数理解析研究所講究録
第 286 巻 1977 年 1-18

Thom Boardman Singularityの細分とextensibility

北大 理 安藤良文

§0 紹介

$J^{(k)}(n, p)$の部分集合のintegrabilityを調べるために、最近Andrew du plessisが$J^{(k)}(n, p)$のopen setにextensibilityなる概念を導入した。そして$J^{(k)}(n, p)$のopen set $\Omega^I = \bigcup_{K \leqq I} \Sigma^K$ のextensibiltyを調べた。一般にΩ^Iはextensibleではない。こゝでは$J^{(2)}(n, p)$の中にその概念に対応する多様体分割を入れることを目標とする。既ち$J^{(k)}(n, p)$のΩ^IはZariski open setである。そこで$\hat{i}$; $J^{(k)}(n+1, p) \longmapsto J^{(k)}(n, p)$により$\hat{i}(\Omega^I)$を考えると、これはZariski openである。$\hat{i}(\Omega^I)$のcomplementが代数的集合であり、この集合が上の細分の下に多様体の和となるようなものを考える。これは一般論としては、H. Whitneyの理論から可能である。しかし具体的な分割方法を

求めるには適当ではない。

§1で $J^{(2)}(n,p)$ の元 f に対して a − Jacobian extension $\delta_a\mathcal{J}\{f\}$, $a\in\mathbb{R}^p$ を定義する。

$\Sigma^{i,h}(c,t)\subset J^2(n,p)$ を以下のように定義する。

$f\in\Sigma^{i,h}(c,t)$

i) $f\in\Sigma^{i,h}$

ii) $\dim\delta_a\mathcal{J}\{f\}\leqq t$ で適当な $a\in\mathbb{R}^p$ に対し等号が成立する。 $U=\{a\in\mathbb{R}^p\mid\dim\delta_a\mathcal{J}\{f\}=t\}$

iii) $\bigcap\limits_{U\ni a}\delta_a\mathcal{J}\{f\}/\mathcal{J}\{f\}$ の次元が c である。

<u>定理</u>　$p-n+i\leqq 2$ ならば $\Sigma^{i,h}(c,t)$ は locally Zariski closed non singular mfd である。

<u>系</u>　$p=2$ の場合には目的の結果が得られた。即ち $\hat{\iota}(\Omega^I)$ を $\Sigma^{i,h}(c,t)$ の言葉で述べることができる。

<u>予想</u>　$\Sigma^{i,h}(c,t,s)$ を i) ii), iii) の他に次をみたす。

iv) $\min\limits_{a\in U}\dim\{\delta_a\mathcal{J}\{f\}/\mathcal{J}\{f\}\}=s$

$\Rightarrow$ 　$\Sigma^{i,h}(c,t,s)$ は non singular

特に $t+s=n$ の場合には O.K.、$p-n+i\leqq 2$ の場合には $t=s$ である。

§1 Thom-Boardmann Singularity

$J^2(n,p)$ のThom-Boardmann Singularity $\Sigma^{i,j}$ の詳しい事柄はMather[ ]を見ることにする。

$J^2(n,p)$ の元 f を p 個の2次の多項式の集合として、$f=(f_1,\cdots,f_p)$ と表わす。

$\mathfrak{m}$ を定数項のない多項式環の中の極大イデアルとする $\mathcal{I}\{f_1,\cdots,f_p\}$ を $f_1,\cdots,f_p$ で生成される $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の中のイデアルを表わす。rk によって $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の module の次元を表わす。

定義　$J^2(n,p)$ の中の $M^{i,j}(n,p)$ を次のように定義する。

$f=(f_1,\cdots,f_p)\in M^{i,j}(n,p)\Longleftrightarrow$ 次の①と②が成立する。

① $\mathrm{rk}\ \mathcal{I}\{f_1,\cdots,f_p\}\leqq n-i$

② $\mathrm{rk}\ \delta\mathcal{I}\{f_1,\cdots,f_p\}\leqq n-j$

ここで δ はイデアル $\mathcal{I}$ のJacobian extensionである。

補題　$$M^{i,j}(n,p)=\bigcup_{K\geqq I}\Sigma^K,\quad I=(i,j)$$

（$K=(k_1,k_2)$ の順序（$\geqq$）は辞書式順序である。）

証明　Σ^K の定義の仕方により、$\Sigma^K\ni f$ であることが、次の i) と ii) が成立することと同値であるから。

i) $\mathrm{rk}\ \mathcal{I}\{f_1,\cdots,f_p\}=n-k_1$

ii) $\operatorname{rk} \mathcal{L}\{f_1, \cdots, f_p\} = n - k_2$

定義 $\tilde{i} : J^2(n+1, p) \longmapsto J^2(n, p)$ を $J^2(n+1, p)$ の元 $\tilde{f}$ の $(n+1)$ 番目の座標を 0 にする写像とする。

