

## 2, 3 の回路例 と 回路の正規化について

徳大工 電子 川上 博

早大理工電気 松本 隆

### 1. はじめに

昨年の集会の際 筆者の一人 (川上) は, 相反な RC 回路で周期解を持ち得るであろう回路例をあたえた。これをきっかけにいくつかの例, および関連する問題を考えてみた。

回路例を述べるまえに, 使用する記号, 記法を定める意味で簡単に回路のダイナミクスに関する定式化を要約しておく, [1], [2], [3] などを参照。回路のダイナミクスは抵抗特性と Kirchhoff の法則より定まるなめらかな多様体  $\Sigma$  を state space として展開される。すなわち回路の状態方程式として

$$\pi^* G \left( \frac{dx}{dt}, Y \right) = \omega(Y) \quad \forall Y \in T\Sigma$$

ここに

$\omega$ :  $\Sigma$  上の 1-form,

$x(t)$ : 時刻  $t$  における回路の状態  $x(t) \in \Sigma$

$$\pi: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^\gamma \quad \text{differentiable map}$$

$$x \longmapsto (i_L, v_C)$$

ここで  $\mathbb{R}^\lambda$ : インダクタ電流  $i_L$  のつくる空間  
 $\mathbb{R}^\gamma$ : キャパシタ電圧  $v_C$  のつくる空間

$$\dim \Sigma = \lambda + \gamma$$

$G: \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^\gamma$  上の symmetric nondegenerate bilinear form.

$\omega$  が closed である回路は相反と呼ばれている。したがって  $\Sigma$  が単連結な相反回路は  $\pi^*G$  に関する gradient 系となる:  $\omega = dP$ 。特に RC 回路では  $G$  が正値なので  $\pi^*G$  が nonsingular かつ  $\Sigma$  が単連結な場合には periodic orbit を持つことができないことに注意する。

そこで以下に述べる例は次の事柄を考えながら作った:

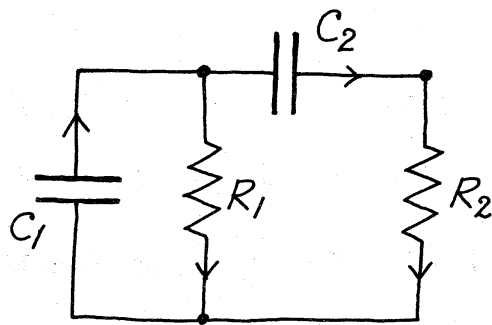
- (1) RC 回路で periodic orbit を持つ回路,
- (2)  $\pi^*G$  の singularity,  $\Sigma$  の単連結性,  $\omega$  が closed かどうかなど、と periodic orbit の有無,
- (3)  $\pi^*G$  に singularity が生じる回路の正則化 (regularization)

もちろんこれらの事柄から脱線した例もある。

## 2. RC回路の例

(2.1) Periodic orbit を持つ RC 回路:

まず  $\pi^*G$  が nonsingular,  $\omega$  が closed なのに  $\Sigma$  が単連結でないために periodic orbits を持つ回路の例を述べらる。



左図の回路を考えよう。

Kirchhoffの法則は

$$i = (i_{C1}, i_{C2}, i_{R1}, i_{R2})$$

$$v = (v_{C1}, v_{C2}, v_{R1}, v_{R2})$$

として

$$\left. \begin{aligned} i_{C1} - i_{R1} - i_{R2} &= 0 \\ i_{C2} - i_{R2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow Qi = 0$$

$$\left. \begin{aligned} v_{R1} + v_{C1} &= 0 \\ v_{R2} + v_{C1} + v_{C2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow Bv = 0$$

