数理解析研究所講究録
第 286 巻 1977 年 46-55

Codimension 1 foliation の proper leaf の stability

東大理　稲葉尚志

§1. 定義

$(M, \mathcal{F})$, $(M', \mathcal{F}')$ を 2 つの codimension 1 foliation とする。$\varphi : (M, \mathcal{F}) \longrightarrow (M', \mathcal{F}')$ が、foliation-preserving homeomorphism であるとは、$\varphi : M \longrightarrow M'$ が homeo であり、かつ $\mathcal{F}$ の任意の leaf に対し、その φ による像が $\mathcal{F}'$ の leaf であるときにいう。

$(M, \mathcal{F})$ を codim 1 foliation とし、$\pi : M \longrightarrow M/\mathcal{F}$ を leaf space への canonical projection とする。M の部分集合 S の saturation とは、$\pi^{-1}\pi S$ のことである。$S = \pi^{-1}\pi S$ のとき S は saturated であるという。

$\mathcal{F}$ の leaf L が $\mathcal{F}$ の中で stable であるとは、L の saturated 近傍 $(U, \mathcal{F}|U)$ と、product foliation $(L \times \mathbb{R}, (L \times \{t\})_{t \in \mathbb{R}})$ から $(U, \mathcal{F}|U)$ への foliation-preserving homeo φ で、$\varphi(L \times \{0\}) = L$ となるものが、存在するときにいう。

以下 $\mathcal{F}$ は transversally oriented で $C^r (r \geq 1)$ であるとする。更に

$\mathcal{F}$に transverse な M 上の vector field を一つ固定し、その積分曲線たちの定める dim 1 foliation を $\mathcal{T}$ とかく。

点 $x \in M$ を通る $\mathcal{F}$ の leaf を L_x, $\mathcal{T}$ の leaf を T_x とかく。

$\mathbb{R}$ に於ける 0 の開近傍 U をとり、$P: U \times [0,1] \longrightarrow M$ なる連続写像で、次の諸性質を満たすものを考える（以下 これを <u>projector</u> と呼ぶことにする)。

i) $P(t, s) \in L_{P(t,0)} \cap T_{P(0,s)}$ for $\forall t \in U$, $\forall s \in [0,1]$,

ii) $P(0, 0) = P(0, 1) = x$,

iii) $P|U \times \{0\} : U \longrightarrow M$ は embedding.

このとき、$\gamma_P : P(U \times \{0\}) \longrightarrow P(U \times \{1\})$ を、

$$\gamma_P(P(t,0)) = P(t,1)$$

で定義すれば、これは、T_x の x を fix する orientation preserving local diffeomorphism になる。<u>L_x の x における holonomy pseudogroup $\mathcal{HP}(L_x, x)$</u> とは、このようにして得られる γ_P 全体のなす pseudo-group である。$\mathcal{HP}(L_x, x)$ の各元の x における germ をとることによって得られる群を <u>L_x の x における holonomy group</u> といい <u>$\mathcal{H}(L_x, x)$</u> とかく。

$l_P : [0,1] \longrightarrow L_x$ を、$l_P(s) = P(0,s)$ と定義すれば、l_P は、$\pi_1(L_x, x)$ の元を代表しているとみられるが、このとき、

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(L_x, x) & \longrightarrow & \mathcal{H}(L_x, x) \\ \{l_P\} & \longmapsto & \gamma_P \text{ の germ} \end{array}$$

という map が well-defined onto homomorphism になることが知られている。

x の T_x における近傍 N が存在して、任意の $\gamma \in \mathcal{HP}(L_x, x)$ に対して、γ の定義域が N に含まれるならば γ は恒等写像であるとき、$\mathcal{HP}(L_x, x)$ は <u>locally trivial</u> であるという。

$\mathcal{HP}(L_x, x)$ の local triviality や $\mathcal{H}(L_x, x)$ の isomorphism class は、点 $x \in L_x$ のとり方によらないことが容易にわかるので、以下では略して、$\mathcal{HP}(L_x)$, $\mathcal{H}(L_x)$ などと書く。

§2. 紹介

compact leaf に対する stability に関しては、現在に至るまでに多くの成果が得られている (cf. G. Reeb [6], A. Haefliger [1] p.381, W. Thurston [8], J. Plante [5] p.355 etc.) が、その中で最も代表的なのが次の定理である。

<u>定理1</u>. $L \in \mathcal{F}$ を compact leaf とする。

$$\mathcal{H}(L) = \{1\} \iff L \text{ は stable 。}$$

注) この定理は、$\mathcal{F}$ の codim 任意で成立する。

この小文では、上の定理を proper leaf に拡張しようと試みる。(注) compact leaf は、常に proper である。) 以下に記すのがそれに関する総まとめである。

I. codim >1 では、一般には holonomy と stability とは結びつかない。

II. <u>定理2</u>. $L \in \mathcal{F}$ を、proper で Σ が compact であるものとするとき、

$$\mathcal{HP}(L) \text{ が locally trivial} \iff L \text{ が stable。}$$

III. <u>定理3</u>. M を closed 3-manifold, $L \in \mathcal{F}$ を proper leaf とするとき、

$$\mathcal{H}(L) = \{1\} \text{ かつ } \pi_1(L) \text{ が有限生成} \Longrightarrow L \text{ は stable。}$$

