

Toeplitz 作用素について

東北大理 勘甚裕一

§1. $==z$ は, Toeplitz 作用素について, その最つとも基本的な場合である, 下の空間が \mathbb{T} のときと \mathbb{R} のときについていくつかの結果を index theory に重点をおいて述べる.

まず, Wiener - Hopf equation と呼ばれる古典的な方程式から話しをはじめよう. $L^p(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}^+)$ をそれぞれ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty), \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ 上で定義された Lebesgue 測度に関する Lebesgue space とする. $k \in L^1(\mathbb{R})$ に対し L^2 Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上に作用する operator \hat{W}_k を次で定義する;

$$\hat{W}_k f(x) = \int_0^{\infty} k(x-t) f(t) dt \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^+))$$

このとき $\hat{W}_k f$ は a.e. x に対し定義され $\|\hat{W}_k f\|_2 \leq \|k\|_1 \|f\|_2$ である. $\lambda \in \mathbb{C}, g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ に対し,

$$(1) \quad \lambda f + \hat{W}_k f = g$$

を Wiener - Hopf equation とする. $==z$ f は未知函数.

$H^2(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}); f \text{ は, 上半平面で正則かつ}$

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx < \infty$$

を満す函数 $F(z)$ の境界函数 } とすれば Paley-Wiener の定理から Fourier 変換は $L^2(\mathbb{R}^+)$ から $H^2(\mathbb{R})$ 上への自然な同型を与える. いま $P \in L^2(\mathbb{R})$ から $H^2(\mathbb{R})$ 上への orthogonal projection とすれば (1) は Fourier 変換 \mathcal{F} によつて,

$$(2) \quad \mathcal{F}(\lambda f + \hat{W}_k f) = P[(\lambda + \hat{k})\hat{f}] = \hat{g}$$

なる形に変換される. 但し $\hat{f}, \hat{g}, \hat{k}$ は f, g, k の Fourier 変換である. このよつて \mathcal{L} 積分作用素は Projection を伴つた掛算作用素に変換される. $\lambda + \hat{k}$ は continuous, $\lim_{|\beta| \rightarrow \infty} (\lambda + \hat{k}(\beta)) = \lambda$ であるが, この性質は (2) における \mathcal{L} は必要ない. このことから我々は Wiener-Hopf operator の一般的に定義を次の様にする. $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ に対し,

$$W_\varphi f = P(\varphi f) \quad (f \in H^2(\mathbb{R}))$$

\mathcal{L} symbol $\varphi \in \mathcal{L}$ Wiener-Hopf operator とする.

次に Wiener-Hopf operator の discrete な場合を考える. $l^1(\mathbb{Z}), l^1(\mathbb{Z}^+)$ をそれぞれ $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上の p 乗絶対収束な complex-valued functions 全体とする. $k \in l^1(\mathbb{Z})$ に対し $l^2(\mathbb{Z}^+)$ 上の operator \hat{T}_k を次で定義する;

$$(3) \quad \hat{T}_k f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} k(n-m) f(m) \quad (f \in l^2(\mathbb{Z}^+)).$$

$e_n \in l^2(\mathbb{Z}^+)$ を $e_n(m) = 1$ ($m=n$), $e_n(m) = 0$ ($m \neq n$) で定義すれば $\{e_m\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ は $l^2(\mathbb{Z}^+)$ における orthogonal basis である

この basis に関する operator \hat{T}_k の matrix は $\begin{bmatrix} k(0) & k(1) & k(2) & \dots \\ k(-1) & k(0) & k(1) & \dots \\ k(-2) & k(-1) & k(0) & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$.

この matrix の特徴は対角線に z^{-n} の定数 z^n があることである。

このように matrix は Toeplitz による最初の研究以来, Toeplitz matrix と呼ばれる. 対応する $l^2(\mathbb{Z}^+)$ 上の operator を Toeplitz operator とする。