今  $\chi: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定義して抵抗の枝特性  $\Lambda_P$  を  $(i, v) \mapsto (v_{R1}, v_{R2})$

$$\Lambda_P = \left\{ (i, v) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 - \chi^{-1}(0) \mid \begin{aligned} i_{R1} = f_1(v_{R1}, v_{R2}) &= \frac{v_{R2}}{v_{R1}^2 + (v_{R1} - v_{R2})^2} \\ i_{R2} = f_2(v_{R1}, v_{R2}) &= \frac{-v_{R1}}{v_{R1}^2 + (v_{R1} - v_{R2})^2} \end{aligned} \right\}$$

とする。  $\Lambda_P$  は単連結でないことに注意。

$$\Sigma = \{ (i, v) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid Qi = 0, Bv = 0 \} \cap \Lambda_P$$

$$= \left\{ (f_1 + f_2, f_2, f_1, f_2, v_{c1}, v_{c2}, -v_{c1}, -v_{c1} - v_{c2}) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid v_{c1} \neq 0, v_{c2} \neq 0 \right\}$$

これより  $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  は local diffeo となり,  $\pi^*G$  は nonsingular positive definite となる。簡単なため  $C_1 = C_2 = 1$  として今イテックスをかくと:

$$\frac{dv_{c1}}{dt} = \frac{-v_{c2}}{v_{c1}^2 + v_{c2}^2} \quad (*)$$

$$\frac{dv_{c2}}{dt} = \frac{v_{c1}}{v_{c1}^2 + v_{c2}^2}$$

となる。また  $\frac{\partial}{\partial v_{c2}} \left( \frac{-v_{c2}}{v_{c1}^2 + v_{c2}^2} \right) = \frac{\partial}{\partial v_{c1}} \left( \frac{v_{c1}}{v_{c1}^2 + v_{c2}^2} \right)$  なり

$\omega$  は closed である。ところで  $\omega$  は  $v_{c1}$  軸からの角度  $\theta$  からつくられる 1-form なのだから exact ではない。明らかに (\*) は

$$v_{c1}^2 + v_{c2}^2 = r^2 \quad (r \text{ は定数 } > 0)$$

なる periodic orbit を持つ。実際

$$v_{c1}(t) = \frac{1}{r} \cos t, \quad v_{c2}(t) = \frac{1}{r} \sin t$$

は (\*) の周期解である。

(注) 抵抗特性  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (v_{R1}, v_{R2}) \mapsto (f_1(v_{R1}, v_{R2}), f_2(v_{R1}, v_{R2}))$ , かつ differentiable map ならば  $\pi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  は global diffeo となり  $\pi^*G$  はやはり nonsingular である。いいかえると抵抗特性が電圧制御型ならばこの例に合えられる接続関係にある回路の回路方程式はうまく定義できる。

(2.2)  $\omega$  が closed でない RC 回路

トランジスタや増幅器のような能動素子を含む回路では  $\pi^*G$  が nonsingular,  $\Sigma$  が単連結であるか  $\omega$  が closed でない場合が一般的である。このような場合には回路には periodic orbit の存在する場合も, そうでない場合もどちらもあり得る。

(2.1) の例で抵抗特性として次のものを考える:

$$\Lambda_p = \left\{ (i, v) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid \dot{i}_{R1} = G_1 v_{R1}, \dot{i}_{R2} = G_2 v_{R2} + f(v_{R1}) \right\}$$

ここで  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  はなめらかとする。

(2.1) (註) によりこの回路のダイナミクスはうまく定義できて

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} &= -(G_1 + G_2)v_{C1} - G_2 v_{C2} + f(-v_{C1}) \\ C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} &= -G_2 v_{C1} - G_2 v_{C2} + f(-v_{C1}) \end{aligned} \quad (*)$$

ところが明らかに  $f \neq 0$  (or const) のとき  $\omega$  は closed でない。この例で (\*) は  $f$  の非線形性により periodic orbit を持つこともそうでないこともあり得る。たとえば  $C_1 = C_2 = G_1 = G_2 = 1$ ,  $f(v_{R1}) = -(3+\mu)v_{R1} + \frac{\mu}{3}v_{R1}^3$  ( $\mu > 0$ ) として (\*) は  $v_{C1}$  に関して van der Pol の方程式:

