数理解析研究所講究録
第 285 巻 1976 年 61-66

t-design のある分類

広島大 教育　景山三平

序

$v \geqq k+t$ に対して t-(v, k, λ_t) design の complement も $\lambda'_t = \sum_{\ell=0}^{t}(-1)^\ell \binom{t}{\ell}\lambda_\ell = \lambda_t \binom{v-k}{t} / \binom{k}{t}$ なる t-$(v, v-k, \lambda'_t)$ design となるのはよく知られている。ここでは、t-(v, k, λ_t) design $(k \leqq v/2)$ とその complementary design の拡大可能性の問題を次の論文に従って論じる。

S. Kageyama: Classifications of certain t-designs. To appear in J. Combinatorial Th. (A).

Π を t-(v, k, λ_t) design, α を Π の処理とする。このとき処理として α を除く Π の処理, ブロックとして α を含む Π のブロックからなる design Π_α は $(t-1)$-$(v-1, k-1, \lambda_t)$ design となり, Π の contraction とよばれる。今, Π', Π

をそれぞれ t－，$(t+1)$-design とし，Πの適当な処理αに対して Π' と Π_α とが同型になるとき，ΠはΠ'の<u>拡大</u>(extension) 又は Π'は<u>拡大可能</u>という．定義から一般には同じパラメーターをもつ二つの t-design で，一方が拡大可能でも他方は拡大不可能のことがある．

記号 $PG(s,q):d$，$AG(s,q):d$ はそれぞれ，$PG(s,q)$，$AG(s,q)$ で点を処理，d-flat をブロックと見ることより得られる 2-design (BIBD) を示す $(s>d)$．

<u>問題の設定</u>

Π，Π^* をそれぞれ t-(v, k, λ_t) design $(k \leqq v/2)$ とその complement とする．このときΠが拡大不可能でもΠ^*は拡大可能となることがある．そこで t-design の拡大可能性の問題として次の四つのクラスを考えたい．

(A) Πは拡大可能；Π^*は拡大不可能．

(B) ΠとΠ^*は共に拡大可能．

(C) Πは拡大不可能；Π^*は拡大可能．

(D) ΠとΠ^*は共に拡大不可能．

上のそれぞれに属する t-design のクラスが特徴づけられると，それら自身の組合せ論的興味の他に，t-design の構造の分類に役立つ．この方面の最近の多くの研究は t-design

が拡大可能か不可能かを決定する方向にあり，これらはクラス(A)と(B)の考察に貢献している．ここでは上記4つのクラスの各々に属する t-design を考察する．

議論

次のことはよく知られている：ブロック数 b の t-(v, k, λ_t) design が拡大可能のための必要条件は

(I) $$b(v+1) \equiv 0 \pmod{k+1}$$

である．

同様に，ブロック数 b の t-(v, k, λ_t) design の complement が拡大可能のための必要条件は

(II) $$b(v+1) \equiv 0 \pmod{v-k+1}$$

である．これらはもっとも基本的な条件である．

補題． t-$(v, k, 1)$ design の complement は $t<k\leq v/2$ に対して拡大不可能である．

（証明） Π を $t<k\leq v/2$ なる t-$(v, k, \lambda_t=1)$ design とする．このとき Π^* は t-$(v, v-k, \lambda_t^*)$ design となる．ここで $\lambda_t^* = \binom{v-k}{t}/\binom{k}{t}$．さらにもし Σ が Π^* の extension ならば Σ^* は $(t+1)$-$(v+1, k, \lambda_{t+1}')$ design となる．ここで

$$\lambda'_{t+1} = \lambda^*_t \binom{k}{t+1} \Big/ \binom{v-k+1}{t+1} = (k-t)/(v-k+1)$$
$$< 1 \quad (\because\ t < k \leqq v/2).$$

このように $(t+1)-(v+1, k, \lambda'_{t+1})$ design は不存在．よって Σ も不存在である．（証済）

ここで 4つのクラスそれぞれに属する t-design について述べる．

$\boxed{\text{クラス(4)}}$ このクラスに属する t-design は一般には調べやすい．そのいくつかを述べる．

（1）Affine resolvable $2-(m^2[(m-1)p+1], m[(m-1)p+1], mp+1)$ design が拡大可能 $\Longleftrightarrow$ それが $2-(m^2, m, 1)$ design．それらのあるものは素数又は素数巾に対して $AG(2,m):1$ として存在する．このとき $AG(2,m):1$ を拡大した $3-(m^2+1, m+1, 1)$ design が存在する．自明な $2-(4,2,1)$ design を除いた affine resolvable 2-design の complement は拡大不可能である．

