数理解析研究所講究録
第284巻 1976年 171-185

Dissipative Periodic Systems (Levinson-Massera の等式)

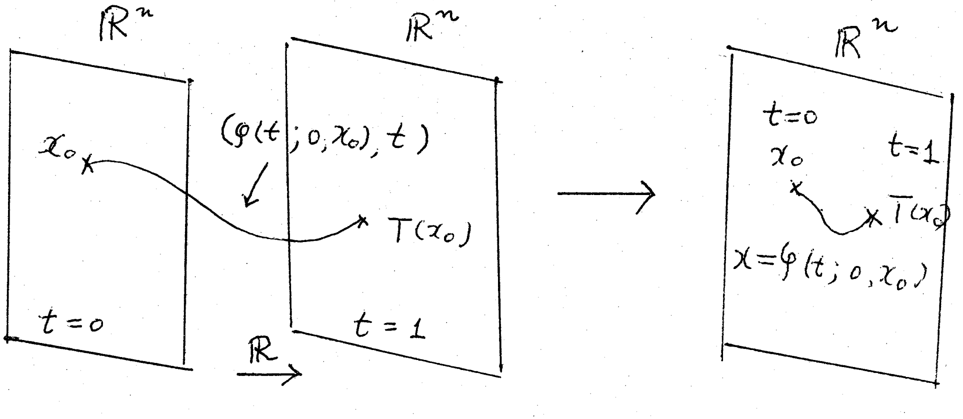
名大 教養部　白岩謙一

§1. 次のような微分方程式を考える.

(1)　$\dot{x} = f(t,x)$,　$t \in \mathbb{R}$,　$x \in \mathbb{R}^n$

ここで, $f(t,x)$ は C^1 級の $\mathbb{R}^n$ に値をとる関数で, t に関して周期1の周期関数であるとする. そして, さらに, 方程式(1)は任意の初期条件 $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ に対して, その解の最大存在区間が $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ となるものとする. そして, このような解を $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ と表わす.

いま写像 $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $T(x_0) = \varphi(1; 0, x_0)$ と定義する. これを方程式(1)の Poincaré 変換という.



<u>命題1</u>　TはC^1級微分同相写像で，恒等写像とisotopicである．したがって，特にorientationを保つ．

<u>証明</u>　Tが全単射で$T^{-1}(x_0)=\varphi(0;1,x_0)$となる．また，$f(t,x)$が$C^1$級だから，$T$と$T^{-1}$は$C^1$級である．すなわち，$T$は$C^1$級微分同相写像である．

次に，$T_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$　$(0\leqq t\leqq 1)$を$T_t(x_0)=\varphi(t;0,x_0)$と定義すると，これは$C^1$級微分同相写像で$T_0=1_{\mathbb{R}^n}$（恒等写像）$T_1=T$となる．そして，$T_t$の定義する写像$\mathbb{R}^n\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$は$C^1$級である．すなわち，$T$は$1_{\mathbb{R}^n}$とisotopic．

<u>命題2</u>　$\varphi(t+1;0,x_0)=\varphi(t;0,T(x_0))$，$t\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}^n$

<u>証明</u>　$x(t)=\varphi(t+1;0,x_0)$が(1)の解であることが$f(t,x)$のtに関する周期性からわかる．そして$x(0)=\varphi(1;0,x_0)=T(x_0)$と解の一意性から上の等式が得られる．

<u>系1</u>　$\varphi(t+k;0,x_0)=\varphi(t;0,T^k(x_0))$，$k\in\mathbb{Z}$

<u>系2</u>　(1)の解$x(t)$が周期k（kは自然数）の周期解

$\rightleftarrows$　$x(0)$がT^kのfixed point

$\rightleftarrows$　$x(0)$がTの周期kのperiodic point

<u>注意1</u>　周期が有理数の周期解$x(t)$に対して，$x(0)$はTの周期点である．

<u>注意2</u>　周期が無理数の周期解$x(t)$に対して，$x(0)$はTのrecurrent pointである．したがって，特にnon-wandering

である.

<u>定義</u> $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$の不動点$p$に対して,その微分(ヤコビ行列)を$DT(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$とする いま$DT(p)$の固有値の絶対値がすべて1と異なるとき,$p$を$T$のhyperbolic(双曲型)不動点という.