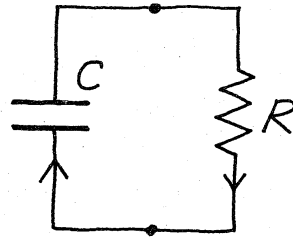
$$\ddot{v}_{C1} - \mu(1 - v_{C1}^2)\dot{v}_{C1} + v_{C1} = 0$$

となる。 $f$  の特性を変えて limit cycle を持たない回路の得られることも容易にわかる。

(2.3)  $\pi^*G$  に singularity を生じさせる RC 回路

右図のような最も簡単な RC 回路  
を考えよう。Kirchhoff の法則は

$$\begin{aligned} i_C - i_R &= 0 \\ v_R + v_C &= 0. \end{aligned}$$



キャパシタの特性は線形であるとすると:  $C \frac{dv_C}{dt} = i_C$ .

抵抗特性として

(i)  $i_R = g(v_R)$  (電圧制御型)

(ii)  $v_R = f(i_R)$  (電流制御型)

(iii)  $f(v_R, i_R) = 0$

の各場合について考える。

(i)  $i_R = g(v_R)$  の場合:

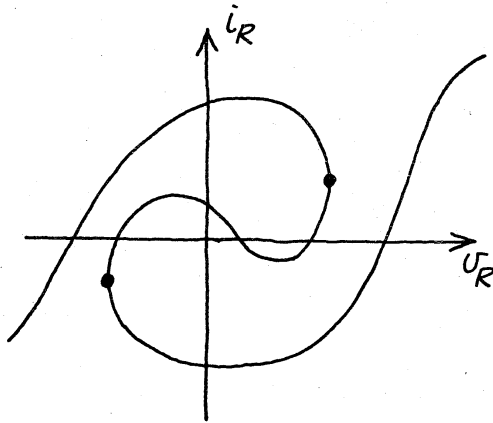
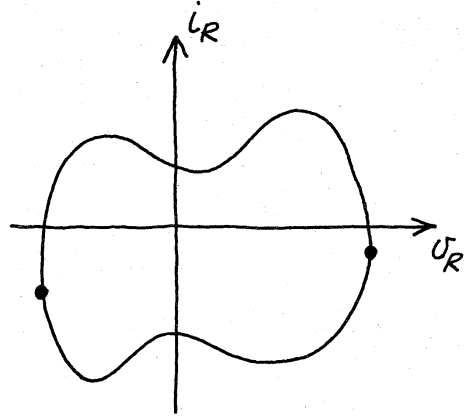
バックトル場はうまく定義できる。すなわち回路のダイナミクスは

$$C \frac{dv_C}{dt} = f(-v_C).$$

(ii)  $v_R = f(i_R)$  の場合:

非線形性が強くなると  $\pi$  が singular となる点, すなわち  $\pi^*G$  が singular となる点の生じることがある。S. Smale [1] の Ex. 3 を見よ。

(iii)  $f(u_R, i_R) = 0$  の場合:



$(u_R, i_R) \in \mathbb{R}^2$  で特性が左図のような場合には  $\pi^*G$  が singular となる点 (黒丸) が生じてしまう。しかし次の例にみられるような非常に特別な場合にはベクトル場をうまく定め得ることがある。

