

余次元1の葉層構造の極限集合

東北大 理 西森敏之

M を向きづけ可能 C^∞ 閉多様体とし, \mathcal{F} を M 上の向きづけ可能余次元1 C^r ($r \geq 1$) 葉層構造とする。このとき \mathcal{F} に横断的な C^∞ 流れ $\varphi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ が存在するから1つ固定しておく。

定義1. F を \mathcal{F} のコンパクトでない葉とする。 $U \subset F$ とし,

$$L(U) = \left\{ y \in M \mid \begin{array}{l} \exists \{x_i\}_{i=1}^\infty \subset U \text{ st. } \textcircled{1} F \text{ の位相で集} \\ \text{積点なし. } \textcircled{2} M \text{ の位相で } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = y. \end{array} \right\}$$

とおく。 $L(F)$ を F の極限集合と呼ぶ。

我々の目標は葉 F の行動を調べることであるが, それは極限集合 $L(F)$ の構造を調べることとほぼ同等である。一般に $L(F)$ は連結とは限らなく, $L(F)$ をそのまま扱うのは良策ではない。力学系の定性的理論において α -極限集合, ω -極限集合を考えたように, 葉層構造においては次に述べるように end の極限

集合を考えるのが妥当である。まづ *end* の定義から始める。

定義2. コンパクトでない多様体 F の *end* とは, 空でない連結開部分集合の族 ε で次の (1) ~ (4) をみたすもの。

- (1) 任意の $U \in \varepsilon$ に対して, $\partial U = \text{cl}_F(U) - U$ はコンパクト。
- (2) $U, U' \in \varepsilon \implies \exists U'' \in \varepsilon$ s.t. $U'' \subset U \cap U'$.
- (3) $\bigcap \{U \mid U \in \varepsilon\} = \emptyset$.
- (4) (1), (2), (3) に関して ε は極大族。

end をわかりやすくするには, Morse function $f: F \rightarrow [0, \infty)$ で

- (1) $K \subset [0, \infty)$ がコンパクトならば $f^{-1}(K)$ もコンパクト。
- (2) f の特異点は $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, \dots\})$ に含まれる。

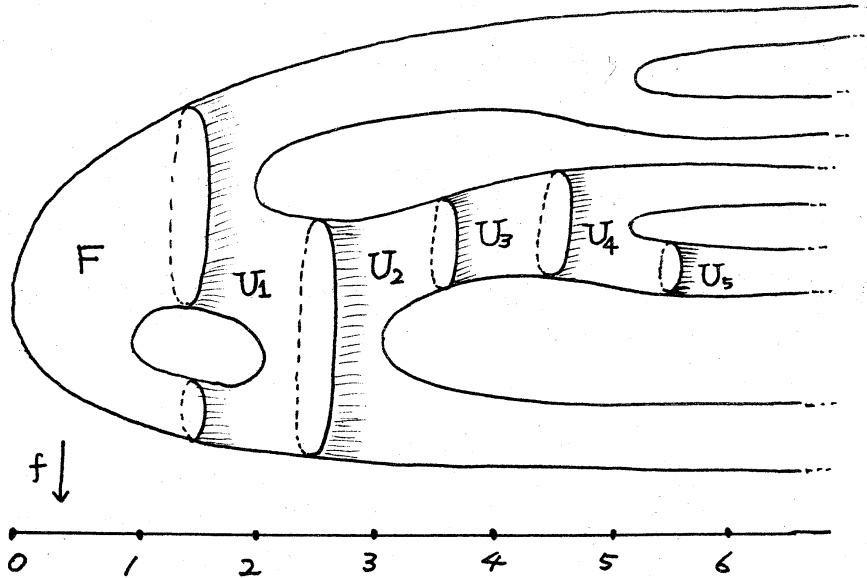
をみたすものを考えると便利である。 f を固定しておいて, F の開集合の減少列 $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ で

- (*) U_i は $f^{-1}((i + \frac{1}{2}, \infty))$ の連結成分
を考える。このとき,

$$\varepsilon = \left\{ U \mid \begin{array}{l} U \text{ は } F \text{ の空でない連結開部分集合で} \\ \partial U \text{ がコンパクトである } U_i \text{ を含むもの.} \end{array} \right\}$$

