数理解析研究所講究録
第284巻 1976年 84-95

非線形回路の数学的アプローチについて.

豊田工専　伊藤敏和

§0. はじめに

我々は，ここで非線形回路の方程式をある種の変分問題としてとらえようと思う。それはかって解析力学等でH.Poincaréのやったことを E.Cartan がより幾何学的に考察したように……。

けれどここでは F. Takens が 1974年にWarwickでのDynamical Systems のシンポジウムで話した内容をもとにして述べる。それは L.C. network についての回路方程式の解を変分問題の解としてとらえている。

---

(1) F. Takens ; Geometric Aspects of Non-linear R.L.C. Networks, Dynamical Systems — Warwick 1974.

(2) S. Smale ; On the mathematical foundations of electric circuit theory, J. Diff. Geometry 7 (1972) 193−210

(3) E. Cartan ; 外微分形式の理論

§ 1.

Gを L.C. network N のグラフとし, $e_1, \cdots e_n$ は capacitor branch, $e_{n+1}, \cdots, e_s$ は coil branch とする。

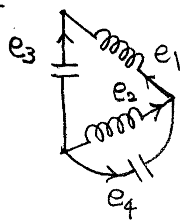
S. Smale が(2)でやったようにかくと

$$(1)\ \begin{cases} \partial ;\ C_1(G;\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(G;\mathbb{R}) \\ \partial^* ;\ C^0(G;\mathbb{R}) \longrightarrow C^1(G;\mathbb{R}) \end{cases}$$

なる記号のもとに Telegen の定理は $\mathrm{Im}\,\partial^*(\mathrm{Ker}\,\partial)=0$ となる。$V_0=\mathrm{Ker}\,\partial$ とおいて, 我々は V_0 を Kirchhoff space という。

我々は(1)をより抽象的にあつかう。それは次のようである。W を $e_1, e_2, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_s$ を base にもつ $\mathbb{R}$上の s-dim. vector space とする。そして V_0 を W の vector subspace とする。又, W^* を W の dual space, $V_0^{\perp}$ を V_0 の直交補空間とする。

例



$$W \ni w = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i$$

$$V_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i \in W \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \end{matrix} \right\}$$

だから V_0 の coordinate は $\beta_1=\alpha_1|_{V_0}$, $\beta_2=\alpha_2|_{V_0}$ ととれる。i.e. $(\beta_1, \beta_2)\in V_0$ は W 内では

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - \beta_1 e_3 + (\beta_1-\beta_2)e_4$$

$W^*/V_0^{\perp}$ の coordinate は $\partial^*\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i^*\right) = (\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2, \alpha_4-\alpha_2)$ となる。

$$(2)\begin{cases} \partial\,;\, W \longrightarrow W/V_0 & \textit{canonical projection} \\ \partial^*\,;\, W^* \longrightarrow W^*/V_0^{\perp} & \text{"} \end{cases}$$

として，∂，∂^*を定義する。　さらに，我々は回路の方程式を求めるために記号を準備する。

$$C_i\,;\, \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad (1 \leqq i \leqq n) \quad \textit{smooth function}$$
$$L_j\,;\, \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad (n+1 \leqq j \leqq s) \quad \text{"}$$

さらに，正の定数 a_i，a_j が存在して，$C_i > a_i$，$L_j > a_j$ を満たすと仮定する。

<u>定義 1.</u>

L.C. 回路 N の解とは次の性質をみたす smooth maps $(I(t), V(t))$ である。

$$I\,;\, \mathbb{R}^1 \longrightarrow W \quad , \quad I(t) = \sum_{i=1}^{s} I_i(t) e_i$$
$$V\,;\, \mathbb{R}^1 \longrightarrow W^* \quad , \quad V(t) = \sum_{i=1}^{s} V_i(t) e_i^*$$

であり以下の関係式 (a)，(b) をみたす。

(a) $\partial I \equiv 0 \quad , \quad \partial^* V \equiv 0$

(b) (イ) $\dfrac{dV_i}{dt} = \dfrac{1}{C_i(V_i)} I_i \qquad 1 \leqq i \leqq n$

(ロ) $V_j = L_j(I_j) \dfrac{dI_j}{dt} \qquad n+1 \leqq j \leqq s$

次に我々は上で定義した回路の方程式をある種の変分問題の解としてとらえるために，記号を導入する。

$$E_i ; \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad \text{smooth map} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

$$K_j ; \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad \text{smooth map} \qquad (n+1 \leqq j \leqq s)$$