今特性が原点を中心とする円の場合を考える。すなわち抵抗特性を

$$S^1: i_R^2 + u_R^2 = 1$$

と仮定する。

明らかに  $\Sigma \simeq S^1$  である。したがってこの回路は自動的に相反である。

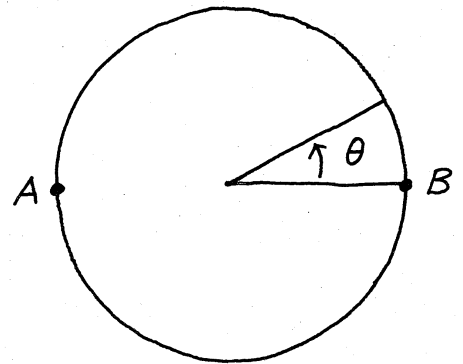
$$\omega = e^* \eta$$

$$\eta = u_R di_R + d(u_C i_C)$$

$$e: \Sigma \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathbb{R}^4$$

であることを注意する。

$$K = \{ (u_R, u_C, i_R, i_C) \mid u_R + u_C = 0, i_R - i_C = 0 \}$$



であるから

$$\eta|_K = -i_R dU_R$$

したがって極座標  $\theta$  を用いると

$$\omega = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \cos\theta d\theta = \sin^2\theta d\theta$$

となりこれは大域的にうまく定義されている。ところで

$$G = C dU_C \otimes dU_C$$

であるから  $\theta$  を用いると

$$\pi^*G = C \sin^2\theta d\theta \otimes d\theta$$

となりこれは図中点  $A, B$  で singular である。回路のダイナミクスを考える前に  $\omega$  が exact でないことに注意する:

ダイナミクスを考える前に  $\omega$  が exact でないことに注意する:

$$\int_0^\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta.$$

さて回路のダイナミクスは

$$\sin^2\theta \left( C \frac{d\theta}{dt} - 1 \right) = 0.$$

これより回路の状態は (a)  $\sin^2\theta = 0$  あるいは (b)  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{C}$  により定められる。

(a)  $\sin^2\theta = 0$  より定まる場合

$$t = t_0 \text{ で } \theta(t_0) = n\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ ならば } U_R(t_0) = U_C(t_0) = 1,$$

$$i_C(t_0) = i_R(t_0) = 0 \text{ とありこの状態は Kirchhoff の法則}$$

$$\text{と両立し } U_R(t) = U_C(t) \equiv 1, i_C(t) = i_R(t) \equiv 0 \text{ は解となる。}$$



(b)  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}$  より定まる場合

$$\theta(t) = \frac{1}{\varepsilon} (t - t_0) + \theta(t_0)$$

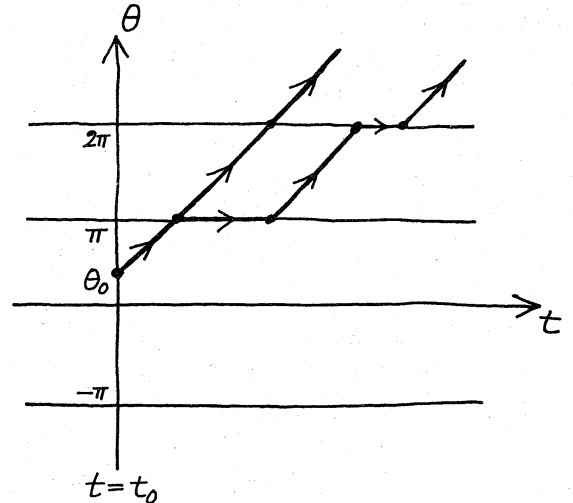
以上のことより  $t = t_0$  で  $\theta(t_0) = \theta_0$  であるこの回路の状態

は  $\theta(t) = \frac{1}{\varepsilon} (t - t_0) + \theta_0$  に

従うが  $\theta(t) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

において (a) により解の

一意性が保証されない。



### 3. バクトル場の正則化の1実現法

(2.3) の例で  $\pi^*G$  に singularity が生じる例をあげたが  
 二では次の命題を構成的な方法で証明しよう。

#### (3.1) 抵抗特性が

(a) 電圧制御型:  $i_p = g(v_p)$  あるいは

(b) 電流制御型:  $v_p = f(i_p)$

のどちらか (回路には両者の抵抗を含んでよい) である回路  
 は適当にインダクタまたはキャパシタを付加することにより  
 回路を正則化 (regularization) できる。

