数理解析研究所講究録
第 287 巻 1977 年 49-52

"Holonomic Quantum Field" 解説

京大数研　三輪哲二

holonomic quantum field という題は前例がありませんが，場の理論に現われる多変数特殊函数を，holonomic system，すなわち解空間が有限次元の偏微分方程式系で統制しようというのが我々の目標です。

統計力学における磁性体の模型に Ising 模型というのがあります。Onsager は 1944 年に平面正方格子の格子点を (i,j) とし，± 1 の値を取るスピン変数 σ_{ij} が与えられている時に，あらゆるスピンの配置についての和

$$Z = \sum_{\sigma} e^{\frac{1}{kT}(J_1 \sigma_{ij}\sigma_{ij+1} + J_2 \sigma_{ij}\sigma_{i+1j})}$$

を計算し，転移点が存在する事を示しました。1976 年になって References の [4] 及び [5] によって 2 点相関函数

$$\langle \sigma_{00}\sigma_{MN} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \sigma_{00}\sigma_{MN} e^{\frac{1}{kT}(J_1 \sigma_{ij}\sigma_{ij+1} + J_2 \sigma_{ij}\sigma_{i+1j})}$$

及び，転移点 T_c の上下からのスケール極限（$T-T_c$ 及び格子間隔を，その比を有限に保って，0 に近づけた極限における値）が計算されました。

Onsagerは，２次元格子を１次元格子の積み重ねと考え，Zを，格子の大きさをsizeとするある行列のべきのtraceと書き換え，次に反交換関係を満たす補助変数を使って，その行列を対角化するという方法で解きました。これは，考えている空間がMinkowski空間とEuclid空間という事の違いを除いて*1非常によく似ています。事実[4]，[5]の結果（転移点の上からの極限）をFourier変換し，さらにWick回転（Euclid空間から解析接続してMinkowski空間に移る）してやると，得られた２点函数は，質量 $m > 0$ の中性スカラー粒子の２点函数の持つ特性を備えている事がわかりました。そこで，Onsager及び[5]の方法を徹底してスピン変数 S_{MN} あるいは場の演算子 $\varphi(x)$ をfree fermionの補助変数（場）で表わし，それによってn点函数を計算する事が出来ました。その結果が（7），(8）及び(12)(13)，(14)です。（格子の場合は追って）*2

この結果で特徴的なのは，exp.の肩に補助場の２次形式がのった形のnormal積になっている点で，その背後には直交空間 W 上のClifford群の元 g がWに引き起こす直交変換を知れば，g 自身の表示が（３）の形で得られるという数学的事実がありました。そこで，$\varphi(x)$ もIsing模型の極限という事を離れて，ディラック方程式の解の作る

直交空間で，点xの片側の値を(-1)倍するという直交回転(6)を引き起こすものとして直接構成する事ができました。この形では，$\varphi(x)$ の Lorentz 共変性，局所因果律も明らかになります。さらに，直交空間の代わりにシンプレクティック空間を考える事により，free boson を補助場とする別の模型が構成できました。それが(9)と(15)です。

$\varphi^F(x)$については，場の理論のLSZ型式により $t \longrightarrow \pm\infty$ の漸近場を計算する事によって，漸近場を補助場を使って(1)の形に表わしました。これからS行列が簡単に求まって粒子数 n が保存され $S_{n,n} = (-)^{\binom{n}{2}}$ である事がわかりました。S行列は 1 ではないわけで，場の理論において 1でないS行列を持つ例が具体的に計算されたのはこれが始めてです。さらに始めの目標である τ 函数の holonomy 構造を調べると，内点のない Feynman グラフに対応する Landau 特異点にのみ特異性を持つ事，及びそこにおける特異性の位数が，通常予想される値より，多重線の存在により(16)の形にずれる事がわかりました。

以上が今回の論文の内容です。ここまでの結果では，holonomic system が §4 の最後を除いて現われませんでしたが，現在（1977年 2月），2点函数の場合の[4]における Painlevé 超越函数による表示を，n点函

数に拡張する方向で，holonomic systemと直接結びつけて研究しています。

$*_1$ 場の理論に

$*_2$ [3] に結果は述べられている。

（以上は本講究録掲載の英文の論文を，学士院紀要に投稿する際に，吉田耕作先生にお渡しした手紙の一部です。数学の方の参考になればと考えて，吉田先生のお許しを得て，ここに載せる事にしました。）