Wiener - Hopf operator の時と同様, Fourier 変換を使うことにより見やすい形になる. $L^p(\mathbb{T})$ と $\mathbb{T} = \{e^{it}; 0 \leq t < 2\pi\}$ 上の Lebesgue measure $dt/2\pi$ に関する Lebesgue space とする. Fourier 変換による $l^2(\mathbb{Z}^+)$ は Hardy space $H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}); f \text{ は単位円板 } D \text{ 上で正則かつ } \sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty \text{ と満す函数 } F(z) \text{ の境界函数}\}$ に同型となる. P は $L^2(\mathbb{T})$ から $H^2(\mathbb{T})$ 上への projection とする. このとき, $\varphi \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(n)e^{int}$ とすれば (3) は,

$$(4) T_\varphi f = P(\varphi f) \quad (f \in H^2(\mathbb{T}))$$

なる形に変換される. このときも, φ は絶対収束する Fourier series を持つ必要はない. よって次の定義を与える. $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対し,

$$T_\varphi f = P(\varphi f) \quad (f \in H^2(\mathbb{T}))$$

を symbol φ による Toeplitz operator とする。

Rosentbloom [7] によれば $[0, \infty)$ 上の Laguerre 函数の CON

system に関する Wiener-Hopf operator の matrix は Toeplitz matrix になる. また Devinatz [4] は上半平面から単位円板 D 上への等角写像 $k(z) = (z-i)/(z+i)$ は Wiener-Hopf operator と対応する Toeplitz operator との間の unitary equivalence を与えることを示した. よって多くの問題に関して \mathbb{R}^2 の理論は同じものとなる.

次の節で symbol φ を連続関数の空間 $C(\mathbb{T})$ にとった場合の $H^2(\mathbb{T})$ 上の Toeplitz operator について考察する. とくに T_φ が invertible や Fredholm operator になる symbol φ の条件, さらに Fredholm operator になるときその index を考える. §3 2" は $H^2(\mathbb{R})$ 上の Wiener-Hopf operator について, その symbol を almost periodic functions にとった場合, さらに一般に symbol を finite regular Borel measure の Fourier-Stieltjes 変換にとった場合を述べる. §2 は R.G. Douglas [5], §3 は R.G. Douglas - J.L. Taylor [6] に依る. Toeplitz operator に関する最近の 2" の結果のほとんど, 詳細な文献が [5] に見られる.

§2. まず以下の議論に必要な定義や記号を与える. \mathcal{H} を separable infinite dimension Hilbert space とし, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 2" \mathcal{H} 上の $\forall T$ の bounded linear operators のための C^* -algebra とし, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 2" \mathcal{H} 上の compact operators 全体のための algebra とす

る. このとき, $\mathcal{L}^c(\mathcal{H})$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ における unique closed two-sided ideal である. $i \in$ inclusion map, $\pi \in$ natural homomorphism とすると

$$(0) \rightarrow \mathcal{L}^c(\mathcal{H}) \xrightarrow{i} \mathcal{L}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{L}^c(\mathcal{H}) \rightarrow (0)$$

は exact.

Def. 1. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が Fredholm operator とは $\pi(T)$ が invertible であること. $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ は \mathcal{H} 上の Fredholm operators 全体を表すこととする.

Atkinson の定理によれば $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ である必要十分条件は T の range が closed かつ $\dim \ker T, \dim \ker T^* = \dim \operatorname{coker} T < \infty$.

Def. 2. $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ のとき T の analytic index $\operatorname{ind}_a(T) \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ind}_a(T) = \dim \ker T - \dim \ker T^*$ と定義する.

ind_a は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ から \mathbb{Z} への continuous homomorphism であり compact perturbation のもとで不変である.

ここで \mathbb{Z} 上の関数は \mathbb{C}^n -valued とし §1 より一般形 \mathbb{Z} Toeplitz operator を定義し考察する.

$L^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})$ は \mathbb{T} 上 \mathbb{C}^n -valued norm square-integrable measurable functions による Hilbert space, $H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})$ は対応する Hardy space とする. 即ち, $L^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{C}^n$, $H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}) = H^2(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{C}^n$.

$L^{\infty}_{M_n}(\mathbb{T})$ は \mathbb{T} 上 $M_n = M_n(\mathbb{C}) = \{n \times n \text{ 複素 matrices}\}$ valued 有界 bounded measurable functions 全体とする. このとき symbol

$\phi \in L_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$ を $\phi \mapsto$ Toeplitz operator T_ϕ を $T_\phi f = P(\phi f)$ ($f \in H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})$) で定義する. 但し P は $L_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})$ から $H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})$ への orthogonal projection である. map $\xi(\phi) = T_\phi$ は $L_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$ から $\mathcal{L}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T}))$ への contractive ($\|\xi(\phi)\| \leq \|\phi\|$) かつ $*$ -linear である. しかし multiplicative, i.e. $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$, ではない. このことが Toeplitz operator の研究を困難なものになるとともに興味あるものとなる. ところがこの節の目的のため 2 有用な次の lemmas が成り立つ.