この命題は直接証明してもよいがここでは次の2つの命題に別けて証明する。

(3.2) 有限個の素子からなる任意の回路はキャパシタ, インダクタを適当に付加して (Forced degeneracy のある回路では除去することも考えて), 完全回路とすることができる。

(3.3) 完全回路で抵抗特性が (3.1) の条件を満たす回路は正規化可能である。

ここで完全回路 (complete circuit) とは Kirchoff の法則  $Qi=0$ ,  $Bv=0$  が次の形で表現できる tree の存在する回路をいう [4, p. 84]。

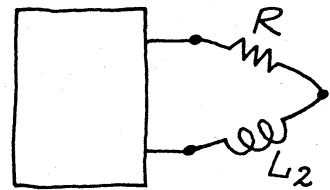
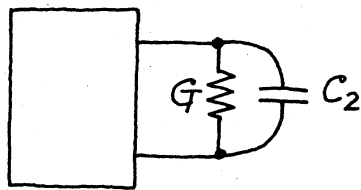
tree voltage sources (V):	$i_V + F_{VR}i_R + F_{VL}i_L + F_{VI}i_I = 0$
tree capacitors (C):	$i_C + F_{CR}i_R + F_{CL}i_L + F_{CI}i_I = 0$
tree resistors (G):	$i_G + F_{GL}i_L + F_{GI}i_I = 0$
link resistors (R):	$v_R - F'_{VR}v_V - F'_{CR}v_C = 0$
link inductors (L):	$v_L - F'_{VL}v_V - F'_{CL}v_C - F'_{GL}v_G = 0$
link current sources (I):	$v_I - F'_{VI}v_V - F'_{CI}v_C - F'_{GI}v_G = 0$

$F_{GR} = 0$  であることに注意する。なお記法については R.A.

Rohrer [5] の14章参照。

(3.2) の証明の概様.

- (i) まず forced degeneracy の生じている回路ではキャパシタのみ loop あるいはインダクタのみの cutset が存在する。そこでキャパシタのみ loop から loop を構成するキャパシタのいすれか 1 つを取り去り (開放除去), インダクタのみの cutset ではいすれか 1 つのインダクタを短絡除去することにより forced degeneracy を生じない回路にする。
- (ii) ここで一般性を失うことなく回路は最初から forced degeneracy のないものと仮定しよう。このとき proper tree (電圧源, キャパシタを tree branches に, 電流源とインダクタを cotree links に含む tree) のこと。forced degeneracy のない回路ではこのような tree の存在することが証明できる [5] Ch. 14) を 1 つ選んで Kirchhoff の法則:  $Q\dot{c} = 0$ ,  $BV = 0$  を書き下す。これは前10-3の式で  $F_{GR} \neq 0$  の形となる。
- (iii) 次に tree resistors ( $G$ ) には並列にキャパシタ ( $C_2$ ) を, link resistors ( $R$ ) には直列にインダクタ ( $L_2$ ) を付加する。以上の手順により回路は完全となる。



## (3.3) の証明の概観

完全回路であることより Kirchhoff の法則を次式で表わすことのできる tree が存在する。

$$\text{tree voltage sources (V): } i_V + F_{VR1} i_{R1} + F_{VR2} i_{R2} + F_{VL} i_L + F_{VI} i_I = 0$$

$$\text{tree capacitors (C): } i_C + F_{CR1} i_{R1} + F_{CR2} i_{R2} + F_{CL} i_L + F_{CI} i_I = 0$$

$$\text{tree resistors (G}_1\text{): } i_{G1} + F_{G1L} i_L + F_{G1I} i_I = 0$$

(voltage controlled)

$$\text{tree resistors (G}_2\text{): } i_{G2} + F_{G2L} i_L + F_{G2I} i_I = 0$$

(current controlled)

$$\text{link resistors (R}_1\text{): } v_{R1} - F'_{VR1} v_V - F'_{CR1} v_C = 0$$