（2）$PG(s,2):d$ は $AG(s+1,2):d+1$ に拡大可能．$PG(s,2):d$ の complement は $d=1,2,s-1,s-2$ のとき拡大不可能．

（3）$AG(s,q):1$ は条件(I)を常にみたすが，$AG(s,q):1$ の complement は $q=2$ のときのみ条件(II)をみたす．

（4）対称型 2-design が拡大可能ならば それは次の型に限る（Cameron）．それらの complement は明らかに拡大不可

能: (i) Hadamard design, (ii) $v=(\lambda_2+2)(\lambda_2^2+4\lambda_2+2)$, $k=\lambda_2^2+3\lambda_2+1$, (iii) $v=111, k=11, \lambda_2=1$, (iv) $v=495$, $k=39$, $\lambda_2=3$.

(5) 3-(10,4,1) design, 3-(22,6,1) design, 3-(10,4,2) design など.

$\boxed{\text{クラス(B)}}$

(6) Σ を $(t+2)$-$(v+2, k+1, \lambda')$ design とし, α, β は Σ の処理とする. Π は処理として α, β と異なる Σ の処理で, ブロックとして α を含み β を含まない Σ のブロックを取ることより構成できる t-(v,k,λ) design とする. ここで $\lambda=\lambda'(v-k+1)/(k-t)$. このとき Π と Π^* は共にそれぞれ $(t+1)$-design $((\Sigma^*)_\beta)^*$ と $(\Sigma_\alpha)^*$ に拡大する.

知られている 4-, 5-design の系列を用いて クラス(B) に属する多くの 2-, 3-design の系列が与えられる.

(7) 自明な t-(v,t,λ_t) design (all combination type), t-$(v, v-1, \lambda_t)$ design, 2-(9,4,3) design, 2-(15,7,27) design など.

(8) 偶数 t に対して拡大可能な t-$(2k+1, k, \lambda_t)$ design はクラス(B)の例を与えることが多い.

$\boxed{\text{クラス(C)}}$ このクラスの t-design の存在が本稿の動機づけとなった. 例えば 2-(31,8,28) design を考える. これは条件(I)より拡大不可能. しかしその complement の一つの 2-(31,23,253) design は 3-(32,24,253) design (i.e., $AG(5,2):3$ として存在) に拡大可能である.

(9) Σ を $(t+1)$-$(v+1,k,\lambda)$ design とし, α を Σ の一つの処理とする. Π は Σ で α と異なるものを処理とし, α を含まない Σ のブロックをブロックとすれば t-(v,k,λ') design となる. ここで $\lambda'=\lambda(v+1-k)/(k-t)$. このとき Π^* は Σ^* に拡大可能である. 即ち, $(t+1)$-$(v+1,k,\lambda)$ design $\Sigma=(\Omega^\alpha,\mathcal{D})$ (ここで, $\Omega^\alpha=\Omega\cup\{\alpha\}$, $|\Omega|=v$) を $\Sigma=(\Omega^\alpha,\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2)$ と分割すれば $\Pi=(\Omega,\mathcal{D}_2)$ が t-$(v,k,\lambda(v+1-k)/(k-t))$ design となる. ここで, $\mathcal{D}_1=\{B:\alpha\in B\in\mathcal{D}\}$, $\mathcal{D}_2=\{B:\alpha\notin B\in\mathcal{D}\}$ である. このとき $\Pi^*=(\Omega,(\mathcal{D}_2^*)^\alpha)$ は $\Sigma^*=(\Omega^\alpha,\mathcal{D}_1^*\cup\mathcal{D}_2^*)$ に拡大する. ここで $\mathcal{D}_i^*=\{\Omega^\alpha-B:B\in\mathcal{D}_i\}$, $(\mathcal{D}_2^*)^\alpha=\{B-\{\alpha\}:\alpha\in B\in\mathcal{D}_2^*\}$ である. 故に Π が拡大不可能のときは この Π はクラス(C)に属する.

これの応用として, 例えば 4-(23,8,4) design, 4-(23,8,8) design, 4-(35,12,135) design などがある.

$\boxed{\text{クラス(D)}}$

知られた t-design の系列から 条件(I), (II) を用いて, このクラスの t-design の系列を容易に与えることができる. 例えば 2-design $AG(s,2):(s-1)$ は $s\geqq 3$ のときこのクラスの例となる.