とおくと ε は F の *end* になり, 逆に F の *end* ε が与えられると ε は (*) をみたす F の開集合の減少列 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ をただひとつ含む。従って対応: $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \mapsto \varepsilon$ により, (*) をみたす F の開

集合の減少列の集合と F の end の集合は同一視できる。



定義3. ε を F の葉 F の end とする。

$$L_\varepsilon(F) = \bigcap_{U \in \varepsilon} \mathcal{O}_M(U)$$

とにおいて, $L_\varepsilon(F)$ を F の ε -極限集合 あるいは ε の 極限集合 と呼ぶ。

上に述べた減少列 $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ を使うと, $L_\varepsilon(F) = \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{O}_M(U_i)$ とかける。実直線 \mathbb{R} は2つの end $\alpha = \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\omega = \{(t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\}$ をもち, カ学系のコンパクトでない軌道 O_x は対応する2つの end α, ω をもつが $L_\alpha(O_x) = L^-(x)$, $L_\omega(O_x) = L^+(x)$ となる。

次に $L(F)$, $L_\varepsilon(F)$ の基本的性質を述べる。

定理 1. (1) $L(F)$, $L_\varepsilon(F)$ は空でない開集合で, いくつかの葉の和になっている. (2) $L(F) = \bigcup_\varepsilon L_\varepsilon(F)$. (3) $L_\varepsilon(F)$ は連結. (必ずしも孤立連結ではない)

最初に考えるべき自然な問題は, いつ $L_\varepsilon(F)$ がコンパクトな一枚の葉になるかという問題であるが, 次のような解答を得る.

定理 2. $L_\varepsilon(F)$ がコンパクトな一枚の葉になるのは次の(1), (2), (3)が成立するときそのときに限る.

- (1) ε は孤立 (ie. $\exists U \in \mathcal{E}$ st. U は他の end に含まれない)
- (2) $L_\varepsilon(F) \cap F = \emptyset$.
- (3) ε は $L_\varepsilon(F)$ に一方側から近づく. (ie. (I) $\forall x \in L_\varepsilon(F)$, $\exists t > 0, \exists U \in \mathcal{E}$ st. $\varphi(\{x\} \times (0, t)) \cap U = \emptyset$ or (II) $\forall x \in L_\varepsilon(F)$, $\exists t > 0, \exists U \in \mathcal{E}$ st. $\varphi(\{x\} \times (-t, 0)) \cap U = \emptyset$).

ここで 定理 2 の必要性 ^{の部分} の証明の概略を述べることにする.

$L_\varepsilon(F) = F_1$ とおく. $F_1 \neq F$ であるから (2) は明らか.

予備定理. $\exists U \in \mathcal{E}$ st. $L(U) = F_1$.

この予備定理を証明したものとして話を進める。 $x_0 \in F_1$ とする。十分小さな $\delta > 0$ をとると $\varphi(\{x_0\} \times (-\delta, \delta)) \cap U$ は可算で離散的位相をもつ。 x_0 から遠い順に番号をつけて

$$\varphi(\{x_0\} \times (0, \delta)) \cap U = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

としてよい。(必要があれば φ の向きを反える)。各閉道

$\omega: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (F_1, x_0)$ に対して, $[0, 1] \times \mathbb{R}$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}_\omega = (\varphi \circ (\omega \times id))^* \mathcal{F}$ を考える。このとき自然数 N と整数 p が存在して, $n \geq N$ ならば $(x_n, 0)$ と $(x_{n+p}, 1)$ は \mathcal{F}_ω の同じ葉の上にある。対応 $\omega \mapsto p$ により準同型写像 $u: \pi_1(F_1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ を得る。 \mathbb{Z} は可換群であるから $u = v \circ H$ をみたす準同型写像 $v: H_1(F_1, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在する。ただし $H: \pi_1(F_1, x_0) \rightarrow H_1(F_1, \mathbb{Z})$ は Hurewicz 準同型である。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(F_1, x_0) & \xrightarrow{u} & \mathbb{Z} \\ H \downarrow & \curvearrowright & \nearrow v \\ H_1(F_1, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