(voltage controlled)

$$\text{link resistors (R}_2\text{): } v_{R2} - F'_{VR2} v_V - F'_{CR2} v_C = 0$$

(current controlled)

$$\text{link inductors (L): } v_L - F'_{VL} v_V - F'_{CL} v_C - F'_{G1L} v_{G1} - F'_{G2L} v_{G2} = 0$$

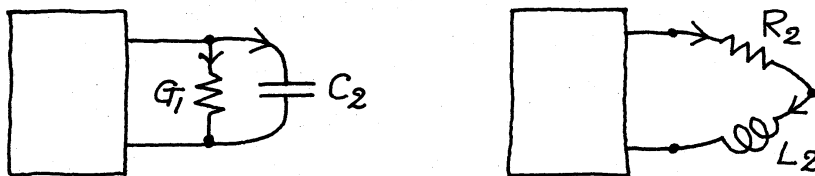
$$\text{link current sources (I): } v_I - F'_{VI} v_V - F'_{CI} v_C - F'_{G1I} v_{G1} - F'_{G2I} v_{G2} = 0$$

二に tree (link) resistors は電圧制御型, 電流制御型に分けて表現した。すなわち抵抗特性はそれぞれ次のように定義されているものとする:

$$i_{G1} = \hat{i}_{G1}(v_{G1}), \quad v_{G2} = \hat{v}_{G2}(i_{G2})$$

$$i_{R1} = \hat{i}_{R1}(v_{R1}), \quad v_{R2} = \hat{v}_{R2}(i_{R2}).$$

よって  $G_1$  に並列にキャパシタ ( $C_2$ ) を,  $R_2$  に直列にインダクタ ( $L_2$ ) をつなぐと



できあがった回路の Kirchhoff の法則は次式となる:

KIRCHHOFF'S LAWS FOR REGULARIZED CIRCUITS

$$\begin{array}{l}
\text{tree voltage sources (V):} \quad i_V + F_{VR1} i_{R1} + F_{VL2} i_{L2} + F_{VL} i_L + F_{VI} i_I = 0 \\
\text{tree capacitors (C):} \quad i_C + F_{CR1} i_{R1} + F_{CL2} i_{L2} + F_{CL} i_L + F_{CI} i_I = 0 \\
\text{tree capacitors (C}_2\text{):} \quad i_{C2} + F_{C2R1} i_{R1} + i_{G1} + F_{C2L2} i_{L2} + F_{C2L} i_L + F_{C2I} i_I = 0 \\
\text{tree resistors (R}_2\text{):} \quad i_{R2} - i_{L2} = 0 \\
\text{tree resistors (G}_2\text{):} \quad i_{G2} + F_{G2L2} i_{L2} + F_{G2L} i_L + F_{G2I} i_I = 0 \\
\text{link resistors (R}_1\text{):} \quad v_{R1} - F'_{VR1} v_V - F'_{CR1} v_C - F'_{C2R1} v_{C2} = 0 \\
\text{link resistors (G}_1\text{):} \quad v_{G1} - v_{C2} = 0 \\
\text{link inductors (L}_2\text{):} \quad v_{L2} - F'_{VL2} v_V - F'_{CL2} v_C - F'_{C2L2} v_{C2} + v_{R2} - F'_{G2L2} v_{G2} = 0 \\
\text{link inductors (L):} \quad v_L - F'_{VL} v_V - F'_{CL} v_C - F'_{C2L} v_{C2} - F'_{G2L} v_{G2} = 0 \\
\text{link current sources (I):} \quad v_I - F'_{VI} v_V - F'_{CI} v_C - F'_{C2I} v_{C2} - F'_{G2I} v_{G2} = 0
\end{array}$$

