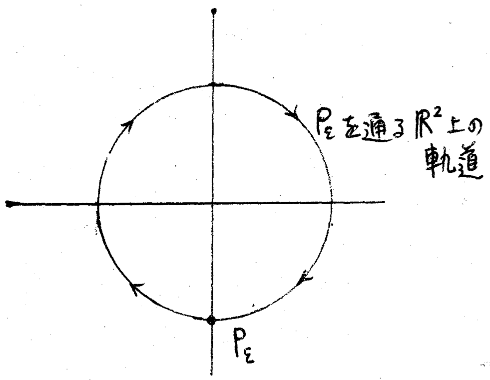
である. (*) は次の time dependent system $X_\varepsilon \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R})$ と同じである.

$$X_\varepsilon : \begin{cases} x' = y \\ y' = A^2 x + \varepsilon \sin 2\pi t \end{cases}$$

X_εのPoincaré mapをT_εとする．$\varepsilon = 0$のとき，T_0は唯1つの周期点(不動点)$P_0 = (0, 0)$を持つ．実は，P_0はhyperbolicな不動点であるから，εが十分小さければT_εはP_0の近傍にhyperbolicな不動点P_εを1つ持つはずである．P_εはT_εの唯1つの周期点である．故に，Poincaré mapに関して，P_0とP_εは全く同じ定性的性質を持つ．しかし，X_0とX_εに関しては，P_0は特異点であり，P_εは周期1の周期点である．



X_0



X_ε

P_0はT_0の安定な不動点であるが，P_0を$X_0 \in P^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$の特異点とすれば，$P_0$は安定とは云えない．

上の考察より，$X, Y \in P^r(M \times \mathbb{R})$に対して$\bar{X}, \bar{Y}$又は$T_X, T_Y$のtopological equivalenceはX, YのM上の軌跡の位相的状態を保存しない．ここで，X, YのM上の軌跡の位相的性質を保存するようなequivalenceをX, Yに対して定義する．

<u>定義 1</u>. $X, Y \in \mathfrak{P}^r(M\times\mathbb{R})$ が <u>equivalent</u> であるとは，同相写像 $h_0 : M \longrightarrow M$, $h : M\times\mathbb{R} \longrightarrow M\times\mathbb{R}$ が存在し，次の条件をみたすことである．

i) h は $M\times\mathbb{R}$ における X の軌跡を Y の軌跡に方向を保ってうつす．(すなわち，h は X, Y の topological equivalence.)

ii) $\pi_M h = h_0 \pi_M$. すなわち，次の図が可換である．

$$\begin{tikzcd}
M\times R \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M\times\mathbb{R} \arrow[d, "\pi_M"] \\
M \arrow[r, "h_0"] & M
\end{tikzcd}$$

iii) h は時間に関して周期 1 を持つ；

$$h(x, t+1) = (\pi_M h(x,t),\ \pi_{\mathbb{R}} h(x,t) + 1) \in M\times\mathbb{R}.$$

ただし，$\pi_{\mathbb{R}} : M\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 成分への射影である．

<u>Proposition 3</u>. X, Y が equivalent ならば，X の M 上の軌跡 $\varphi^X(x, t_0, \mathbb{R})$ の h_0 による像は Y の 1 つの軌跡 $\varphi^Y(y, s_0, \mathbb{R})$ となる．

<u>Proposition 4</u>. h が X から Y への equivalence で，軌跡 $\Phi^X(x, t_0, \mathbb{R})$ が h により軌跡 $\Phi^Y(y, s_0, \mathbb{R})$ へ写されるとき，$\Phi^X(x, t_0, \cdot)$ が有理数を周期とする周期軌道ならば，$\Phi^Y(y, s_0, \cdot)$ もそうである．その上，各々の周期を n_X/m_X, n_Y/m_Y (既約分数) とすれば，$n_X = n_Y$ である．従って，M 上の有理数を周期とする軌跡は h_0 により有理数を周期とする軌跡にうつされ，特異点

は特異点にうつされる．

定義1の equivalenceは，Proposition 3,4をみたす自然な equivalenceのうちで最も条件のゆるいものと思われる．

次に，無理数を周期とする周期軌道の様子を示しておく．実際に無理数を周期とする周期軌道を持つ $X \in P^r(M \times \mathbb{R})$ を作ることができる．又，有理数を周期とする $M \times \mathbb{R}$ 上の周期軌道 γ で，$\pi_M(\gamma)$ が単純閉曲線でないようなものを持つ X も作ることができる．