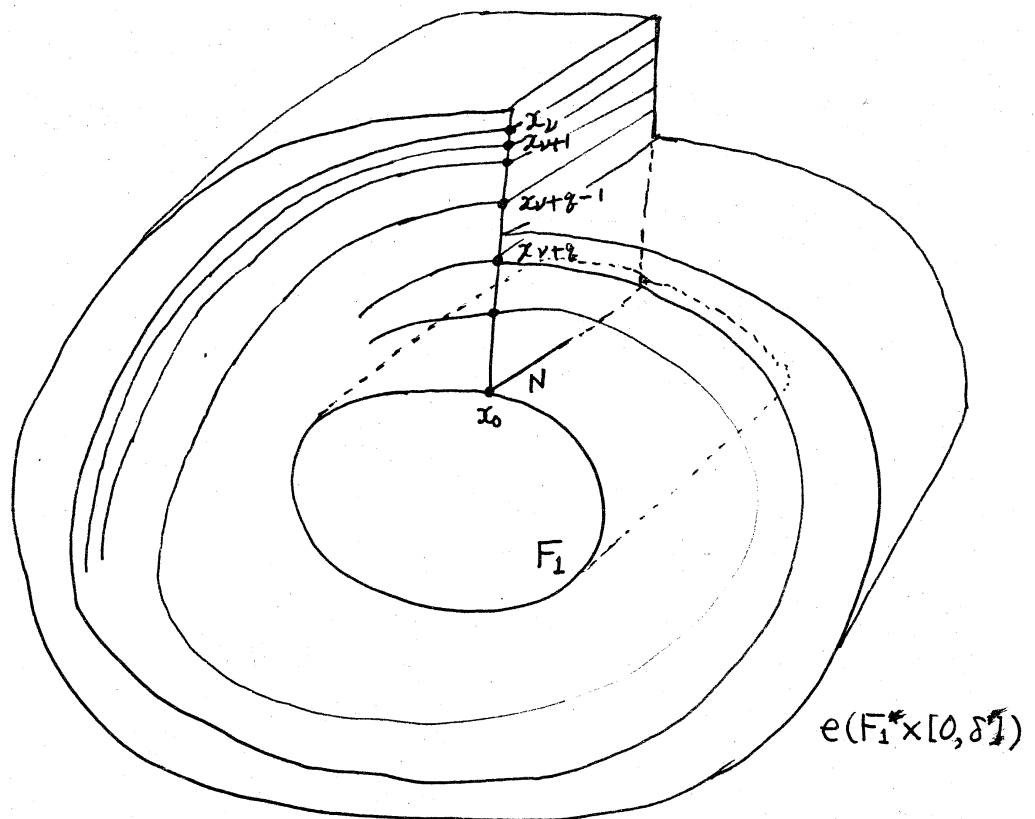
v を $\text{Hom}(H_1(F_1, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong H^1(F_1^{n-1}, \mathbb{Z})$ の元とみなし, Poincaré 双対写像 $d: H^1(F_1^{n-1}) \rightarrow H_{n-2}(F_1^{n-1})$ による像 $d(v)$ を考える。Thom の定理により, F_1 の余次元 1 の部分多様体 N が存在してその基本ホモロジー類 $[N]$ が $d(v)$ と一致する。($n-1 \geq 3$ のときは中塚の定理により N は連結にできる)。連接近傍系を使う

葉層構造の理論の一般的議論を使えば, うめこみ $e: F_1^* \times [0, \delta'] \rightarrow M$ (ただし F_1^* は $F_1 - N$ に N のコピー $-N_1, N_2$ をはりつけて境界 $N_1 \cup N_2$ をもつコンパクト多様体にしたもの) で,

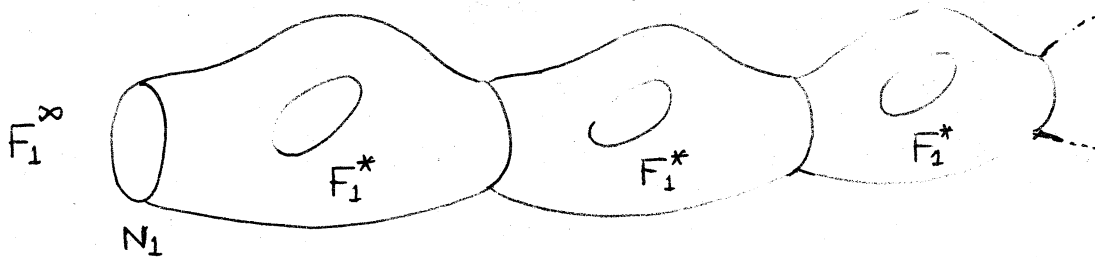
- (1) $e|_{(F_1 - N) \times \{0\}} = \text{identity}$.
- (2) $e(\{x\} \times [0, \delta']) \subset \varphi(\{x\} \times \mathbb{R})$
- (3) $e(F_1^* \times \{t_\nu, t_{\nu+1}, \dots\}) \subset U$ for $\exists U$. $\forall F \in U \varphi(x_0, t_\nu) = x_\nu$
- (4) $e((x_0)_1, t_\nu) = x_\nu, e((x_0)_2, t_\nu) = x_{\nu+g}$.