i.e. $x = (x_1, \cdots, x_n)$ として

$$(\tilde{i} \circ \tilde{f})(x) = \tilde{f}(x, 0) = f(x)$$

この節の目的は、代数的集合 $J^2(n,p) - \tilde{i}(M^{i,j}(n+1, p)^c)$ を定義する多項式を記述して、① と ② を比較すると、

$$J^2(n,p) - \tilde{i}(M^{i,j}(n+1, p)^c) \supseteqq M^{i,j}(n, p)$$

が知られる。そこで等号が成立するための条件（Plessisの定理の一部）と成立しない場合の調査をする準備。

$\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_p)$ を次のように表わす。

$$\tilde{f}_i(x, x_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x_j + a^i x_{n+1} + \sum_{s,t \leqq n+1} b^i_{s,t} x_s x_t$$

$(i = 1, \cdots p)$

$f \in J^2(n,p) - \tilde{i}(M^{i,j}(n+1, p)^c)$ であるための条件は、次の通りである。

$\tilde{i}(\tilde{f}) = f$ となる $\tilde{f}$ に対して、常に $\tilde{f} \in M^{i,j}(n+1, p)$

即ち、①，②の条件を書き直して次が成立。

① $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a^1_1 \cdots & a^1_n & a^1 \\ a^p_1 \cdots & a^p_n & a^p \end{pmatrix} \leqq n+1-i$

② $D(\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_p) / D(x_1 \cdots x_{n+1})$ の $(n-i+2)$ 次小行列式達によって生成される $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の ideal を $\mathcal{J}'$ とすると

$$\mathrm{rk}\,[\mathcal{J}\{\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_p\} + \mathcal{J}'] \leqq n+1-j$$

②の条件は次のように言い換えられる。（証明略）

②′ $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & a^1 \\ & & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} & a^p \end{pmatrix}$ の $(n-i+2)$ 次の小行列式達から生成されるイデアルを $\Delta_{n-i+2}\mathcal{J}$ と書く。

$$\mathrm{rk}\,[\mathcal{J}\{f_1, \cdots, f_p\} + \Delta_{n-i+2}\mathcal{J}] \leqq n-j$$

簡単のために $\delta a \mathcal{J}\{f^1, \cdots, f^p\} = \mathcal{J}\{f^1, \cdots, f^p\} + \Delta\mathcal{J}$ と定義して置く。

注意 Thom-Boardmann Singularity の定義から $i \geqq n+1-p$ である。又 $i = n+1-p$ ならば $M^{i,j} = J^2(n+1, p)$. そこで $i > n+1-p$ の場合だけを考えると、①の条件は

①′ $\mathrm{rk}\,\mathcal{J}\{f^1, \cdots, f^p\} \leqq n-i$

と同値である。

系 $M^{i,j}(n,p) \subseteqq J^2(n,p) - \hat{\imath}\,(M^{i,j}(n+1,p)^c)$

証

i) $i = n+1-p$ の時は $M^{i,j}(n+1,p) = J^2(n+1,p)$

ii) $i > n+1-p$ の時、

もし $\Sigma^{s,h} \ni g$, $s > i$ ならば、次の事柄からO.K.

$$\mathrm{rk}\,\mathcal{J}\{g_1 \cdots g_p\} = n - s < n - i$$

$$\mathrm{rk}[\mathcal{J}\{g_1 \cdots g_p\} + \delta_{n-i+1}\mathcal{J}] = \mathrm{rk}[\mathcal{J}\{g_1, \cdots, g_p\}]$$