Lemma 2.1. $\phi \in H_{M_n}^\infty(\mathbb{T}), \psi \in L_{M_n}^\infty(\mathbb{T}) \Rightarrow T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}, T_{\phi^*} T_\psi = T_{\phi^*\psi}$

Lemma 2.2. $\phi \in C_{M_n}(\mathbb{T}), \psi \in L_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$

$$\Rightarrow T_\psi T_\phi - T_{\psi\phi}, T_\phi T_\psi - T_{\phi\psi} \in \mathcal{LC}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})).$$

$\mathcal{T}(C_{M_n}(\mathbb{T}))$ を $\{T_\phi : \phi \in C_{M_n}(\mathbb{T})\}$ で生成された closed subalgebra とする. このとき, $\mathcal{T}(C_{M_n}(\mathbb{T}))$ は C^* -algebra でありその commutator ideal は $\mathcal{LC}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T}))$ に一致する. 上の lemmas より mapping ξ は自然に $*$ -homomorphism $C_{M_n}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{LC}$, $\phi \mapsto [T_\phi]$ を引き起こす. 次の Proposition を使って目的の定理を得る.

Proposition 2.3. $\phi \in L_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$ とする. このとき,

$$T_\phi \in \mathcal{LC}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})) \iff \phi \equiv 0.$$

Theorem 2.4. $\mathcal{J}(C_{n,n}(\mathbb{T}))$ から $C_{n,n}(\mathbb{T})$ 上への $*$ -Homomorphism f は 2 次を満すものが存在する。

(i) cross-section $\xi, \varepsilon \neq 0$,

$$(ii) (0) \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})) \xrightarrow{i} \mathcal{J}(C_{n,n}(\mathbb{T})) \xrightarrow{f} C_{n,n}(\mathbb{T}) \rightarrow (0)$$

は exact sequence.

定理からすぐわかることは, $\forall T \in \mathcal{J}$ は $T_\phi + K$, $\phi \in C_{n,n}(\mathbb{T})$, $K \in \mathcal{L}\mathcal{C}$ の形に書けること.

Corollary 2.5. $\phi \in C_{n,n}(\mathbb{T})$ とする. このとき,

$$T_\phi \in \mathcal{F}\mathcal{L}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})) \iff \det \phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T}.$$

次に T_ϕ の analytic index が ϕ とどのような関係があるかを見よう. Fredholm operator T に対し (\mathbb{Z}/\mathbb{T}) から $GL(n, \mathbb{C})$ への continuous map $f(T)$ が対応する. \mathbb{Z}/\mathbb{T} の analytic index は $f(T)$ の homotopy class による関係がある. \mathbb{Z}/\mathbb{T} 上 $[GL(n, \mathbb{C})] \cong \mathbb{Z}$ であり, この isomorphism は $\phi \mapsto \text{ind}_\pm(\phi)$ によることが知られる. ただし $\text{ind}_\pm(\phi)$ は $\det \phi$ の原点に関する winding number である. また analytic index は $[GL(n, \mathbb{C})]$ から \mathbb{Z} への homomorphism $\phi \mapsto \text{ind}_a(T_\phi)$ を定義する. $n=2$ のとき $\psi(e^{it}) = (a_{k\ell}(t))$, $a_{11}(t) = e^{it}$, $a_{k\ell}(t) = \sqrt{k\ell}$ ($k \geq 2, \ell \geq 1$) に対し \mathbb{Z} $\text{ind}_a(T_\psi) = -1$, $\text{ind}_\pm(\psi) = 1$ となる. 以上から,

Theorem 2.6. $\phi \in C_{n,n}(\mathbb{T})$, $\det \phi \neq 0$ on \mathbb{T} とする.

このとき, $T_\phi \in \mathcal{K}(H^2_{\text{ev}}(\mathbb{T}))$, $\text{ind}_a(T_\phi) = -\text{ind}_t(\phi)$.

$n=1$ のとき, $\ker T_\phi = (0)$ または $\ker T_\phi^* = (0)$ であることが知られてゐる. よつて, $n=1$ の場合に invertibility に関する条件を得ることが出来る.