$DT(p)$の固有値の絶対値がすべて1より大きいとき,pをsourceといい,これらがすべて1より小さいとき,pをsinkという.また,絶対値が1より大きいものと1より小さいものの両方が存在するとき,pをsaddleという.

$n=2$のとき,$\det DT(p)>0$(命題1からわかる)に注意すると,hyperbolicな不動点は次の4種類である.

$DT(p)$の固有値(特性根)をλ_1, λ_2とする

(a) $|\lambda_1|>1$, $|\lambda_2|>1$ completely unstable (source)

(b) $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$ completely stable (sink)

(c) $0<\lambda_1<1<\lambda_2$ directly unstable (saddle)

(d) $\lambda_2<-1<\lambda_1<0$ inversely unstable (saddle)

Tの周期点pに対しても,その最小周期kを用いて,T^kの不動点と考え,pがT^kのhyperbolicな不動点のとき,これをTのhyperbolic periodic pointと定義する.そして,source, sink, saddle等が不動点の場合と同様に定義される.

以下簡単のため，不動点についてのみ考察するが，周期点の場合も同様なことが成立する．

いま，p を T の不動点とする．このとき，$DT(p)$ は次のようにして求めることができる．

(1) の解 $x=\varphi(t;0,p)$ は周期1の周期解である．そこで，(1) の $\varphi(t;0,p)$ に関する変分方程式を考える．

(2) $\quad \dot{x} = D_x f(t,\varphi(t;0,p))\,x$

ここで，$D_x f(t,x)$ は $f(t,x)$ の x に関する偏微分（ヤコビ行列）である．

(2) は仮定から，周期1の連続な周期関数を係数にもつ線形常微分方程式である．そこで，この基本行列を $W(t)$ とすると，次の命題が成立する．

<u>命題3</u> $\quad DT(p) = W(1)\,W(0)^{-1}$

<u>証明</u> 変分方程式の定義と，T の定義から容易に確かめられる．

<u>命題4</u> p が hyperbolic $\rightleftarrows$ (2) の characteristic exponents はすべてその real parts が0でない．

<u>証明</u> Floquet 理論を用いてわかる．

<u>定義</u> $p \in \mathbb{R}^n$ を T の hyperbolic な不動点とする．いま，$L = DT(p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の絶対値が1より大きい固有値に対する一般化された固有空間の直和と $\mathbb{R}^n$ の共通部分を E^u とお

き，絶対値が1より小さい固有値に対する一般化された固有空間の直和と$\mathbb{R}^n$の共通部分をE^sとおく．

<u>命題5</u> (a) $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$，$L(E^s) = E^s$，$L(E^u) = E^u$

(b) $L = DT(p)$ の特性根（固有値）を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とするとき，

$$\dim E^s = \#\{\lambda_i \mid |\lambda_i| < 1\}, \quad \dim E^u = \#\{\lambda_i \mid |\lambda_i| > 1\}$$

(c) 適当な定数 c $(c>0)$，λ $(0<\lambda<1)$ があって

$$\left.\begin{array}{l} \|L^k(x)\| \leqq c\lambda^k \|x\|, \ x \in E^s \\ \|L^{-k}(x)\| \leqq c\lambda^k \|x\|, \ x \in E^u \end{array}\right\} \quad (k \geqq 1)$$

<u>定義</u> pをTのhyperbolicな不動点とするとき，

$$W^s(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{k\to\infty} T^k(x) = p\}$$
$$W^u(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{k\to\infty} T^{-k}(x) = p\}$$

とおき，$W^s(p)$をpのstable manifold，$W^u(p)$をpのunstable manifoldという．

<u>定理</u>（Stable Manifold Theorem）適当な1-1 immersion $\phi^s : E^s \to \mathbb{R}^n$があって，次のことが成立する．

(a) $\phi^s(E^s) = W^s(p)$ (b) $\phi^s(0) = p$ (c) $\dim W^s(p) = \dim E^s$

命題5および上の定理の証明については，白岩[6]を参照のこと．

<u>注意3</u> Unstable Manifoldに対しても上と同様の定義が成立する．また，hyperbolicなperiodic pointに対しても，同様なことが成立する．