を次のように定義する。

$$E_i(0) = E_i'(0) = 0 , \quad E_i''(u) = \frac{1}{C_i(y(u))} , \quad \forall u \in \mathbb{R}^1$$

$$K_j(0) = K_j'(0) = 0 , \quad K_j''(u) = L_j(u) , \quad \forall u \in \mathbb{R}^1$$

ここで，yは次のようにして定義された函数である。

$g_i(u) = \int_0^u C_i(t)dt$ と定義すると $C_i(t) > a_i > 0$ より $g_i'(u) > 0$ だから global に逆函数が定義できる。それを y とおく。i.e. $g_i(y(u)) = u$, $y(g_i(u)) = u$.

さらに，我々は capacitor のところでは電荷量 $Q_i(t)$ と電流 I_i との間に $\frac{dQ_i}{dt} = I_i$ なる関係があることに注意して以下のようなものを考える。

定義2. $Q ; \mathbb{R} \longrightarrow W$ smooth map

$Q(t) = \sum_{i=1}^{s} Q_i(t) e_i$ で次の性質をもつ

$$(A) \begin{cases} (1) \quad \partial\left(\sum_{i=1}^{s} Q_i'(t) e_i \right) \equiv 0 \\ (2) \quad \partial^*\left(\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i(t)) e_i^* + \sum_{j=n+1}^{s} K_j''(Q_j'(t)) \cdot Q_j''(t) e_j^* \right) \equiv 0 \end{cases}$$

(注意)

$Q_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ は電荷量として物理的な意味はあ

るが，$Q_j(t)$ $(n+1 \leqq j \leqq s)$ は $\frac{dQ_j}{dt}=I_j$ とみた時に意味があるゆえ，回路の方程式の解とみようとするとき定数項の自由度がでる。

ここで，我々は定義１と定義２の関係をみる。

まず，I, V が定義１によって決められたものとする。このとき $Q_i(t)=\int_0^{V_i(t)} C_i(t)dt$ $(1 \leqq i \leqq n)$ と定義し，$Q_j(t)$ $(n+1 \leqq j \leqq s)$ を $\frac{dQ_j}{dt}=I_j$ の解として定義する。定数項は任意に決める。すると $Q_i'(t)=C_i(V_i(t))\cdot V_i'(t)=I_i(t)$ となる。だから $\partial I\equiv 0$ より (A)の(1)がいえる。一方 $\frac{dV_i}{dt}$

$$\equiv \frac{1}{C_i(V_i)} I_i = E_i''(Q_i(t))\cdot Q_i'(t) = \left(E_i'(Q_i(t))\right)'$$

$\therefore$ $V_i(t)=E_i'(Q_i(t))$ となる。又 $V_j(t)\equiv L_j(I_j(t))\frac{dI_j}{dt}$

$$= K_j''(Q_j'(t))\,Q_j''(t)$$ となるから，(A)の(2)がいえる。

よって定義１ならば定義２がいえた。逆に $Q(t)$ が定義２をみたすとする。この時 $I_i=Q_i'$，$I_j=Q_j'$ とおき，$V_i(t)=E_i'(Q_i(t))$，$V_j(t)=K_j''(Q_j'(t))\,Q_j''(t)$ とおけば，明らかに(a), (b)を満足する。よって定義２ならば定義１がいえた。

以上をまとめると，定義１と２とはある意味で同値であるそれは $(s-n)$ 次元の自由度を無視すればである。このことは後でも一度ふれることにする。

(記号) $W_C = \{\{e_1, \cdots, e_n\}\}$, $W_L = \{\{e_{n+1}, \cdots, e_s\}\}$ なる W の subspace とする。 $c \in W/V_0$ に対して $\partial^{-1}(c) = V_c$ とおく。

そこで今 Q が定義2 をみたしたとすると，(A) の (1) から $\partial(Q(t)) = c \in W/V_0$ (constant) になるから，$Q(\mathbb{R}^1) \subset V_c$ となる。一方 (A) の (2) より $\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i(t))e_i^* + \sum_{j=n+1}^{s} K_j''(Q_j'(t)) \cdot Q_j''(t)\, e_j^* \in V_0^\perp$. だから $\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i(t))e_i^* \in W_C^\perp + V_0^\perp \subset (W_C \cap V_0)^\perp$.