Proposition 5. $X \in P^r(M \times \mathbb{R})$，$\Phi$ を X の flow とする．γ が X の $M \times \mathbb{R}$ 上の軌道で無理数周期 σ を持つとき，次が成立する．

(i) $p \in \gamma$ に対して，写像 $[0, \sigma] \longrightarrow M$ $(t \longmapsto \pi_M \circ \Phi(p, t))$ の像 C は単純閉曲線となる．

(ii) $\pi_M^{-1}(C)$ の任意の点 q を通る軌道 γ_q も周期 σ を持ち，γ_q は $C \times \mathbb{R}$ に含まれる．

(proof) $\rho_*(X) = \bar{X}$ とし，$\Phi, \bar{\Phi}$ を各々 $X, \bar{X}$ の flow，φ は X の M 上の軌道とすれば，$(x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$ に対して，

$$\varphi_t(x_0, t_0) = \pi_M \circ \Phi_t(x_0, t_0) = \pi_M \circ \rho \circ \Phi_t(x_0, t_0)$$
$$= \pi_M \circ \bar{\Phi}_t(x_0, [t_0]). \quad (\pi_M : M \times S^1 \to M)$$

任意の点 $(x_0, t_0) \in \gamma$ に対して，$\therefore$ $\varphi_t(x_0, t_0) = \varphi_{t+s}(x_0, t_0)$ をみたす正数 s の最小数が σ である．$\rho(\gamma) = \bar{\gamma}$ は $\bar{X}$ の軌道で

ある．$\rho(x_0, t_0) = (x_0, [t_0]) \in \bar{\gamma}$ を p とおけば，$x_0 \times S^1$ 上には $\{\bar{\Phi}_{n\sigma}(p) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が dense に存在する．今 $0 < \tau < \sigma$ なる τ が存在して，$\pi_M \bar{\Phi}_\tau(p) = x_0 \ (= \pi_M(p))$ と仮定する．$\bar{\Phi}_\tau(p) = q$ とおけば，数列 $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ が存在して，$\lim_{i\to\infty} \bar{\Phi}_{n_i\sigma}(p) = q$．故に，

$$\bar{\Phi}_s(q) = \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_\tau(p) = \bar{\Phi}_s \lim_{i\to\infty} \bar{\Phi}_{n_i\sigma}(p) = \lim_{i\to\infty} \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_{n_i\sigma}(p).$$

従って，

$$\pi_M \bar{\Phi}_s(q) = \lim_{i\to\infty} \pi_M \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_{n_i\sigma}(p) = \pi_M \bar{\Phi}_s(q).$$

故に，

$$\pi_M \bar{\Phi}_\tau(\bar{\Phi}_s(p)) = \pi_M \bar{\Phi}_s(p).$$

これより，$\Phi_\tau \Phi_s(x_0, t_0) = \Phi_s(x_0, t_0)$ を得るが，$\Phi_s(x_0, t_0)$ は γ の任意の点としてよいから，$0 < \tau < \sigma$ より，この式は σ が γ の周期である事に矛盾する．故に (i) が証明された．(ii) も同様の方法で示される．

§2.

$P^r(M \times \mathbb{R})$ における安定性を考察するために，$P^r(M \times \mathbb{R})$ に位相を入れる．$M \times \mathbb{R}$ 上の C^r 級 vector 場の空間と考えて，$P^r(M \times \mathbb{R})$ には uniform C^r topology を入れる．もしも，Whitney topology を入れたら，$P^r(M \times \mathbb{R})$ は discrete space になる．

$T_{(x,s)}(M \times S^1) \approx T_x(M) \times T_s(S^1)$ を同一視して，

$$\mathfrak{X}_1^r(M \times S^1) = \{\bar{X} \in \mathfrak{X}^r(M \times S^1) \mid \bar{X}_{(x,s)} \text{ の } T_s(S^1) \text{成分} = 1\}$$

とする．これは，$M \times S^1$ 上の C^r vector 場全体の作る集合に C^r-topology を入れた空間 $\mathfrak{X}^r(M \times S^1)$ の部分空間である．写像 P：