IV. 定理3において $\pi_1(L)$ 有限生成の仮定を除くと、反例がある（H. Imanishi [3] P621-622）。

V. <u>問題.</u> 定理3は、$\dim M > 3$ でも成り立つか？

IIの証明は、退屈にして長いのでここでは省略する。IVも今西氏の論文を参照して頂くことにして、ここでは扱わない。

§3. Iについて

$T^3 = \{(x, y, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$。$T^3$ 上の 1-forms ω_1, ω_2 を次のように定義する。c.f. [6] P114。

$$\omega_1 = d\theta$$

$$\omega_2 = \{(1-\sin\theta)^2 + x^2\} d\varphi + \sin\theta \, dx$$

このとき、$\omega_1 = \omega_2 = 0$ によって定義される codim 2 foliation

は、$\theta=\frac{\pi}{2}$のところで non-compact proper leafをもつが、stableでない。(なぜなら、このfoliationは、$\theta \neq \frac{\pi}{2}$では、全てcompact leafばかりであるから。)一方、一般にleafが$\mathbb{R}$にhomeomorphicであるとき、そのleafのholonomy pseudogroupは、locally trivialであることが証明できる。従ってこの例は、定理2、定理3が codim>1では不成立であることを示している。

§4. Ⅲについて

定理3の証明をおこなう。

$\gamma \in \mathcal{HP}(L_x, x)$のとき、$\gamma$の定義域を$D(\gamma)$とかく。$x$を基点とする$L_x$内のloop ℓに対して、ℓをinduceするようなprojector $P: U \times [0,1] \longrightarrow M$のうちで、$P(U \times \{0\})$が連結であり、包含関係による順序に関して極大であるようなものを一つとりP_ℓとかく。P_ℓがinduceする$\mathcal{HP}(L_x, x)$の元をγ_ℓと書く。γ_ℓは、P_ℓのとり方によらない。

<u>補題1.</u> M, $\mathcal{F}$は定理3の仮定と同じとする。xをMの任意の点とし、αを$\pi(L_x, x)$の任意の元とする。このとき、T_xにおけるxの近傍N_αで、次の条件を満たすものが存在する。

i) $N_\alpha \subset D(\gamma_\ell)$となる$\ell \in \alpha$が少くとも一つ存在する。

ii) 任意のℓ, $\ell' \in \alpha$と、任意の$t \in N_\alpha \cap D(\gamma_\ell) \cap D(\gamma_{\ell'})$

に対して $\gamma_l(t)=\gamma_{l'}(t)$ が成り立つ。

<u>証明</u>. $N'_\alpha=\{y\in T_x \mid \gamma_l(y)=\gamma_{l'}(y)\ \underset{\text{if defined.}}{\text{for}\ \forall l, l'\in\alpha}\}$ とし、N_α は N'_α の x を含む連結成分とする。以下 N_α が x の近傍でないとして矛盾を導く。

$\mathcal{F}$ が transversally oriented であると仮定していたから、T_x に、induced orientation がはいる。そこで T_x には、正の方が大であるとする全順序を入れておく。

さて N_α が x の近傍でないとしたから、T_x の無限点列 $\{x_i\}$ と、L_x の x を基点とする loop の無限列の組 $\{l_i\}$, $\{l'_i\}$ で、次の性質を満たすものが存在するとして一般性を失わない。(もし必要なら $\mathcal{F}$ の transverse orientation を逆にせよ。)

i) $x_i>x$, $\lim_{i\to\infty}x_i=x$

ii) $l_i,\ l'_i\in\alpha$

iii) $\gamma_{l_i}(x_i)\neq\gamma_{l'_i}(x_i)$

以下一つの i に注目する。$l_i'^{-1}*l_i\simeq 0$ と $\gamma_{l_i'^{-1}*l_i}\neq id$ であることに注意しておく。

$$z_i=\inf\{y\in D(\gamma_{l_i'^{-1}*l_i}) \mid y\neq\gamma_{l_i'^{-1}*l_i}(y),\ y>x\}$$

とおくと、$z_i\neq x$, $z_i=\gamma_{l_i'^{-1}*l_i}(z_i)$ であり、loop $l_{z_i}:[0,1]\to L_{z_i}$ を、$l_{z_i}(t)=P_{l_i'^{-1}*l_i}(z_i,t)$ で定義するとき、l_{z_i} は、L_{z_i} の中で homotopic to zero でない。($\because$ l_{z_i} の induce する $\mathcal{H}(L_{z_i})$ の元が non-trivial。) そこで次に、

$$w_i = \inf\left\{ y \in D(\gamma_{l_i'^{-1} * l_i}) \;\middle|\; \begin{array}{l} y = \gamma_{l_i'^{-1} * l_i}(y) であり, \ y > x, \\ \text{induced loop } l_y \not\simeq 0 \text{ in } L_y \end{array} \right\}$$

