数理解析研究所講究録
第 287 巻 1977 年 112-116

Fuchsian systems with discrete monodromy groups

神戸大 理　吉田正章
三木高校　服部修三

序　先づはじめに $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ をモノドロミー群にもつ微分方程式を求める手続を復習しよう。

(0°) Γ は i, $\rho = e^{\frac{2\pi i}{6}} \in H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ を各々位数 2, 3 のだ円点, ∞ 点を放物点としている。

(1°) $\Gamma_{z_0} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(z_0) = z_0\}$ とすると, $\Gamma_i = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\Gamma_\rho = \langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\Gamma_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ となっている。

(2°) H/Γ_i, H/Γ_ρ, $H/\Gamma_\infty \cup \{\infty\}$ は nonsingular で local parameter は, 各々 $((z-i)/(z+i))^2$, $((z-\rho)/(z-\bar{\rho}))^3$, $\log_{\bar{\ }}^{2\pi i} z$ である

(3°) シュワルツ微分 ($PL(2,\mathbb{C})$-invariant)

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$$

において, $z(x)$ が, $x = x_0$ で l 位 ($l = 1, 2, \cdots, \infty$) に分岐しておれば,

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l^2}\right)\frac{1}{(x-x_0)^2} + \frac{\delta_{-1}}{x-x_0} + \cdots$$

$$(4^\circ) \qquad \begin{array}{ccc} H \cup \{\infty\} & \longrightarrow & H/\Gamma \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}^1 \\ z & \longmapsto & x \end{array}$$

を $z(\omega)=0$, $z(i)=1$, $z(\rho)=\infty$ として定めて, (3°)を使うと,

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right) = p(x) = \frac{1}{2x^2(x-1)^2}\left\{1+\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)-1-\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\right\}x+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)x^2\right\}$$

となる。故に,

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{1}{2}p(x)\xi = 0$$

なる $\mathbb{P}^1$ 上のFuchs型微分方程式のモノドロミー群は, Γ と conjugate である。

我々は, 放物点に関する局所的な事実 (1°), (2°), (3°) を2変数に拡張する。だ円点ではもっとやさしいだろうからである。即 Hの代りに

$$D = \{(z,u) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} z - |u|^2 > 0\} \subset \mathbb{P}^2$$
$$\cong \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

を採り, (i) $\mathrm{Aut}(D)$ の ∞ での isotopy subgroup の discrete subgroups (それを Γ と書く) をすべて求める。一変数の場合と違って, conjugateをのぞいてもたくさんある。

(ii) $D/\Gamma \cup \{\infty\}$ を調べる。一変数と異って, 多く場合 nonsingular にはならない。nonsingular になる Γをすべて決定して, ∞点での local ring を (z,u) に関するよく知られた (ϑ や $\wp$) 函数まで書く。

(iii) シュワルツ微分~~[illegible]~~ (織田氏によって formulate された PL(3, $\mathbb{C}$)-invariant なもの) をほどこして Γ ($D/\Gamma \cup \{\infty\}$

nonsingular なるもの) をモノドロミー群にもつ微分方程式を作る。方程式の singularity は, もちろん点でなく, Γ によって様々な variety になる。

§1. ∞点を P と書く。P をリーマン計量の意味で fix する元全体のなす $\mathrm{Aut}(D)$ の subgroup G は以下の様に書ける。

$$G = \left\{ [\mu, a, r] = \begin{pmatrix} 1 & 2i\mu\bar{a} & r+i|a|^2 \\ 0 & \mu & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \mu, b \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}, \\ |\mu| = 1. \end{matrix} \right\}$$

また $G_1 = \{ [a, r] = [1, a, r] \in G \}$ とする。

定義 $\Gamma \subset G$ が locally volume finite (l.v.f) とは,

$\{ (z, u) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Im}\, z - |u|^2 > N \} / \Gamma$ が volume finite なること。

<u>Prop.</u> (Hemperly) l.v.f. discrete subgroup Γ_1 of G_1 に対して, lattice L と, 正数 $q = \min_{[0,r] \in \Gamma_1} |r|$ と $r(\cdot) : L \longrightarrow \mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ なる map があって, $[a, r] \in \Gamma_1 \Leftrightarrow a \in L,\ r \equiv r(a) \bmod q$.

このとき, Γ_1 は, $L, q, r(\cdot)$ で決ると言おう。

<u>Prop.</u> (Hemperly) $L, q, r(\cdot)$ で決っている Γ_1 に対して, $D/\Gamma_1 \cup \{P\}$ の nonsingular model は $D/\Gamma_1 \cup E$ となる。ここで $E \cong \mathbb{C}/L$ なるだ円曲線。

<u>注意</u> $L = \mathbb{Z}\eta_1 + \mathbb{Z}\eta_2$ $(\mathrm{Im}\, \bar{\eta}_1\eta_2 > 0)$ とすると,

$$p = \frac{4\,\mathrm{Im}\, \bar{\eta}_1\eta_2}{q} \in \mathbb{Z}^+$$

また $r(\cdot)$ は, $r(\eta_1), r(\eta_2)$ で決る。

<u>Prop.</u> $E^2 = -p$.