Corollary 2.7. $\phi \in C(\mathbb{T})$ とする. このとき,

$$T_\phi : \text{invertible in } \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \iff \phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T}, \text{ind}_t(\phi) = 0.$$

$n \geq 2$ のとき, 即ち matrix の場合にはこの命題は成り立たない. しかし, $\{\phi \in C_n(\mathbb{T}); T_\phi \text{ invertible}\}$ は $\{\phi \in C_n(\mathbb{T}); \det \phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T}, \text{ind}_t(\phi) = 0\}$ であることが知られてゐる.

§3. この節では $H^2(\mathbb{R})$ 上の symbol を almost periodic functions に対応する Wiener-Hopf operator と, $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上に作用する, symbol を measure の Fourier-Stieltjes 変換に対応する Wiener-Hopf operator について述べる.

$AP(\mathbb{R})$ は \mathbb{R} 上の almost periodic functions からなる algebra とし, $\mathcal{K}(AP)$ は $\{W_\phi : \phi \in AP(\mathbb{R})\}$ によって生成された C^* -algebra, $\mathcal{C}(AP)$ はその commutator ideal とする. このとき $AP(\mathbb{R})$ の symbol を対応する Wiener-Hopf operator に関して Theorem 2.4 と

同様な次の結果がある。

Theorem 3.1. $\mathcal{T}(AP)$ から $AP(\mathbb{R})$ 上への $*$ -homomorphism \mathcal{I} が
次の条件を満たすものがある；

(i) cross-section $\Sigma \in \mathcal{T}$,

$$\text{im } (0) \rightarrow \mathcal{C}(AP) \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathcal{T}(AP) \xrightarrow{\mathcal{I}} AP(\mathbb{R}) \rightarrow (0)$$

は exact sequence .

この定理と Bohr [1] による次の結果を併せて \mathcal{W}_ϕ の invertibility
に関する条件を得ることが出来る。

Proposition 3.2. $\phi \in AP(\mathbb{R})$ により invertible function とす
る。このとき, $\exists \alpha \in \mathbb{R} \exists \psi \in AP(\mathbb{R}) : \phi(t) = e^{i\alpha t} \exp \psi(t)$
 $\leq 5 \kappa$, $\text{ind}_\pm(\phi) \equiv \alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \{ \arg \phi(T) - \arg \phi(-T) \}$.

Theorem 3.3. $\phi \in AP(\mathbb{R})$ とする。このとき,

$$\mathcal{W}_\phi : \text{invertible in } \mathcal{T}(AP) \iff \phi : \text{invertible in } AP, \text{ind}_\pm(\phi) = 0.$$

と $\exists \mathcal{Z} \mathcal{C}(AP) \cap \mathcal{L}C(H^2(\mathbb{R})) = (0)$ であるの \mathcal{Z} 上の exact
sequence より Fredholm 性に関する条件を導くことは出来る
。更に topological index $\text{ind}_\pm(\phi)$ は real number となるの
 \mathcal{Z} analytic index との間には明らかな関係は有り。このことは
Fredholm operator の概念を適当なものにしなければ有り

ことを意味する。Breuer [2], [3] は Fredholm operator のよまの概念を von Neumann algebra の線に従って導入し, index theory を展開してゐる。

上の議論は Wiener-Hopf operator $\hat{W}_k f(x) = \lambda f(x) + \int_0^{\infty} k(x-t) f(t) dt$ において $k(t)dt$ を discrete measure に取つた場合に相当する。

我々は以下 $k(t)dt$ とし一般の finite regular Borel measure を取つた場合を述べる。 $M(\mathbb{R})$ を \mathbb{R} 上の finite regular Borel measures 全体を記す。 $M(\mathbb{R})$ は convolution を積とし単位元をもつ可換な Banach algebra となる。ここでは $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の kernel $\in M(\mathbb{R})$ にも Wiener-Hopf operator を調べる。即ち $\mu \in M(\mathbb{R})$ に対し $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の Wiener-Hopf operator を次で定義する。

$$\hat{W}_\mu f(x) = \int_0^{\infty} f(t) d\mu(x-t) \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^+))$$

我々は \hat{W}_μ に対し Fredholm 性や invertibility に関する条件を得, index theory を述べる。しかし algebra $M(\mathbb{R})$ の複雑な構造のため $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上では十分な結果は得られず。即ち \hat{W}_μ が invertible operator であることも μ が $M(\mathbb{R})$ で invertible とは存在する measure μ が存在する。もし μ が $M(\mathbb{R})$ で invertible であることを仮定すれば一応満足のため index theory が成立する。 $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上の operator としての \hat{W}_μ に関しは述べた通りである。まずこのことから述べる。それは次の Banach algebra