$M\times R\to M\times S^1$ より写像 $\rho_*: P^r(M\times \mathbb{R})\to \mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$ が自然に得られる．すなはち，$\rho_*(X)=\bar{X}$，$X_{(x,t)}=(f(x,t),1)\in T_x(M)\times T_t(\mathbb{R})$ とするとき，$\bar{X}_{(x,[t])}=(f(x,t),1)\in T_x(M)\times T_{[t]}(S^1)$ である．$\rho_*: P^r(M\times \mathbb{R})\to \mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$ は同相写像である．

定義1の equivalence に関して (structurally) stable な system を一般の M の上に探すことは難しいようなので，自励系の Ω-stability に相当するものについて考えたい．$X\in P^r(M\times\mathbb{R})$ は微分方程式(1)に対応するものとし，φ, Φ を各々 M 上，$M\times\mathbb{R}$ 上の軌道とする．

定義2. 次の条件をみたす点 $x\in M$ を X 又は方程式(1)の wandering point という；　任意の $t_0\in\mathbb{R}$ に対して，x の 近傍 $U\subset M$ と自然数 n が存在して，$|t|>n$ なる任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $\varphi_t(U,t_0)\cap U=\phi$ が成立する．wandering point ではない点を non-wandering point という．non-wandering point 全体から成る集合を X の non-wandering set といい，$\omega(X)$ であらわす．

定義3. 次の条件をみたす $M\times\mathbb{R}$ の点 (x,t) の集合として，$\tilde{\Omega}(X)$ を定義する；　(x,t) の任意の 近傍 $U\subset M\times\mathbb{R}$ と任意の自然数 n に対して，整数 m，$|m|>n$，が存在して，$U_m\cap\Phi_m(U)\neq\phi$ となる．ただし，$U_m=\{(y,s+m)\mid(y,s)\in U\}$ とする．

M上又はM×R上の周期軌道や特異点は$\omega(X)$や$\tilde{\Omega}(X)$に含まれている．$\bar{X}\in\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$に対して，自励系$\bar{X}$のnon-wandering setを$\Omega(\bar{X})$であらわす．

<u>Proposition 6</u>.

(i) $\rho_*(X)=\bar{X}$とすれば，$\tilde{\Omega}(X)=\rho^{-1}(\Omega(\bar{X}))$である．従って，$\tilde{\Omega}(X)$はXのinvariant setである．

(ii) $\omega(X)=\pi_M(\tilde{\Omega}(X))=\pi_M(\Omega(\bar{X}))$．（ただし，$\pi_M$はM×R又はM×$S^1$からM上への射影である．$\pi_M(\Omega(\bar{X}))=\omega(\bar{X})$とおく．）

(iii) $\omega(X)\subset M$，$\tilde{\Omega}(X)\subset M\times\mathbb{R}$は閉部分集合である．

（注意）$\tilde{\Omega}(X)$の定義において，$m\in\mathbb{Z}$のかわりに$m\in\mathbb{R}$とすると，$\tilde{\Omega}(X)$は閉集合で$\pi_M(\tilde{\Omega}(X))=\omega(X)$はやはり成立するが，$\tilde{\Omega}(X)$はinvariant setでなくなる．

$\omega(X)$や$\tilde{\Omega}(X)$は特異点や周期軌道を含むことや，Proposition 6や上の注意から察して，$\omega(X)$や$\tilde{\Omega}(X)$の構造は定性的に重要であろうと考えられる．次に，定義1のequivalenceの概念をnon-wandering set上で定義する．

<u>定義4</u>．$X,Y\in\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$が<u>$\tilde{\Omega}\omega$-equivalent</u>であるとは，次の条件をみたす同相写像$h:\tilde{\Omega}(X)\longrightarrow\tilde{\Omega}(Y)$，$h_0:\omega(X)\to\omega(Y)$が存在することである；

(i) hは$X|\tilde{\Omega}(X)$と$Y|\tilde{\Omega}(Y)$のtopological equivalenceである．

(ii) $h_0\pi_M=\pi_M h$が$\tilde{\Omega}(X)$上で成立する．

(iii) h は時間に関して周期1を持つ.

$\tilde{\Omega}\omega$-equivalence を ρ や ρ_* を使って $\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$ 内に焼き直した概念として，次のものが定義される.