もし $\Sigma^{i,h} \ni g$, $j \leqq h$ ならば、注意で述べた事柄と、一般に $\underset{\sim\sim\sim}{\delta_a \mathcal{J}\{g^1, \cdots, g^p\} \subseteq \delta\mathcal{J}\{g^1 \cdots g^p\}}$ が成立することから

$$\mathrm{rk}\,\delta_a \mathcal{J}\{g^1 \cdots g^p\} \leqq \mathrm{rk}\,\delta\mathcal{J}\{g^1 \cdots g^p\} = n - h \leqq n - j$$

(〜〜〜の証)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} & a^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial x_1} & & \frac{\partial f^p}{\partial x_n} & a^p \end{pmatrix}$$

の $a^1 \cdots a^p$ に関係する小行列式は $D(f^1, \cdots, f^p) / D(x_1, \cdots, x_n)$ の $(n-i+1)$ 次の小行列の一次結合で書けるからである。

定理 (Plessis [J]) もし、$j \geqq n - p - \varepsilon$ ならば

$$J^2(n,p) - \tilde{\imath}(M^{ij}(n+1,p)^c) = M^{ij}(n,p)$$

ここで $\varepsilon = 1$ $(i-j>1)$, $\varepsilon = 0$ $(i-j \leqq 1)$

注 補題より、$\bigcup_{k<I} \Sigma^k$ が extensible

(証明) ここでは上述の方法により、Intrinsic derivativeを使わない証明を与える。即ち、系中の証明より、条件①,②から条件①'と②'が言えるから、逆に①'と②'から①と②が上の条件の下に言えることを示す。

①と①′は同じ条件だから、

$$f \in \Sigma^{i} \cap J^{2}(n,p) - \tau(M^{i,j}(n+1,p)^{c})$$

の元が $M^{i,j}(n,p)$ に含まれることを示せば良い。

そこで $(\mathbb{R}^n,0)$, $(\mathbb{R}^p,0)$ の座標を適当に取って

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^p & \cdots & a_n^p \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) = \mathrm{rk}\ が\ n-i$$

であるとする。次に ②′ の条件を線型代数の言葉に書き直す。

$$B_{s,t}^{j} = (b_{s,t}^{j} + b_{t,s}^{j})$$

$$B_t^j = (B_{1,t}^j, B_{2,t}^j, \cdots\cdots, B_{n,t}^j)$$

$$B_t^j = (B_{n-i+1,t}^j, B_{n-i+2,t}^j, \cdots, B_{n,t}^j)$$

で表わす。

$\Delta_{n-i+2}\,\ell\{f^1,\cdots,f^p\}$ は ②′ の行列の形より

$$a^{\ell}\Big(\sum_s B_{s,t}^j x_s\Big) - a^j\Big(\sum_s B_{s,t}^{\ell} x_s\Big)$$

$$= \sum_s (a^{\ell} B_{s,t}^j - a^j B_{s,t}^{\ell})\, x_s$$

$$\ell \neq j, \quad n-i+1 \leqq \ell, j \leqq p, \quad n-i+1 \leqq t \leqq n$$

で生成される。

②′の条件

$$\mathrm{rk}\ \delta\,\mathrm{ad}\{f^1,\cdots,f^p\} \leqq n-j$$

を書き直すと、

$$\mathrm{rk}\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{matrix} & O \\ \hline O & O \\ \multicolumn{2}{c}{\text{この部分に次の行ベクトルを並べる}} \\ \multicolumn{2}{c}{a^l B^j_t - a^j B^l_t} \\ \multicolumn{2}{c}{l \neq j,\ n-i+1 \leqq l, j \leqq p,\ n-i+1 \leqq t \leqq n} \end{array}\right) \leqq n-j$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rk}\left(\begin{array}{c} a^l B^j_t - a^j B^l_t \\ l \neq j,\ n-i+1 \leqq l, j \leqq p,\ n-i+1 \leqq t \leqq n \end{array}\right) \leqq (n-j)-(n-i) = i-j$$

B^j $(n-i+1 \leqq j \leqq p)$ を次の i 次の対称行列とする。

$$\begin{pmatrix} B^j_{n-i+1,\,n-i+1}, & \cdots & B^j_{n-i+1,\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ B^j_{n,\,n-i+1}, & \cdots & B^j_{n,\,n} \end{pmatrix}$$