とおくと、$w_i \neq x$ で、$l_{w_i} \not\simeq 0$ in L_{w_i}。($\because$ holonomy 補題により、$l_{w_i} \simeq 0$ ならば、その近傍の induced loop も $\simeq 0$ であり、w_i が下限であることに反する。) l_{w_i} は、S.P. Novikov の意味の <u>vanishing cycle</u> である。これに関しては、Novikov の次の定理がある。[2]

<u>定理4</u>. M が compact 3-manifold のとき、vanishing cycle をもつ leaf は、compact leaf である。

この定理により、L_{w_i} は compact leaf である。各 i に対してこのような compact leaf が見つかり、$x_i > w_i > x$, $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ であるから、

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} L_{w_i}} \supset L_x 。$$

ところが、codim 1 foliation においては、次の定理がある。[1]

<u>定理5</u>. $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をコンパクトな leaf の族とするとき、$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda}$ に属する leaf は全てコンパクトである。

この定理により、L_x 自身が compact leaf になるが、compact leaf に対しては、補題の結論は容易に得られる。よって補題は証明された。

<u>補題2</u>. M, $\mathcal{F}$ は、定理3の仮定と同じ。L を $\pi_1(L)$ が有限生成であるような $\mathcal{F}$ の leaf とする。そのとき、

$$\mathcal{H}(L) = \{1\} \Longleftrightarrow \mathcal{HP}(L) \text{ が locally trivial。}$$

<u>証明</u>. $\Leftarrow$ は明らかであるから、$\Rightarrow$ を示す。$x \in L$ とする。$\pi_1(L, x)$ の生成元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ をとる。今、$\mathcal{H}(L, x) = 1$ であるから、補題1の N_α は、必要なら小さくとりかえることにより、任意の α と任意の $l \in \alpha$ に対して $\gamma_l | D(\gamma_l) \cap N_\alpha = id$ となるようにとってあるとしてよい。$N = \bigcap_{i=1}^{k} N_{\alpha_i}$ とおく。任意の $\gamma_l \in \mathcal{HP}(L, x)$ に対して $\gamma_l | D(\gamma_l) \cap N = id$ が示されれば、定義により $\mathcal{HP}(L, x)$ は locally trivial である。

$l \simeq l_1 * l_2 * \cdots * l_q$ とする。但し各 j に対し $l_j \in \alpha_{i_j}$ または $l_j^{-1} \in \alpha_{i_j}$ for $1 \leqq {}^\exists i_j \leqq k$, かつ l_j は条件 i) を満たす (i.e. $D(\gamma_{l_j}) \supset N$) とする。$\gamma_{l_{q-1}^{-1} * l_{q-2}^{-1} * \cdots * l_1^{-1} * l}$ を考える。$l_{q-1}^{-1} * l_{q-2}^{-1} * \cdots * l_1^{-1} * l \simeq l_q \in \alpha_{i_q}$ であるから補題1により、$\gamma_{l_{q-1}^{-1} * l_{q-2}^{-1} * \cdots * l_1^{-1} * l}$ は N 内で定義される限り identity。一方、$D(\gamma_l) \cap N$ において、下の式は全て定義されて等号が成り立つ。

$$\gamma_l = \gamma_l \circ \gamma_{l_1}^{-1} \circ \cdots \circ \gamma_{l_{q-1}}^{-1} = \gamma_{l_{q-1}^{-1} * l_{q-2}^{-1} * \cdots * l_1^{-1} * l} \,。$$

よって γ_l は、N 内で定義される限り identity。以上により補題2が示された。

<u>定理3の証明</u>. 補題2により、定理3の条件下で $\mathcal{HP}(L)$ が locally trivial であることが導かれた。よって定理2により、結論が従う。

§5. その他

次の2つの命題は、定理2から容易に導かれる。

<u>命題1</u>. $\mathcal{F}$が2-manifold上のcodim 1 foliationであるとする。
$\mathcal{F}$のproper, relatively compact leaf Lが$\mathcal{H}(L)=\{1\}$ならば、stableである。

<u>命題2</u>. $\mathcal{F}$が実解析的なcodim 1 foliationであるとする。
$\mathcal{F}$のproper, relatively compact leaf Lが$\mathcal{H}(L)=\{1\}$ならば、stableである。

参考文献

1. A. Haefliger, Variétés feuilletées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962), 367-397.
2. A. Haefliger, Travaux de Novikov sur les feuilletages, Seminaire Bourbaki 20e année, 1967/68, no. 339.
3. H. Imanishi, On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy, J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 607-634.
4. S. P. Novikov, Topology of Foliations, A.M.S. Translation (1967), 268-304.
5. J. Plante, Foliations with measure preserving holonomy 102 (1975), 327-361. Ann. Math.
6. G. Reeb, Sur certains propriétés topologiques des variétés feuilletées, Act. Sci. Ind. no. 1183, Hermann, Paris, 1952.
7. R. Sacksteder and A. J. Schwartz, Limit sets of foliations, Ann. Inst. Fourier 15 (1965), 201-214.
8. W. Thurston, A generalization of the Reeb stability

theorem, Topology 13 (1974), 347–352.