§2 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を連続写像とし，pをその不動点とする．いま，$1-T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を $(1-T)(x)=x-T(x)$ と定義すると $(1-T)(p)=0$ となる．

pをTの isolated fixed point とする．すなわち，pの適当な近傍Uがあって，$T(x)=x$，となるようなUの点はp以外に存在しないものとする．すると，$(1-T)(U-\{p\})\subset\mathbb{R}^n-\{0\}$ となる．したがって，$1-T$ は$\mathbb{Z}$係数のホモロジー群の間の準同型写像

$$(1-T)_*:H_n(U,U-\{p\})\longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\})$$

をひき起こす．

ここで，$H_n(U,U-\{p\})\approx H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\})\approx\mathbb{Z}$であって，$\mathbb{R}^n$に orientation を定めれば，これらの群の生成元 O_U, $O_{\mathbb{R}^n}$ が一意的に定まる．したがって，適当な $m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$(1-T)_*(O_U)=m\ O_{\mathbb{R}^n}$$

が成立する．このmはUのとり方に無関係である．これを，pのTに関する(fixed point) index といい，$\mathrm{index}_T(p)$ または $\mathrm{index}(p)$ と表わす．

命題6　$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ をC^1級微分同相写像とし，pをその hyperbolic な不動点とする．このとき，次のことが成立する．

(a) pはTの isolated fixed point である．

(b) $\mathrm{index}_T(p)$ は次のように求められる．

$$\mathrm{index}_T(p) = \begin{cases} +1, & \det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)) > 0 \\ -1, & \det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)) < 0 \end{cases}$$

証明　Hartmanの定理（白岩［6］）により，Tがhyperbolicな同型写像で，$p=0$のときに証明すれば十分である．そこで，この場合，$1-T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$は同型写像となるから，$\det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p))$が正になるか負になるかにしたがって，$1-T$は$\mathbb{R}^n$のorientationを保ったり，反対にしたりする．このことからすぐわかる．

命題7　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

$$\mathrm{index}_T(p) = \begin{cases} +1, & 1\text{より大きな}DT(p)\text{の実固有値の個数が偶数} \\ -1, & \text{―――――――――――――――――――が奇数} \end{cases}$$

系1　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

$\dim E^u = u$とし，$L_u = DT(p)|E^u : E^u \to E^u$とする．

(a)　$\det L_u > 0$なら　$\mathrm{index}_{T^k}(p) = (-1)^u$，$k \geqq 1$.

(b)　$\det L_u < 0$なら　$\mathrm{index}_{T^{2k+1}}(p) = (-1)^{u+1}$，$k \geqq 0$

$\mathrm{index}_{T^{2k}}(p) = (-1)^u$，$k \geqq 1$

系2　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

(a)　pがsourceなら，$\mathrm{index}_{T^k}(p) = (-1)^n$，$k \geqq 1$

(b)　pがsinkなら，$\mathrm{index}_{T^k}(p) = 1$，$k \geqq 1$

命題7は命題6を用いてわかる．実際，$1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)$をJordanの標準形を用いて表わし，その行列式の符号を$DT(p)$

の特性根(固有値)を用いて計算することによって,命題7の結果を得る.

系1は命題7と簡単な線形代数の計算によって求めることができる.系2は系1と $\det L > 0$ からわかる.

<u>例</u> $n=2$ とすると系2から次のことがわかる.

p が completely stable または completely unstable なら

$\mathrm{index}_{T^k}(p) = 1$, $k \geq 1$

また,系1から次のことがわかる.

p が directly unstable なら $\mathrm{index}_{T^k}(p) = -1$, $k \geq 1$

p が inversely unstable なら $\mathrm{index}_{T^k}(p) = \begin{cases} +1, & k: \mathrm{odd} \geq 1 \\ -1, & k: \mathrm{even} \geq 2 \end{cases}$

<u>定理</u>(Poincaré - Hopf - Lefschetz) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とし,T の不動点はすべて isolated とする.いま,n 次元閉球と同相な $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K があって,次の条件

(a) $T(K) \subset K$,

(b) T の不動点はすべて K に含まれる.