<u>定義5</u>. $\bar{X},\bar{Y}\in\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$ が <u>$\Omega\omega$-equivalent</u> であるとは，次の条件をみたす同相写像 $h:\Omega(\bar{X})\to\Omega(\bar{Y})$ と $h_0:\omega(\bar{X})\to\omega(\bar{Y})$ が存在することである；

$$\begin{array}{ccccc}\Omega(\bar{X}) & \xrightarrow{h} & \Omega(\bar{Y}) & \subset & M\times S^1\\ \downarrow\pi_M & \Omega & \downarrow\pi_M & & \\ \omega(\bar{X}) & \xrightarrow{h_0} & \omega(\bar{Y}) & \subset & M\end{array}$$

(i) $\pi_M h = h_0\pi_M$ が $\Omega(\bar{X})$ で成立.

(ii) 次の条件をみたす isotopy $H_s:\Omega(\bar{X})\to\Omega(\bar{Y})$, $s\in I$ が存在する；

(a) $H_0=h$, $H_1(\Omega(\bar{X})\cap M_0)=\Omega(\bar{Y})\cap M_0$, すなはち，$H_1$ は cross-section M_0 の部分を M_0 にうつす.

(b) 任意の $s\in I$ に対して，H_s は $\bar{X}|\Omega(\bar{X})$ と $\bar{Y}|\Omega(\bar{Y})$ の topological equivalence である.

<u>Lemma 1</u>. X,Y が $\tilde{\Omega}\omega$-equivalent ならば，$\rho_*(X)=\bar{X}$ と $\rho_*(Y)=\bar{Y}$ は $\Omega\omega$-equivalent である.

<u>Lemma 2</u>. $\Omega\omega$-equivalence は closed orbit の周期を保存する. すなはち，γ が $\bar{X}$ の closed orbit ならば $h(\gamma)$ も $\bar{Y}$ の closed orbit で，γ と $h(\gamma)$ の周期は等しい.

<u>定義6</u>. $X\in P^r(M\times\mathbb{R})$ が <u>$C^r\tilde{\Omega}\omega$-stable</u> であるとは，X の近傍 $N\subset P^r(M\times\mathbb{R})$ が存在して，任意の $Y\in N$ は X と $\tilde{\Omega}\omega$-equivalent であることである. $\bar{X}\in\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$ に対しても <u>$C^r\Omega\omega$-</u>

<u>stability</u>が同様に定義される．$\bar{X}$の近傍$N \subset \mathfrak{X}^r(M\times S^1)$が存在して，任意の$\bar{Y}\in N$に対して，$\bar{X}|\Omega(\bar{X})$と$\bar{Y}|\Omega(\bar{Y})$がtopologically equivalentであるとき，$\bar{X}$は<u>$C^r\Omega$-stable</u>であるという．

§3.

次に，Ωw-stabilityの特徴づけについて考えてみたい．MとS^1にRiemannian metric dとd'を任意に与えておく．

<u>定義</u>7. $\bar{X}\in\mathfrak{X}^r_1(M\times S^1)$に対し，$\Omega(\bar{X})$が$\pi_M$に関して<u>general position</u>にあるとは，次の条件がみたされることである．

(i) $\Omega(\bar{X})$に含まれる任意の軌道γに対し，$\pi_M|\gamma$は正則な写像である．

(ii) $\dim M \geqq 3$のとき，

(a) $K>0$が存在して，$\Omega(\bar{X})$に含まれる任意の異なる2点(x,s)，(y,t)に対して，次の式が成立する，

$$d(x,y) > K\cdot d'(s,t).$$

(ii') $\dim M = 2$のとき，

(b) $K>0$が存在して，$\Omega(\bar{X})$に含まれる任意の相異なる3点(x,s)，(y,t)，(z,u)に対して，次の式の少くとも1つが成立する；

$$d(x,y) > K\cdot d'(s,t),$$
$$d(y,z) > K\cdot d'(t,u),$$
$$d(z,x) > K\cdot d'(u,s).$$

(C) $\pi_M|\Omega(\bar{X})$に関する任意の2重点(x,s), (x,t)に対して, (x,s), (x,t)を通る$\bar{X}$の軌道をγ, γ'とするとき, $\pi_M(\gamma)$と$\pi_M(\gamma')$はxに於てtransversalに交わる.