<u>定理</u>　l.v.f. discrete subgroup Γ of G で，G_1 に含まれてないものは，以下のうちの１つに conjugate．

Type II　$\sum_{\nu=1}^{2} \Gamma_1 [-1, 0, r]^{\nu}$　　$r = 0,\ g/2$，

ここで，Γ_1 は，$L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$，$g = \frac{4\,\mathrm{Im}\,\tau}{p}$，$r(1), r(\tau) = 0, g/2$．で決る．

Type IV．$\sum_{1}^{4} \Gamma_1 [i, 0, r]^{\nu}$　　$r = 0, \frac{g}{4}, \frac{2}{4}g, \frac{3}{4}g$，

ここで，Γ_1 は $L = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$，$g = \frac{4}{p}$，$r(1) = r(i) = 0, g/2$．で決る．

Type VI．$\sum_{1}^{6} \Gamma_1 [\zeta, 0, r]^{\nu}$，　　$r = 0, \frac{1}{6}g, \cdots, \frac{5}{6}g$，

ここで，Γ_1 は $L = \mathbb{Z} + \zeta\mathbb{Z}$ $(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{6}})$，$g = \frac{2\sqrt{3}}{p}$，$r(1) = r(\zeta) = \sqrt{3}$ で決る．

Type III　$\sum_{1}^{3} \Gamma_1 [\zeta^2, 0, r]^{\nu}$　　$r = 0, \frac{g}{3}, \frac{2}{3}g$，

この Γ_1 は Type VI と同じ．

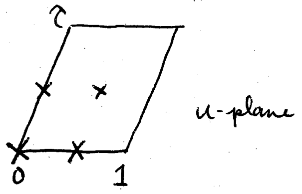
<u>注意</u>　Type II の群は連続なパラメタ $\tau \in H$ が入っているが，それ以外は，パラメタは入ってない。

§2．上で述べた Γ について，$D/\Gamma \cup \{P\}$ の nonsingular model を作り，$D/\Gamma \cup \{P\}$ 自身 nonsingular なものをえらび，その Γ を monodromy 群にする微分方程式を書く。ここでは，Type II のものを調べよう．

<u>定理</u>　Type II の群 Γ で，$D/\Gamma \cup \{P\}$ が nonsingular なものは，以下の２つで，共に位数２の unitary reflection で生成されている．

$\Gamma_\tau(1) = \langle h(-1, 0),\ h(-1, \tfrac{1}{2}),\ h(-1, \tau/2) \rangle$，

$\Gamma_\tau(2) = \langle \Gamma_\tau(1),\ h(-1, \tfrac{1+\tau}{2}) \rangle$．

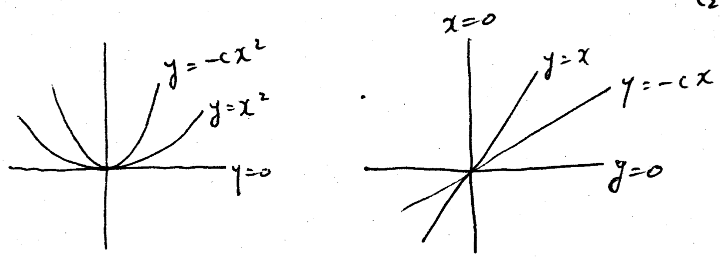


ここで: $h(\mu, u_0) = [\mu,\ u_0(1-\mu),\ |u_0|^2\, 2\ln\mu]$.

定理

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_\alpha p_{ij}^\alpha(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} + p_{ij}^0 \xi \qquad \begin{array}{l} i,j=1,2 \\ x_1 = x,\ x_2 = y \end{array}$$

の型の, $\mathbb{C}^2$で定義された, 完全積分可能な方程式 $(E_{\Gamma_c(1)})$, $(E_{\Gamma_c(2)})$ があって, その singularity は各々 $\{y=0\}\cup\{y=x^2\}\cup\{y=-cx^2\}$, $\{y=0\}\cup\{y=x\}\cup\{y=-cx\}\cup\{x=0\}$ で, その monodromy 群は, 各々 $\Gamma_c(1)$, $\Gamma_c(2)$ なるものがある. (係数はめんどう故省略させていただきます) ここで, $c = \dfrac{e_1-e_2}{e_2-e_3}$, $e_j = \wp(\tau, \omega_j)$.



Type II 以外のすべての subgroup Γ についても同様の定理があるが, 省略します

―終―