キャパシタ, インダクタ特性

$$C_c \frac{dU_c}{dt} = i_c, \quad C_{c2} \frac{dU_{c2}}{dt} = i_{c2}$$

$$L_L \frac{dI_L}{dt} = U_L, \quad L_{L2} \frac{dI_{L2}}{dt} = U_{L2}$$

および抵抗特性

$$i_{G1} = \hat{i}_{G1}(U_{G1}) = \hat{i}_{G1}(U_{C2})$$

$$U_{G2} = \hat{U}_{G2}(-F_{G2L2} i_{L2} - F_{G2L} i_L - F_{G2I} i_I)$$

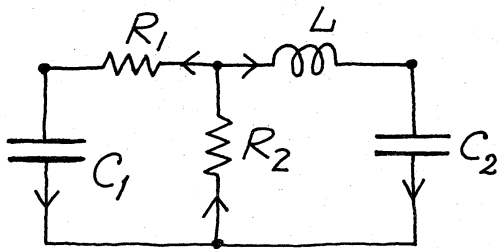
$$i_{R1} = \hat{i}_{R1}(F'_{C2R1} U_{C2} + F'_{CR1} U_c + F'_{VR1} U_v)$$

$$U_{R2} = \hat{U}_{R2}(i_{R2}) = \hat{U}_{R2}(i_{L2})$$

を Kirchhoff の法則に代入して, 具体的に回路方程式を得る。

この構成法より明らかかなように回路は  $\pi^*G$  に singularity が生じないように変形された。

### (3.4) 正則化の例



1例として左図の回路を考える。

Kirchhoffの法則は

$$i_{c1} - i_{R1} = 0$$

$$i_{c2} - i_L = 0$$

$$i_{R2} - i_{R1} - i_L = 0$$

$$U_{R1} + U_{R2} + U_{C1} = 0$$

$$U_L + U_{R2} + U_{C2} = 0$$

抵抗特性として

$$(i) \quad i_{R1} = g_1(U_{R1})$$

$$(ii) \quad i_{R1} = g_1(U_{R1})$$

$$(iii) \quad U_{R1} = f_1(i_{R1})$$

$$(iv) \quad U_{R1} = f_1(i_{R1})$$

$$i_{R2} = g_2(U_{R2})$$

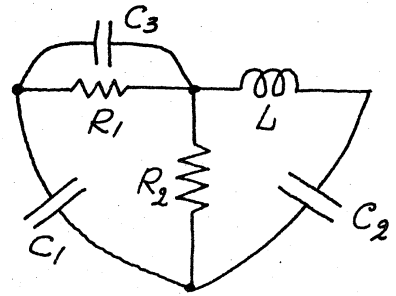
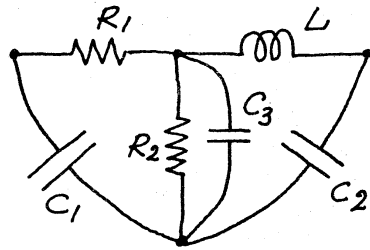
$$U_{R2} = f_2(i_{R2})$$

$$i_{R2} = g_2(U_{R2})$$

$$U_{R2} = f_2(i_{R2})$$

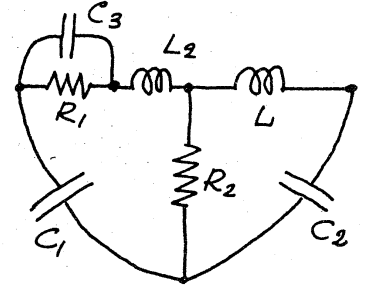
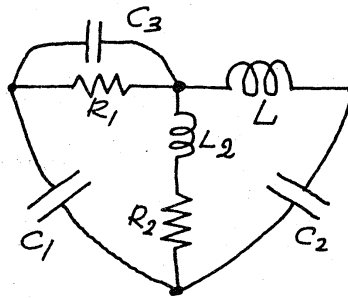
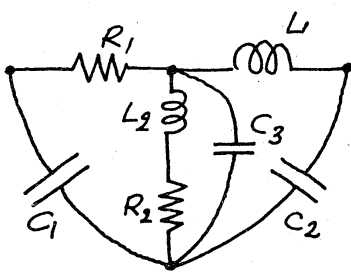
を考える。いづれも非線形性が強くなると  $\pi^*G$  が singular となる点の生じることがあり得る。各場合に正則化を施した後の回路を次頁に示した。