ただし $\text{Im } \mu = g\mathbb{Z}$. $x_0 \in N, (x_0)_1 \in N_1, (x_0)_2 \in N_2$,

を満たすものが存在することがわかる。($e(F_1^* \times \{t\})$ は一般には子一枚の葉に含まれるわけではない)



F_1^* を可算個 N_2 と N_1 を同一視することによりはりつけて得られる多様体を F_1^∞ とおくと, $U \cap e(F_1^* \times [0, \delta'])$ は F_1^∞ の n 個の離散的和になっている。



$L_\varepsilon(F) = F_1$ であることから $\exists U_0 \in \varepsilon$ st. $U_0 \subset U \cap \text{Im} e$.
従って U_0 は F_1^∞ と同位相な F の部分集合に含まれる。明らかに F_1^∞ は 1 つしか end をもたないので, ε が孤立 end であるということがわかる。同時に定理 2 の条件 (3) が成立することもわかる。

この証明から end ε が 極限集合 $L_\varepsilon(F)$ にどのように巻きついていくかもわかることを注意しておく。定理 2 の十分性の部分の証明は省略する。

次に定理 2 の拡張をする。図式的には

$$\varepsilon \text{ についての条件} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{定理3}} \\ \xleftarrow{\text{定理4}} \end{array} L_\varepsilon(F) \text{ の構造}$$

のように 2 つの部分にわけて行う。結果を述べるためにいくつかの定義を準備する。

定義4. $d(F) = \text{Sup} \{ \ell | \exists F_1 < \dots < F_\ell = F \}$

ただし $F_1 < F_2 \iff F_1 \subset \bar{F}_2$ かつ $F_1 \neq F_2$.

定義5. $d(\varepsilon)$ を帰納的に定義する.

(I) $d(\varepsilon) = 1 \iff \varepsilon$: 孤立

(II) $d(\varepsilon) = d > 1 \iff \begin{cases} (a) \exists U \in \varepsilon \text{ st. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \implies d(\varepsilon') < d. \\ (b) \forall U \in \varepsilon, \exists \varepsilon' \ni U \text{ st. } d(\varepsilon') = d - 1. \end{cases}$

(III) (I)(II) で $d(\varepsilon)$ が決まらない ε に対して, $d(\varepsilon) = \infty$.

定義6. $L_\varepsilon^*(F) = L_\varepsilon(F) - \bigcap_{U \in \varepsilon} \left(\bigcup_{U \in \varepsilon' \neq \varepsilon} L_{\varepsilon'}(F) \right)$

とおいて, $L_\varepsilon^*(F)$ を $L_\varepsilon(F)$ の主部と呼ぶ.

定義7. tame end を次のように帰納的に定義する.

(I) $d(\varepsilon) = 1$ の end が tame $\iff \begin{cases} \textcircled{1} L_\varepsilon(F) \cap F = \emptyset \\ \textcircled{2} \varepsilon \text{ は } L_\varepsilon(F) \text{ に一方側から近づく.} \end{cases}$

$a(\varepsilon) = \text{Sup} \{ d(\partial U, L_\varepsilon(F)) \mid U \in \varepsilon \text{ st. } U \in \varepsilon' \implies \varepsilon' = \varepsilon \}$.