$M(\mathbb{R})$ の maximal ideal space の first Čech cohomology group に関する J. L. Taylor [8] の結果が本質的である。

Proposition 3.4. $\mu \in M(\mathbb{R})$ にかゝる $n \in \mathbb{Z}$ invertible とする。
 このとき, $\exists m \in \mathbb{Z} \exists c \in \mathbb{R} \exists \nu \in M(\mathbb{R}); \mu = \int^n * d_c * e^\nu$.
 但し $d\varphi(x) = -d\varphi_0(x) + 2\chi_{[0, \infty)} e^{-x} dx$ なる Fourier 変換は
 $\hat{f}(t) = (1+it)/(1-it)$. 此で $\text{ind}_\pm(\mu) = (m, c)$ とおく。

$L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の operator \hat{W}_μ が Fredholm とは range \hat{W}_μ が closed であること, $\dim \ker \hat{W}_\mu, \dim \text{coker} \hat{W}_\mu < \infty$ なること。さらに analytic index $\text{ind}_a(\hat{W}_\mu)$ とは $\dim \ker \hat{W}_\mu - \dim \text{coker} \hat{W}_\mu$ のこととする。このとき, まづ $L^1(\mathbb{R}^+)$ 上の Wiener-Hopf operator \hat{W}_μ に関する次の定理が成り立つ。

Theorem 3.5. $\mu \in M(\mathbb{R})$ とする。このとき \hat{W}_μ が Fredholm である
 必要十分条件は μ が $M(\mathbb{R})$ 中で invertible かつある integer n に対し
 $\mathbb{Z} \text{ind}_\pm(\mu) = (n, 0)$ となること。このとき, $\text{ind}_a(\hat{W}_\mu) = -n$ 。

一般に $1 \leq p < \infty$ の時, μ が $M(\mathbb{R})$ 中で invertible を仮定すれば
 次のような結果となる。

Theorem 3.6. $p \in 1 \leq p < \infty$ とする。 $\mu \in M(\mathbb{R})$, invertible とする。
 このとき \hat{W}_μ が $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上の Fredholm operator である必要十分条件は
 ある integer n に対し $\mathbb{Z} \text{ind}_\pm(\mu) = (n, 0)$ となること

である。このとき, $\text{ind}_a(\hat{W}_\mu) = -n$.

最後に $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上の operator Δ ($\Delta = \hat{W}_\mu$) は invertible であるが $M(\mathbb{R})$ 上は invertible でない measure μ の存在を示し (本稿を終る). $M(\mathbb{R})$ における 2 次のような measure Δ が存在する.

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\Delta(t)| < \|\Delta\|_{sp}.$$

更に $\text{supp}(\Delta)$ は compact と出来る. そこで $\lambda \in \mathbb{C}$ の spectrum から $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\Delta(t)| < \lambda$ と出来るように λ を選ぶ. このとき, $\mu = \lambda \delta_0 - \Delta$ とおけば μ は non-invertible かつ \hat{W}_μ は $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上 invertible となる. 何故ならば Laplace 変換 \mathcal{L} は λ は上半平面に正則有界に拡張出来るからである.

参考文献

- [1] H. Bohr, Über fastperiodische ebene Bewegungen, Comment. Math. Helv. 4 (1934) 51-64.
- [2] M. Breuer, Fredholm-theories in von Neumann algebras I, Math. Ann. 178 (1968) 243-254.
- [3] ———, ——— II, Math. Ann. 180 (1969) 313-325.
- [4] A. Devinatz, On Wiener-Hopf operators, Functional Analysis (Proc. Conf. Irvine, Calif., 1966) 81-118.
- [5] R.G. Douglas, Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators,

- CBMS Regional Conference, University of Georgia, Athens, Ga., 1972.
- [6] R.G. Douglas and J.L. Taylor, Wiener-Hopf operators with measure kernel, *Proc Conf. on Operator Theory*. Hungary, 1970.
- [7] M. Rosenbloom, A concrete spectral theory for self-adjoint Toeplitz operators, *Amer. J. Math.* 87 (1965) 709-718.
- [8] J. L. Taylor, The cohomology of the spectrum of a measure algebra, *Acta Math.* 126 (1971) 195-225.