__定義3__

$$W \supset S = \left\{ \sum_{i=1}^{s} q_i e_i \in W \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} E_i'(q_i)e_i^* \in (W_C \cap V_0)^\perp \right\}$$

とおく。

__Lemma 1__

S は smooth submanifold of W, $p \in S$

$T_p(S) \oplus (W_C \cap V_0) = W$

__定義4__

$\mathcal{L}_*;\ T(W) \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように決める。

$$\mathcal{L}_*(q_1, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_s) = \sum_{i=1}^{n} E_i(q_i) - \sum_{j=n+1}^{s} K_j(\dot{q}_j)$$

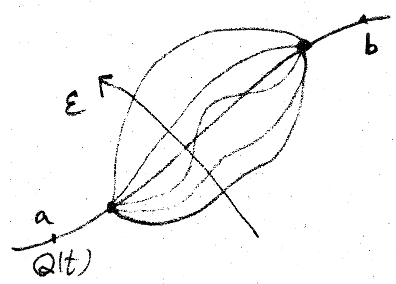
__Theorem 2__

$c \in W/V_0$, $Q;\ \mathbb{R} \longrightarrow (S \cap V_c) \subset W$ smooth map.

Q が (A) の解 $\Longleftrightarrow$ Q が $(\mathcal{L}_*, S \cap V_c)$ の変分問題の解.

（証明）

$$\tilde{Q}(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{s}\tilde{Q}_i(t,\varepsilon)e_i\in S\cap V_c$$



は次の性質をもつものとする。

$$\tilde{Q}(t,0)=Q(t)$$

$$\tilde{Q}(t,\varepsilon)=Q(t)\quad \text{if } t\notin K$$

ただし K は $\mathbb{R}^1$ の compact interval.　$(a,b)\supset K$ とする.

$$F(\varepsilon)=\int_a^b \mathcal{L}_*(\tilde{Q}(t,\varepsilon),\tilde{Q}'(t,\varepsilon))dt \qquad \left(\text{ただし } ' \text{ は } \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

とおく。

$$F'(0)=\frac{dF}{d\varepsilon}(0)=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{m}E_i'(Q_i(t))\frac{\partial\tilde{Q}_i}{\partial\varepsilon}(t,0)+\sum_{j=1}^{s}K_j''(Q_j(t))Q_j''(t)\frac{\partial\tilde{Q}_j}{\partial\varepsilon}\right)dt$$

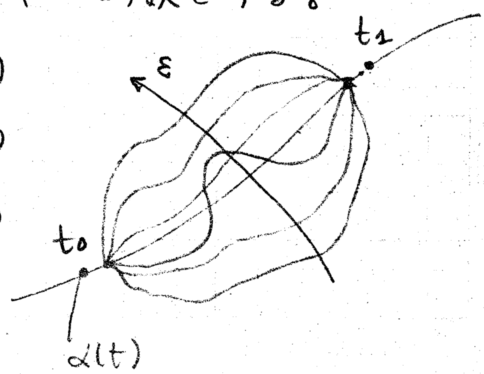
となる。

よく知られている質点系の運動の決定を変分法の問題の解決に帰着させることを思いおこそう。

一つの力の函数から導かれる力を受けている自由質点の場合を考える。

$U=U(x,y,z,t)$ はポテンシャル函数とする。

$$\alpha(t,\varepsilon).\begin{cases}x=x(t,\varepsilon)\\ y=y(t,\varepsilon)\\ z=z(t,\varepsilon),\end{cases}\qquad \alpha(t).\begin{cases}x(t)=x(t,0)\\ y(t)=y(t,0)\\ z(t)=z(t,0)\end{cases}$$