をみたすならば,次の等式が成立する.

$$\sum_{T(p)=p} \mathrm{index}_T(p) = 1$$

<u>系</u> $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像,k を自然数とする.いま周期 k の T の周期点はすべて hyperbolic とし,

n次元閉球と同相なR^nの部分集合Kがあって，次の

(a) $T^k(K) \subset K$

(b) 周期kのTの周期点はすべてKに含まれる．

が成立するとき，次の等式が成立する．

$$\sum_{T^k(p)=p} \mathrm{index}_{T^k}(p) = 1$$

系は上の定理からすぐわかる．また，定理の証明はDold [1]を参照されたい．

§3 ここでLevinson-Masseraの等式とその一般化について示す．

定義 方程式(1)がdissipative (D-system)

$\rightleftarrows$ 適当な正数Rと自然数Nがあって，(1)の任意の解$x(t)$に対して，次のことが成立する．

適当な$t_0 \in R$に対して，$\|x(t_0)\| \leqq R$ および

$\|x(t)\| \leqq R$, $t \geqq t_0 + N$

例1 (Levinson-Langenhop-Opial) 次の方程式

(3) $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t)$

において，$f(x,v)$, $g(x)$, $e(t)$ はC^1級とし，これらは次の条件(a)〜(d)を満たすものとする．

(a) $e(t)$は周期1の周期関数で，$E = \max|e(t)|$とおく．

(b) 適当な正数m, aがあって，次の不等式が成立する．

$$f(x,v) \geqq m \quad \text{for} \quad |x| \geqq a,\ |v| \geqq a$$

(c) 適当な正数Mがあって，　$f(x,v) \geqq -M$

(d) $\liminf_{x\to\infty} g(x) > Ma+E$ ，$\limsup_{x\to-\infty} g(x) < -(Ma+E)$

方程式(3)は次の方程式と同値である．

$$(3)' \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x,y)y - g(x) + e(t) \end{cases}$$

(3)′はD-systemである．（Opial [5]）

<u>例2</u>（Duffing's Equation）　次の方程式

$$(4) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$$

において，$f(x)$, $g(x)$, $e(t)$は次の条件をみたすものとする．

(a) $e(t)$は周期1の周期関数でC^1級とし，$E = \max|e(t)|$とする．

(b) 適当な正数 c があって，$f(x) \geqq c$ となる．

(c) $g'(x) \geqq 0$ であって，$\lim_{x\to\infty} g(x) > E$，$\lim_{x\to-\infty} g(x) < -E$

方程式(4)は次の方程式と同値である．

$$(4)' \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) + e(t) \end{cases}$$

(4)′はD-systemである．（例1，白岩 [7]）

2次元のD-system

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x,y) \\ \dot{y} = g(t,x,y) \end{cases}$$

に対して，$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$をそのPoincaré変換とする．

いま，各自然数 k に対して，周期 k の周期点はすべて hyperbolic とすると，周期 k の周期点の個数は有限となる．
そこで，自然数 q に対して，

$C(q) = \#\{$最小周期 q の completely stable または completely unstable な周期点$\}$

$I(q) = \#\{$最小周期 q の inversely unstable 周期点$\}$

$D(q) = \#\{$最小周期 q の directly unstable 周期点$\}$

とおくと，次の定理が成立する．

定理（Levinson – Massera）以上の仮定と記号のもとで，次の等式が成立する．

$$C(1) + I(1) = D(1) + 1$$

q：奇数（$q>1$）なら　$C(q) + I(q) = D(q)$

q：偶数なら　$C(q) + I(q) = D(q) + 2I\left(\frac{q}{2}\right)$

この定理の証明は Massera [4] を参照されたい．

この定理を一般の次元 n に拡張しよう．このため，次のような定義を用意しよう．

定義　方程式 (1) が D′-system

$\Longleftrightarrow$　n 次元閉球と同相な R^n の部分集合 K があって，次の性質が成立する．

(a)　(1) の任意の解 $x(t)$ に対して，適当な $t_0 \in R$ があって，$x(t_0) \in K$．

(6) (1) の任意の解 $x(t)$ に対して，次のことが成立する．

$x(t_1)\in K$ ならば，$x(t)\in K$，$^{\forall}t\geq t_1$

定義から，次の命題は明らかである．

命題 8　D′-system は D-system である．

例 3　例 1，例 2 の D-system は実は D′-system である．例えば Opial [5]，白岩 [7] を参照のこと．

例 4　(x,y) 平面上で，原点から十分はなれた点に対して，常にその点を通る単一閉曲線が対応して，$t=t_0$ (t_0 は任意) のとき，その単一閉曲線の点を通る解 $(x(t),y(t))$ は t が増すとき，(x,y) 平面上でその単一閉曲線の内部に向うような 2 次元の system を E-system という（古屋 [2]）．