<u>補題</u>　条件②' は次に同値である。

(*) すべての $(a^1, \cdots, a^p)$ に対して行列

$(\cdots, a^l B^j - a^j B^l, \cdots) = B(a^1, \cdots, a^p)$

をつくると、その階数が $(i-j)$ 以下である。

<u>注</u> (**) f が $M^{i,j}(n,p)$ の元であるための条件は、

行列　$(B^{n-i+1}, \cdots, B^p)$

の階数が $(i-j)$ 以下である。故に問題は、(*)から(**)を言えば解決する。

容易に確かめられるように、$a=(a^1,\cdots,a^p)$ に対して、行列 $X(a)$ が存在して、(成分は $a^1,\cdots,a^p$ からなる。)

$$(\cdots\cdots, a^l B^j - a^j B^l, \cdots\cdots) = (B^{n-i+1}, \cdots, B^p)\, X(a)$$

と書けるが、適当な $(B^{n-i+1}, \cdots, B^p)$ に対して、(*)が成立するが、(**)が成立しないとすると、$\underbrace{(R^i)\oplus\cdots\oplus(R^i)}_{p-n+i\text{コ}}$ の中に $(i-j)$ より大きい次元の空間 V が存在して、(注、$(B^{n-i+1}, \cdots, B^p)$ の行ベクトル~~の転置~~で生成される空間)

$\forall a=(a^1,\cdots,a^p)$ に対して

$$\dim\{V \cap \operatorname{Ker}[X(a)^*]\} \geqq \dim V - (i-j)$$

こゝで、$X(a)^*$ は $X(a)$ からできる線型写像。

次の補題により、適当に $a_{n-i+1}\cdots a_p$ を取ると(証、略)

補題 $\operatorname{Ker} X(a_1)^* \oplus\cdots\oplus \operatorname{Ker} X(a_p)^* = (R^i)^{p-n+i}$

故に

$$V = V \cap \sum_j \operatorname{Ker} X(a_j)^* \geqq \sum_j [V \cap \operatorname{Ker} X(a_j)^*]$$

即ち、$\dim V \geqq (p-n+i)\,[\dim V - (i-j)]$

ε に関しては V が対称行列、B^j、から造られていることを考慮すれば良い。(この点は Plessis の ~~補題参照~~)

§2

前節で述べたように $J^2(n,p)-\tilde{i}\left(M^{ij}(n+1,p)^c\right)$ は代数的集合である。H. Whitney[ ] により、代数的集合は有限個の nonsingular-mfds の disjoint union で表わせる。(ここでは Whitney condition は考えない。) これから $J^2(n,p)$ の多様体への分割が得られる。一方 Thom-Boardman Singularity Σ^I も $J^2(n,p)$ の多様体分割を与えている。そこで次に、この両方に共通の多様体分割を具体的に記述する問題を考える。H. Whitney の理論は一般的すぎて、この場合に適用しても、具体的な分割の情報を教えてくれないので、別の方法を求める。

方針 $\Sigma^{i,h} \cap J^2(n,p)-\tilde{i}(\ \ 〃\ \ ) = X$ の分割

$f \in X$ とすると、$a^1,\cdots,a^p$ に対してベクトル空間 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の submodule $\delta a \mathcal{J}\{f^1,\cdots,f^p\}$ が与えられる。それから

$$\Phi : X \longmapsto \mathrm{Map}\{\mathbb{R}^P, GL_{n-j,j}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)\}$$

という写像を構成する。但し次が成立するように

$$\Phi(f)(a) \cong \delta a \mathcal{J}\{f^1,\cdots,f^p\}$$

$(\mathbb{R}^n,0)$ の座標変換、$L^2(n)$ ($=J^2(n,n)$ の nonsingular elements) は $GL_{n-j,j}$ に自然に働く。$L^2(p)$ は $\mathbb{R}^P$ に $L^1(p)$ の部分が自然に働く。この operation の下

に Φ は $L^2(n)\times L^2(p)$ equivariant である。

そこで Image $\Phi(X)$ の多様体分割を考えて、その個々の多様体の上にΦを制限すると、Φがsmooth fibre bdleであることを示す。

§1の ②′ の条件は

$$A_j = B\begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \overset{j}{1} & 0\cdots 0\end{pmatrix},\quad n-i+2\leqq j\leqq p$$

$$A_p = B\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

と置くと、

(イ) すべての $(a^1,\cdots,a^p)$ に対して、$\mathrm{rk}\sum_{n-i+1\leqq s\leqq p}(a_s A_s)\leqq i-j$