(注意) (a)より$\pi_M:\Omega(\bar{X})\longrightarrow M$はself-intersectionを持たないことがわかり, (b)より$\pi_M:\Omega(\bar{X})\longrightarrow M$は3重点のself-intersectionを持たないことがわかる.

<u>Theorem</u> $X\in P^1(M\times R)$が$C^1\tilde{\Omega}w$-stableならば次のことが成立する.

(i) $P_*(X)=\bar{X}$は$C^1\Omega$-stable.

(ii) $\Omega(\bar{X})$がπ_Mに関してgeneral positionにある.

紙数の都合で, 証明は書かないが, 特にC^1級であることが必要となる部分を示すと, general positionの条件(i)を示すのに$C^1\Omega$-stabilityであることを使った. 又, C. C. Pughのgeneral density theorem [5], "周期点はΩの中で稠密であるという性質はC^1-topologyで生成的である" という結果と, J. Franksの "$C^1\Omega$-stableならば周期軌道は双曲型である" という結果[2]も定理の証明の中でC^1-topologyがきいた部分である. 他には, 特にLemma 1とLemma 2が本質的な部分である.

<u>Corollary</u> $X\in P^1(M\times R)$が自然数と異る周期の周期軌道又は特異点を持てば, Xは$C^1\tilde{\Omega}w$-stableではない.

(proof) γがXの周期軌道ならば, $\rho(\gamma)=\bar{\gamma}$は$\bar{X}$の軌道で

ある．γ の周期 σ が有理数ならば，$\bar{\gamma}$ は閉軌道だから $\bar{\gamma} \subset \Omega(\bar{X})$ である．σ が無理数ならば Proposition 5 により $\bar{\gamma} \subset \Omega(\bar{X})$ である．次に，σ が自然数でないとする．σ が無理数のときは，Proposition 5 により $\pi_M : \bar{\gamma} \to M$ の無限重点がある．$\sigma = n/m$（自然数の既約分数）であるとき，$\pi_M : \bar{\gamma} \to M$ は m 重点を持つ．故に $\dim M \geqq 3$ ならば，Theorem により X は $C^1 \tilde{\Omega} w$-stable ではない．$\sigma = n/2$ のとき，2重点しか存在しないが，この π_M の self-intersection に於て $\pi_M(\bar{\gamma})$ は transversal ではない．故に $\dim M = 2$ の場合も，Theorem により X は $C^1 \tilde{\Omega} w$-stable ではない．

Theorem の逆に関連して，次の予想を示しておく．

予想．$\dim M \geqq 3$，$X \in \mathcal{P}^r(M \times R)$，そして $r \geqq 2$ とし，次の条件がみたされているものとする．

(i) $\rho_*(X) = \bar{X}$ の Poincaré map $T_{\bar{X}}$ は Axiom A と no-cycle property をみたす．

(ii) $\Omega(\bar{X})$ が π_M に関して general position にある．

すると，X は $C^r \tilde{\Omega} w$-stable になる．

条件(i)により，$\bar{X}$ の perturbation $\bar{Y}$ に対して $T_{\bar{X}}$ と $T_{\bar{Y}}$ は Ω-equivalent，従って $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ は Ωw-equivalent となる．この Ω-equivalence，$h(\bar{Y}) : \Omega(T_{\bar{X}}) \to \Omega(T_{\bar{Y}})$ の性質は例えば J. Franks [3] 等によってしらべられているが十分ではない．$\bar{Y}$ が $\bar{X}$ の C^2-

perturvation のとき, $h(\bar{Y})$ が Lipschity topology で十分に恒等写像に近いことが, もし言えるならば, $\Omega(\bar{Y})$ も π_M に関して general position となる. 従って $\pi_M : \Omega(\bar{Y}) \to \omega(\bar{Y})$ も同想写像となり, このことから, X が $C^r\tilde{\Omega}$w-stable となる.

文献

[1] 池上宜弘, Periodic time dependent dynamical system について, 常微分方程式の定性的研究, 京都大学数理解析研究所講究録, 1976年5月.

[2] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. A.M.S. 158 (1971), 301–308.

[3] —, Differentiably Ω-stable diffeomorphisms, Topology 11 (1972), 107–113.

[4] N. Levinson, Transformation Theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. Math. 45 (1944), 723–737.

[5] C.C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010–1021.