まずQが(A)の解とする。定義3の前で述べたことより，$Q(\mathbb{R}^1) \subset S \cap V_c$. そして，上で定義した $\widetilde{Q}(t,\varepsilon) \in S \cap V_c$ $(\forall(t,\varepsilon))$ は $\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon) \in V_0$ となることから，$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t,0) e_i + \sum_{j=n+1}^{s} \frac{\partial \widetilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t,0) e_j \in V_0$，一方(A)の(2)より $\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i(t)) e_i^* + \sum_{j=n+1}^{s} K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) e_j^* \in V_0^{\perp}$ より，$\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i(t)) \frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial \varepsilon} + \sum_{j=n+1}^{s} K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) \cdot \frac{\partial \widetilde{Q}_j}{\partial \varepsilon} \equiv 0$. よって $F'(0) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(0) = 0$ となり，Qは$(\mathcal{L}_*, S \cap V_c)$の解である。

逆にQが$(\mathcal{L}_*, S \cap V_c)$の変分問題の解とせよ。任意の$\widetilde{Q}(t,\varepsilon) \in S \cap V_c$ に対して $F'(0) = 0$ がいえる。

作用量Fを考える。

$$F(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right] dt$$

ここで，mは質量を x', y', z' はそれぞれ $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ を表わすとする。我々は $F'(0) = \frac{dF}{d\varepsilon}(0)$ を求める。

$$F'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \right] dt.$$

すなわち，$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i(t)) \frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t,0) + \sum_{j=n+1}^{s} K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) \cdot \frac{\partial \widetilde{Q}_j}{\partial \varepsilon} \right)$
$dt = 0$. だから

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i(t)) \frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t,0) + \sum_{j=n+1}^{s} K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) \frac{\partial \widetilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t,0) \equiv 0$$

が任意の $\widetilde{Q}_i(t,\varepsilon) \in S \cap V_c$ に対して成立する。$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial \varepsilon}(t,0) \in V_0$ になることと S の定義に注意すれば $\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial \varepsilon}(t,0)$ を $W_c \cap V_0$ にとって，かってに $W_c \cap V_0$ 内をうごかす。

$$\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_j(t)) \frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t,0) \equiv 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_j(t)) e_i^* \in (W_c \cap V_0)^{\perp}$$

一方 $Q(\mathbb{R}^1) \subset S$ より $\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i) e_i^* \in (W_c \cap V_0)^{\perp}$ が成立するから，(*) は $\sum_{j=n+1}^{s} K_j''(Q_j') Q_j'' \frac{\partial \widetilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t,0) \equiv 0$

ゆえに

$$F'(0) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ m \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ m \cdot \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$ がいえる。

さらに，これを次のように書きなおす。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', & m \cdot \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{dy}{dt} = y', & m \cdot \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{dz}{dt} = z', & m \cdot \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

となる。又 $\sum_{j=n+1}^{s} \frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t,0)\, e_j \in W_L \cap V_0$ より,

$$\sum_{j=n+1}^{s} K_j''(Q_j)\, Q_j'' \cdot e_j^* \in (W_L \cap V_0)^{\perp}$$

よって $\sum_{i=1}^{n} E_i'(Q_i)\, e_i^* + \sum_{j=n+1}^{s} K_j'(Q_j)\, Q_j'\, e_j^* \in V_0^{\perp}$

ゆえに,Q は (A) の解である。 (q.e.d)

ここで我々は p4〜5 にかけて注意したことにもどろう。それは変分問題の解としてとらえるために,物理的な意味はないけれども $Q_j(t)$ $(n+1 \leqq j \leqq s)$ を導入した。他方 $Q_i(t)$ $Q_i'(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$,$Q_j'(t)$ $(n+1 \leqq j \leqq s)$ は回路から決まる。

また $T(\mathbb{R}^3) \longrightarrow T^*(\mathbb{R}^3)$ の対応が $X = a_1(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + a_3(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$ に対して $\omega = m\, a_1(x,y,z)dx + m\, a_2(x,y,z)dy + m\, a_3(x,y,z)dz$ をとるようになっていることに注意すれば $T^*(\mathbb{R}^3)$ 上の coordinate (x, y, z, p_1, p_2, p_3) に対して,

$$X = \frac{p_1}{m}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{p_2}{m}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{p_3}{m}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial}{\partial p_3}$$