と書ける

$f\in\Sigma^{i,h}$ であったから

(ロ) $\{V(\Sigma a_s A_s)\}_{a\in\mathbb{R}^*}$で生成される $\mathbb{R}^i$ の部分空間は、次元が $(i-h)$ の $V((B^{n-i+1},\cdots,B^p))$ に等しい。

ここで 行列 A に対して $V(A)$はAの列ベクトルで生成される部分空間とする。 $\mathbb{R}^{p-n+i}$の open dense set を

$$U=\{(a^1,\cdots,a^p)\in\mathbb{R}^{p-n+i}\mid \dim V(\Sigma a_s A_s)=i-j\}$$

$(\mathbb{R}^i)$ の部分空間 C を次のように置く。

$$C_1=\bigcap_{a\in U}V(\Sigma a_s A_s)\qquad C_2=V((B^{n-i+1},\cdots,B^p))^{\perp}$$

$$C=C_1+C_2$$

A_jを $\mathbb{R}^i$ への線型写像、A_j^* と見立て、射影 $\pi^*:\mathbb{R}^i\longrightarrow\mathbb{R}^i/C$ と結合して $\pi^*\circ A_j^*=\overline{A}_j^*$ を考える。

(イ) すべての $(a^1,\cdots,a^p)$ に $\quad \dim \mathrm{Im}(\sum a_s \overline{A}_s^*) \leqq i-j-c-h$

(ハ) $\displaystyle\bigcap_{U \ni a} \mathrm{Im}\ (\sum a_s \overline{A}_s^*) = \{0\}$

補題　上で与えられた $B^{n-i+1}, \cdots, B^p$ に対して、階数が $(p-n+i)$ の行列 (a_{lj}) $n-i+1 \leqq j \leqq p$，$1 \leqq l \leqq i-c-h$ と $(i-c-h)$ 次の正則行列 T があって

$$\begin{pmatrix} a_1^l & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{i-c-h}^l \end{pmatrix} T\overline{B}^j = \begin{pmatrix} a_1^j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{i-c-h}^j \end{pmatrix} T\overline{B}^l$$

こゝで $\overline{B}$ は π^* によって B から造られる行列。

（証明）　条件 (ハ) より、 $\displaystyle\bigcap_{U \ni a} \mathrm{Im}(\sum a_s \overline{A}_s^*)^{\perp} = \mathbb{R}^i/C$ が言える。

そこで、$\mathbb{R}^i/C$ の basis $x_1, \cdots, x_{i-c-h}$ を 各 x_s が どれかの $(\mathrm{Im}(\sum a_s \overline{A}_s^*))^{\perp}$ に入るように取ると

$${}^t x\ (\cdots, a^l \overline{B}^j - a^j \overline{B}^l, \cdots) = 0$$

$$\text{i.e.} \quad a_s^l\, {}^t x_s \overline{B}^j = a_s^j\, {}^t x_s \overline{B}^l \quad , \quad n-i+1 \leqq l, j \leqq p$$

こゝで x_s に対して $a_s^{n-i+1}, \cdots, a_s^p$ が対応する。

これより

$$\begin{pmatrix} a_1^l & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i-c-h}^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t x_1 \\ \vdots \\ {}^t x_{i-c-h} \end{pmatrix} \overline{B}^j = \begin{pmatrix} a_1^j & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i-c-h}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t x_1 \\ \vdots \\ {}^t x_{i-c-h} \end{pmatrix} \overline{B}^l$$

$\begin{pmatrix} {}^t x_1 \\ \vdots \\ {}^t x_{i-c-h} \end{pmatrix} = T$ と置く。行列 (a_{ij}) の階数が、

$(p-n+i)$ であることは次のように示される。

もし階数が $(p-n+i)$ より小であるとすると、$(\exists\lambda_{n-i+1},\cdots\lambda_p)$ $\neq 0$ が存在して

$$T\left(\sum \lambda_j \bar{B}_j\right) = 0 \text{ matrix}$$

$$\text{i.e.}\quad \left(\sum \lambda_j \bar{B}_j\right) = 0 \text{ matrix}$$

このことより (ロ)の条件が満足されず、

$$\dim V((B_{n-i+1},\cdots,B_p)) = i-j < i-h$$

となり矛盾する。

(この部分で $T^*A_j^*$ の形を考える。)