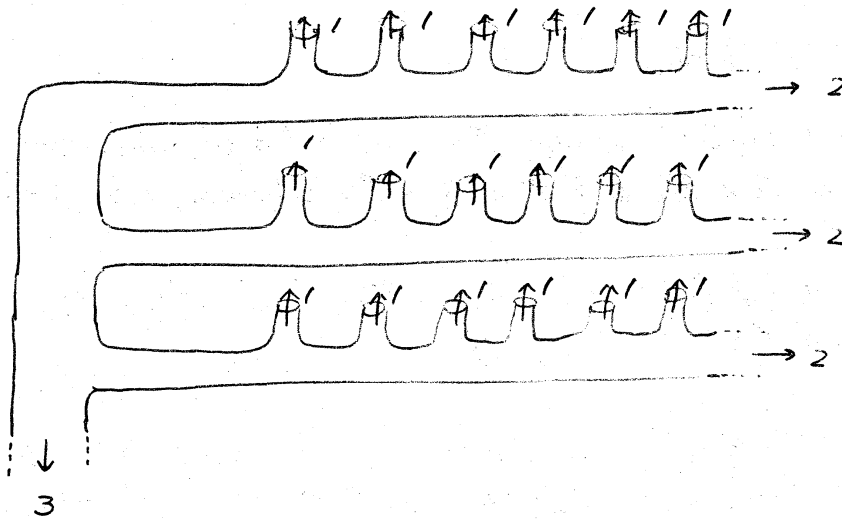
(II) $d(\varepsilon) = d > 1$ の end が tame

$\iff \begin{cases} \textcircled{1} L_\varepsilon(F) \cap F = \emptyset. \textcircled{2} \varepsilon \text{ は } L_\varepsilon^*(F) \text{ に一方側から近づく.} \\ \textcircled{3} \exists U \in \varepsilon, \exists a > 0 \text{ st. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \text{ ならば } a(\varepsilon') > a \text{ かつ} \\ \varepsilon' \text{ は } d(\varepsilon') < d \text{ の tame end.} \end{cases}$

$a(\varepsilon) = \text{Sup} \{ d(\partial U, L_\varepsilon(F)) \mid U \in \varepsilon \text{ st. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \implies \varepsilon' \text{ tame end. } d(\varepsilon') < d \}$.

(注). 葉層構造子が C^2 級で, $\text{Sup}\{d(F) \mid F \text{ は子の葉}\} < \infty$,
 更に子のすべての葉の木口ノミ一群が可換のとき, 元のすべての葉のすべての end は tame になる。

$d(\varepsilon)$ を例をあげて説明する。



さて準備ができたので定理を述べる。証明は複雑であるから省略するが idea は基本的には定理2のときと同じである。

定理3. ε を葉 F の tame end とする。そのとき

- (1) $L_\varepsilon(F)$ は有限個の $\text{depth} \leq d(\varepsilon)$ の真葉の和
- (2) $L_\varepsilon^*(F)$ は $\text{depth} d(\varepsilon)$ の葉で, $L_\varepsilon(F) = \text{Cl}_M(L_\varepsilon^*(F))$.
- (3) $F' \subset L_\varepsilon(F)$ ならば, F' のすべての end は $\text{depth} < d(F')$ の tame end であり, F' は $\text{depth} d(F') - 1$ の end は有限個もつ。

定理4. 葉 F_0 のすべての end が tame で $d(F_0) < \infty$ とする.
 このとき葉 F の end ε が $L_\varepsilon(F) = \mathcal{Q}_M(F_0)$ を満たすならば,
 ε は depth d の tame end であり $L_\varepsilon^*(F) = F_0$ となる。

REFERENCES

- [1] G. Hector, *Classification cohomologique des germes de feuilletages*,
Publication internes de l'UER de mathématiques pures, N°53, 1975.
- [2] H. Nakatsuoka, *On representations of homology classes*, *Proc. Japan Acad.* 48 (1972), 360-364.
- [3] T. Nishimori, *Isolated ends of open leaves of codimension-one foliations*, *Quart. J. Math. Oxford (3)*, 26 (1975), 159-167.
- [4] T. Nishimori, *Compact leaves with abelian holonomy*, *Tohoku Math. Journ.* 27 (1975), 259-272.
- [5] T. Nishimori, *Behaviour of leaves of codimension-one foliations*,
to appear.
- [6] T. Nishimori, *Ends of leaves of codimension-one foliations whose limit sets consist of a finite number of leaves*, *to appear.*
- [7] L. C. Siebenmann, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, *Thesis, Princeton 1965.*