なる $T^*(\mathbb{R}^3)$ 上の vector field を定義する。 一方,$T^*(\mathbb{R}^3)$ には自然な symplectic structure $\Omega = dx \wedge dp_1 + dy \wedge dp_2 + dz \wedge dp_3$ が入る。すると $X \lrcorner\, \Omega = d\left[\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U\right]$ となることから,X は Hamilton vector field になる。

($p_1 = mx'$, $p_2 = my'$, $p_3 = mz'$ より $\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U$
$= \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U$ となる。)

そこで，我々は次のようなものを考える。

$$T(W) \supset \mathcal{S} = \{ (q, \dot{q}) \in T(W) \mid q \in S,\ (q, \dot{q}) \in T(S \cap V_{\partial q}) \}$$

さらに $\mathcal{S}$ に次のような同値関係を入れる。

$(q, \dot{q}), (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \in \mathcal{S}$ に対して $(q, \dot{q}) \sim (\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ とは，

$q_i = \bar{q}_i \quad (1 \leqq i \leqq n), \qquad \dot{q}_k = \dot{\bar{q}}_k \quad (1 \leqq k \leqq s)$

そして $\mathcal{S}/\sim = \tilde{\mathcal{S}}$ を考えると，上で注意した物理的に意味のないところが無視される。

次に $(q, \dot{q}) \in \mathcal{S}$ に対して $Q; (U, 0) \longrightarrow (W, q)$ を方程式(A)の解とする。ただし $0 \in U \subset \mathbb{R}^1$, $Q(0) = q$, $Q'(0) = \dot{q}$.

そして，$X(q, \dot{q})$ は $t \longrightarrow (Q(t), Q'(t)) \in \mathcal{S}$ で定義される $\mathcal{S}$ 上の vector field とし，それを $\tilde{\mathcal{S}}$ 上に自然に projection したものを $\bar{X}$ とかけば，次の命題が成立する。

Proposition 3

$\bar{X}$ の integral curves と方程式(A)の解とは1対1に対応する。

Theorem 4

$\tilde{\mathcal{S}}$, $\bar{X}$ を上記のようとする。

$I; \tilde{\mathcal{S}} \longrightarrow (W/V_0)/\partial W_L \oplus (W_L \cap V_0)^*$ を下記のように定義すると。次のことがいえる。

(1) $\bar{X}$ の積分曲線を $\lambda; \mathbb{R}^1 \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ とすれば $I \circ \lambda$ は定数である。(i.e. I は $\bar{X}$ の first integrable である。)

(2) 各 $(c_1, c_2) \in \left({(W/V_0)}/{\partial W_L} \right) \oplus (W_L \cap V_0)^*$ に対して, $I^{-1}(c_1, c_2)$ は自然な symplectic structure をもち, $\bar{X}\big|_{I^{-1}(c_1, c_2)}$ はこの symplectic structure に関して Hamiltonian vector field である。

I の定義.

$[(\gamma, \dot{\gamma})] \in \tilde{\mathcal{L}}$, $(\gamma, \dot{\gamma}] \in \mathcal{L}$ に対して $\partial\gamma \bmod \partial W_L$ でもって $(W/V_0)/\partial W_L$ の元を定義する。

また $-\sum_{j=n+1}^{s} K_j'(\dot{\gamma}_j) e_j^*\Big|_{W_L \cap V_0} \in (W_L \cap V_0)^*$ を対応させる。

最後に

(3) $\dim\left((W/V_0)/\partial W_L \oplus (W_L \cap V_0)^* \right) = h_\lambda + h_\lambda^*$

$\dim\left(I^{-1}(c_1, c_2) \right) = 2(h - h_\gamma - h_\lambda) = 2(h^* - h_\gamma^* - h_\lambda^*)$

が成立する。

ただし, $h = \dim(V_0)$ (i.e $\dim H_1(G; \mathbb{R})$), $h_\gamma = \dim(V_0 \cap W_c)$ (i.e. $\dim H_1(G_c; \mathbb{R})$), $h_\lambda = \dim(V_0 \cap W_L)$ (i.e. $\dim H_1(G_L; \mathbb{R})$) とおく。又 $h^*, h_\gamma^*, h_\lambda^*$ は dual なもの。