(i) の場合:



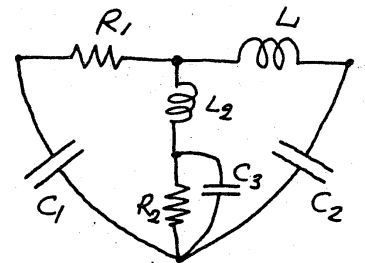
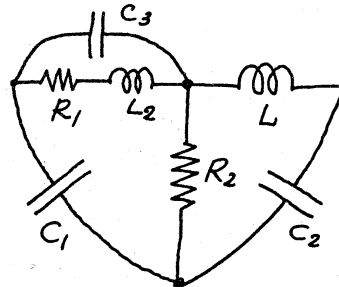
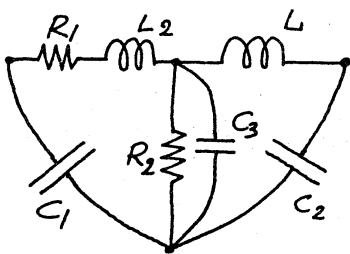
$C_3$  の付加による regularization

(ii) の場合:



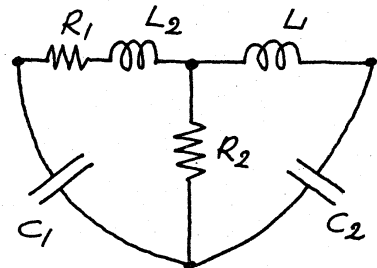
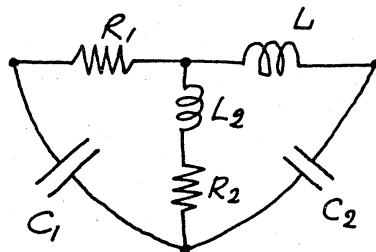
$C_3$  と  $L_2$  の付加による regularization

(iii) の場合:



$C_3$  と  $L_2$  の付加による regularization

(iv) の場合:



$L_2$  の付加による regularization

#### 4. おすび

この報告は RC 回路で抵抗特性の非線形性により回路のダイナミクスに特徴のみられる回路の例をあげた。正則化に関しては (3.1) の結果は E. Ihrig [6] の Theorem (2.3) と同じである。ただ付加するキャパシタ, インダクタの数は我々の方がはるかに少ない正則化になっている。

#### 謝辞

回路例 (2.3) のダイナミクスについては集会に参加された諸氏より有益なコメントをいただいた。特に東北大・中島文雄氏より  $\sin^2\theta (C\dot{\theta} + 1) = 0$  の解に関する注意をいただいた。ここに敬礼申し上げます。

#### 文献

- [1] S. Smale = On the mathematical foundations of electrical circuit theory, J. Diff. Geometry, 7 (1972) 193-210.
- [2] 松本隆 = 電気回路網のダイナミクスについて, 講究録 254.
- [3] 伊藤敏和 = 電気回路の力学系, " .
- [4] R.K. Brayton and J.K. Moser = A theory of nonlinear networks II, Quart. Appl. Math., 22 (1964) 81-104.
- [5] R.A. Rohrer = 回路理論, 学研社.
- [6] E. Ihrig = The regularization of nonlinear electrical circuits, P.A.M.S. 47-1 (1975) 179-183.