系 $a_j^\ell \neq 0 \quad (\forall \ell, j)$

証. (ロ)の条件から

系 $\bar{B}^j$ の階数は j によらず一定である。特に $p-n+i=2$ の場合には、$rk\,\bar{B}^\ell=(i-j)$ でなければならず、またすべての a^{n-i+1}, a^{n-i+2} に対して、$rk\,(a^{n-i+1}\bar{B}^{n-i+1}+\bar{a}^{n-i+2}\bar{B}^{n-i+2})=(i-j)$

系 $2\leqq p-n+i\leqq i-c-h$ i.e. $p+c+h\leqq n$

これらの系は $\Sigma^{i,h}\cap J^2(n,p)-\tilde{\iota}\,(M^{i,j}(n+1),p)^c)\neq\phi$ の場合に成立する事柄である。

以下 $p-n+i=2$ の場合を考える。この場合には、補題より $\bar{B}^{n-i+1}$ と $\bar{B}^{n-i+2}$ を同じ R^i の変換で、$i-j+1$ 列から i 列までが 0 ベクトルであるようにできる。故に

2つの$(i-j,\ i-c-h)$行列F_1, F_2が存在して（階数はいずれも$(i-j)$）

(イ) $V(aF_1+bF_2)=V(aB^{n-i+1}+bB^{n-i+2})$

(ロ) $V(F_1)+V(F_2)=\mathbb{R}^i/C$

(ハ) $\dim V(aF_1+bF_2)=i-j$ unless $a=0,\ b=0$

$$\bigcap_{(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{0\}} V(aF_1+bF_2)=\{0\}$$

補題　$F(i-j,\ i-c-h)=F$ を行列空間とする。
$F\times F$ の中で、(ロ), (ハ)を満足する集合は open set である。

上の集合を $U(i-j,\ i-c-h)$ と置く

補題　$V(aF_1+bF_2)=V(a\,{}'F_1+b\,{}'F_2)$ $(\forall a,b)$
$\Longrightarrow$ 適当な$(i-j)$次の正則行列Sに対して
$F_1={}'F_1S$, $F_2={}'F_2S$

$\mathbb{R}^n$の Grassman mfds を考える。

$$G_{n-h,\,n-i+c}(\mathbb{R}^n)=\left\{(V_1,V_2)\ \middle|\ \begin{array}{l}\dim V_1=n-h,\ \dim V_2=n-i+c\\ V_1\supseteq V_2\end{array}\right\}$$

これは容易に mfd であることが判る。

$\xi \longmapsto G_{n-k,\, n-i+c}\ (\mathbb{R}^n)$

を V_1/V_2 の $(i-j)$ frame $F(V_1/V_2)$ を associate したbdleとする。

$\xi \times \xi \overset{\pi}{\longmapsto} G$ の中の sub-bdle $\mathcal{U} \longrightarrow G$

を

$$\mathcal{U} = \left\{ \xi\times\xi \ni (F_1, F_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \pi(F_1, F_2) = (V_1, V_2) \\ \bigcap_{(a,b)\neq(0,0)} V(aF_1 + bF_2) = \{0\} \\ V(F_1) + V(F_2) = V_1/V_2 \\ \dim V(aF_1 + bF_2) = i-j \end{array} \right\}$$

において定義する。

$\mathcal{U}$ の fibre は $U(i-j,\ i-c-k)$ である。$\mathcal{U}$ に $GL(i-j)$ が operate するから $\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}/GL(i-j)$

（Φの構成）

以下 $p-n+i=2$

$f \in \Sigma^{i,k} \cap J^2(n,p) - \hat{i}\,(M^{i,j}(n+1,p)^c)$

に対して、$\Phi(f)$は次で与えられる。

$V_1 = \delta\mathcal{J}\{f^1, \cdots, f^p\} \qquad V_2 = \mathcal{J}\{f^1, \cdots, f^p\} + C$

F_1, F_2 は補題で与えられたもの（(イ)）

すると、$\Phi(f)(a,b) = \mathcal{J}\{f^1, \cdots f^p\} + C + V(aF_1 + bF_2)$

定義 $\Sigma^{i,k}(c,\, i-j)$ を次の条件で定義する。

(i) $f \in \Sigma^{i,h} \cap [J^2(n,p) - \hat{i}(M^{i,j}(n+1,p)^c)]$

(ii) $U = \{(a^1 \cdots a^p) \mid \dim \delta a\, \mathscr{I}\{f^1 \cdots f^p\} = i-j\}$