E-system は D′-system である．

定義　$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像とする．いま，p を T の hyperbolic な不動点とし，$L=DT(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ による $\mathbb{R}^n$ の直和分解を $\mathbb{R}^n=E^s\oplus E^u$ とする．そして，$L_u=DT(p)|E^u:E^u\to E^u$ とおく．

そのとき，

$\det L_u>0$，$\dim E^u=\mathrm{even}$ ならば，p を PD 型

$\det L_u>0$，$\dim E^u=\mathrm{odd}$ ならば，p を ND 型

$\det L_u<0$，$\dim E^u=\mathrm{even}$ ならば，p を PI 型

$\det L_u<0$，$\dim E^u=\mathrm{odd}$ ならば，p を NI 型

と定義する．

周期点についても同様に定義する．

<u>定理</u>　方程式(1)がD-systemとし，$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$をそのPoincaré変換とする．そして，すべての自然数qに対して，周期qの周期点はすべてhyperbolicとする．

このとき，各自然数qに対して，周期がqの周期点の個数は有限個となる．そこで，いま

$PD(q) = \#\{$最小周期qのPD型周期点$\}$

$ND(q) = \#\{$　〃　〃　ND型　〃　$\}$

$PI(q) = \#\{$　〃　〃　PI型　〃　$\}$

$NI(q) = \#\{$　〃　〃　NI型　〃　$\}$

$N(q) = \#\{$最小周期qの周期点$\}$

とおくと，次の等式が成立する．

$$PD(1) + NI(1) = ND(1) + PI(1) + 1$$

$$\begin{aligned} N(1) &= PD(1) + ND(1) + NI(1) + PI(1) \\ &= 2(ND(1) + PI(1)) + 1 \end{aligned}$$

qを1より大きい奇数とすると

$$PD(q) + NI(q) = ND(q) + PI(q)$$

$$\begin{aligned} N(q) &= PD(q) + ND(q) + NI(q) + PI(q) \\ &= 2(PD(q) + NI(q)) = 2(ND(q) + PI(q)) \end{aligned}$$

qを偶数とすると

$$PD(q)+NI(q)+2PI(q/2)=ND(q)+PI(q)+2NI(q/2)$$

$$\begin{aligned} N(q) &= PD(q)+ND(q)+NI(q)+PI(q) \\ &= 2(ND(q)+PI(q)+NI(q/2)-PI(q/2)) \end{aligned}$$

系　上の定理と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

(a)　$N(1)$は奇数である．

(b)　qを1より大きい奇数とすると，$N(q)$は$2q$で割り切れる．

(c)　qを偶数とし，$PI(q/2)=NI(q/2)$とすると，$N(q)$は$2q$で割り切れる．特に，$PI(q/2)=NI(q/2)=0$ならば，$N(q)$は$2q$で割り切れる．

この系は上の定理からすぐわかる．また，上の定理は，命題7系1，Poincaré-Hopf-Lefschetzの定理等を用いて，Massera[4]と同様に証明できる．詳細は白岩[8]を参照されたい．

参考文献

[1] A. Dold: Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts, Topology 4 (1965), 1–8

[2] 古屋茂：非線型問題（強制振動論），共立，1957

[3] N. Levinson: Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. of Math. 45 (1944), 723–737, Corrections, ibid. 49 (1948), 738

[4] J.L. Massera : The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order, Ann. of Math. 50 (1949), 118–126

[5] Z. Opial : Démonstration d'un théorème de N. Levinson et C. Langenhop, Ann. Polon. Math. 7 (1960), 241–246

[6] 白岩謙一 : 力学系の理論, 岩波, 1974

[7] 〃 : Boundedness and Convergence of solutions of Duffing's Equation, to appear

[8] 〃 : A generalization of the Levinson-Massera's equalities, to appear