$\bigcap_{U \ni a} \delta a\, \mathscr{I}\{f^1 \cdots f^p\} / \mathscr{I}\{f^1, \cdots f^p\}$ の次元が c

<u>定理</u>　$\Phi|_{\Sigma^{i,h}(c,i-j)}$; $\Sigma^{i,h}(c,i-j) \longrightarrow \hat{\mathcal{U}}$

は smooth differentiable fibre bdle

<u>証明</u>

$\hat{\mathcal{U}}$ の元 C ; $\mathbb{R}^2 - 0 \longmapsto GL_{i-j,\, n-i+j}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$

$V = \{f \in J^2(n,p) \mid \delta a\, \mathscr{I}\{f_1 \cdots f_p\} \subseteqq C(a,b)\}$

とすると

$\delta a\, \mathscr{I}\{f+g\} \subseteqq \delta a\, \mathscr{I}\{f^1 \cdots f^p\} + \delta a\, \mathscr{I}\{g^1 \cdots g^p\}$

だから V は vector subspace である。

一方適当な $a \in \mathbb{R}^p$ に対して $\dim \delta a\, \mathscr{I}\{f_1 \cdots f_p\} = i-j$

即ち、$\delta a\, \mathscr{I}\{f_1, \cdots, f_p\} = C(a,b)$ は V の中の open condition

だから $\Phi|_{\Sigma^{i,h}(c,i-j)}$ の fibre は open mfd R_C を与える。

そこで

φ ; $U(i-j, i-c-h) \times R_C \times L^2(n) \times L^2(p) \longmapsto J^2(n,p)$

を $L^2(n) \ni g$, $L^2(p) \ni h$ に対して

$\varphi\{(F_1, F_2) \times (f_1 \cdots f_p) \times g \times h\} = h \circ f \circ g$

こゝで、$f=(f^1, \cdots f^p)$ によって §2で行なってきた操作(イ)で $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) \in U(i, j, i-c, j-k)$ が得られるものとする。
φ はconstant rkであることが、今までの構成から判る。故にconstant rk theoremにより、$\mathrm{Im}\,\varphi$、即ち $\Sigma^{i,k}(c_2, i-j)$ はmfdである。

locally Zariski closedであることは容易に調べられる。

§3 Example

<u>その1</u> §2の最も簡単な場合は $\tilde{i}\,;\, J^2(4,2) \to J^2(3,2)$ の場合で§1の定理の等号の成立しないのは、nontrivial caseは $M^{3,1}$ の場合である。この時、

$$\Sigma^{3,0} \cap \left[J^2(3,2) - \tilde{i}\left(M^{3,1}(4,2)^c \right) \right] = \Sigma^{3,0}(1,2)$$

系 $\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \left(\Sigma^{3,0} - \Sigma^{3,0}(1,2) \right)$ はextensibleである。

<u>その2</u> 次に簡単な場合は $\tilde{i}\,;\, J^2(5,2) \longmapsto J^2(4,2)$ の場合で、§1の定理の等号の成立しないのは、non trivial caseで、$M^{4,2}$ と $M^{4,1}$ である。このとき

$$\Sigma^{4,0} \cap \left[J^2(4,2) - \tilde{i}\left(M^{4,1}(5,2)^c \right) \right]$$

$$= \Sigma^{4,0}(2,3) \cup \Sigma^{4,0}(1,3)$$

$$\Sigma^{4,0} \cap [J^2(4,2) - \tilde{i}(M^{4,2}(5,2)^c] = \Sigma^{4,0}(0,2)$$

$$\Sigma^{4,1} \cap [J^2(4,2) - \tilde{i}(M^{4,2}(5,2)^c] = \Sigma^{4,1}(1,2)$$

系　$\Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup (\Sigma^{4,0} - (\Sigma^{4,0}(2,3) \cup \Sigma^{4,0}(1,3)))$ は extendible

$\Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup (\Sigma^{4,0} - \Sigma^{4,0}(0,2) \cup \Sigma^{4,1}(1,2))$ は extendible

文献

Andrew du Plessis ; Maps without certain Singularities ; Comment. Math. Helvetici. 1975

Mather ; On Thom-Boardman Singularities Peixotoの論文集

H. Whitney ; Elementary structure of algebraic set.