数理解析研究所講究録
第289巻 1977年 24-33

CCR（有限自由度）表現の一意性の証明法に関する注意

宮城教育大　　板垣　芳雄

§1. Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の self-adjoint operators $\{p_k, q_k\}$ $k=1,2,\ldots,n$ が次の等式を満たすとき，その関係を CCR（Canonical Commutation Relation）という。

(1)
$$[p_j, q_k] = p_j q_k - q_k p_j = \frac{1}{i}\delta_{jk} I$$
$$[p_j, p_k] = 0$$
$$[q_j, q_k] = 0$$

p_k, q_k は bounded operators にとれない。p_k, q_k の具体例としては Schrödinger 表現がある。

(2)
$$p_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad q_k = x_k \times$$

ただし，Hilbert space は $L^2(\mathbb{R}^n)$, domain は例えば $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ にとって考える。量子力学発生時の行列力学と波動力学の同一性は，数学的には「既約な CCR の表現は一意（全てユニタリー同値）である」と整理されるようであ

る。ただ，(1) では domain の問題が残るので von Neumann は (1) を，p_k，q_k を generators とする (strongly continuous) unitary groups の関係（Weyl 型の CCR という）に翻案して証明した。

$$u_{\alpha_j} v_{\beta_k} = e^{-i\delta_{jk}\alpha_j\beta_k} v_{\beta_k} u_{\alpha_j}$$

ただし α_k，β_k は実数を表わし，$u_{\alpha_k} = e^{i\alpha_k q_k}$，$v_{\beta_k} = e^{i\beta_k p_k}$

（ (1) から任意の多項式 $f(\ )$ について，$j=k$ を略して書いて，$pf(q) - f(q)p = \frac{1}{i} f'(q)$ の成立することがわかる。いま $f(x) = e^{i\alpha x}$ についても成立するとすれば $e^{-i\alpha q} p e^{i\alpha q} = p + \alpha I$ を得る。よって，また多項式 $f(\ )$ について $e^{-i\alpha q} f(p) e^{i\alpha q} = f(p+\alpha I)$．ここで $f(x) = e^{i\beta x}$ のときが $u_\alpha v_\beta = e^{-i\alpha\beta} v_\beta u_\alpha$ である．）

上式は次のようにもまとめられる。

(3) $$u_\alpha v_\beta = e^{-i\alpha\cdot\beta} v_\beta u_\alpha$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$u_\alpha = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \cdots u_{\alpha_n}$$

$$\alpha\cdot\beta = \Sigma \alpha_k \beta_k$$

このとき Schrödinger 表現 (2) は次のようになる。

(4) $$u_\alpha : f(x) \longmapsto e^{i\alpha x} f(x)$$

$$v_\beta : f(x) \longmapsto f(x+\beta)$$

CCR (3) の $\{u_\alpha, v_\beta\}$ の generators $\{p, q\}$ は (1) を

満たすわけであるが，逆の対応は直接的でない。

なお，von Neumann の定理は無限自由度（$n \to +\infty$）については成立せず，非同値な CCR の実現，分類等は数学的にも興味深い研究課題となっている。

一方，(3) のパラメーター $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ を一般に locally compact abelian group G とその dual group $\hat{G}$ にとったときも，$\{u_\alpha, v_\beta\}$ の $L^2(G)$ 上への既約表現が一意的であることが示されている。その状況は，(4) は Fourier 変換を介して次のように書けることから肯けよう。

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx$$

$$\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\xi)$$

とおくと　$v_\beta = \mathcal{F}^{-1} \hat{u}_\beta \mathcal{F}$，　$u_\alpha = \mathcal{F}^{-1} \hat{v}_{-\alpha} \mathcal{F}$

ただし　$\hat{u}_\beta : f(\xi) \longrightarrow e^{i\beta\xi} f(\xi)$

$\hat{v}_\alpha : f(\xi) \longrightarrow f(\xi + \alpha)$

さて，Weyl 型の表現でなく，(1) の表現を直接考えることはいろんな意味で興味あるように思われる。$\{u_\alpha\}$，$\{v_\beta\}$ でそれぞれ generate される von Neumann algebra $\cong L^\infty(\mathbb{R}^n)$ は maximal abelian で，それと Fourier 変換（unitary operator）とで (4) が決まるわけであるが，そこを $\{q_k\}$，$\{p_k\}$ を直接考えるということは $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ の代りに $\mathbb{R}^n$ 上の多項式環を考えることになる。

ノルム環を核にして harmonic analysis が記述されてきた事情をみれば、問題を扱い易くするともいえないかもしれないが、量子力学でも Fourier 変換（←波の重ね合わせ）はいわば $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ の固有関数展開として使われていることからすれば、非有界関数環も自然な研究課題になるように思われる。そう考えて Gelfand 表現などをふりかえると、基底空間と作用素の分離の必要性もみえてくるように思われる。

(1)の直接的扱いは従来からいろいろ試みられているが、この報告では、unbounded operators の *-algebra を考える上のモデルとして、それらの試みをふりかえってみたい。量子力学でも p_k, q_k 自体・意味をもったものとして最初に現われるようだし、$\mathbb{R}^\infty$ 上の quasi-invariant measure の構成にも関連深いように思われる。ただ、Weyl 型での一意性の証明自体よく知られているともいえないと思われるので、その紹介をもとにしたい。

以下は簡単のため自由度 $n=1$ で書く。

§2. 表現(3)の一意性の証明 [1,2]

再び簡単のため $\{U_\alpha\}$ は cyclic vector h をもつとす。U_α のスペクトル表示を $U_\alpha=\int e^{i\alpha\lambda}dE_\lambda$, $\mu(\lambda)=(E_\lambda h, h)$ とおく。$h_1=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k U_{\alpha_k}h$ を $f_1(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{i\alpha_k\lambda}$ に写す

写像を$\mathcal{H}$全体に拡張し π_1 で表わす。π_1 は$\mathcal{H}$から $L^2(\mu)$ への unitary operator である。

π_1で，u_α の action は：$f_1(\lambda) \longmapsto e^{i\alpha\lambda}f_1(\lambda)$ に写る。すなわち $\pi_1 \circ u_\alpha \circ \pi_1^{-1} f(\lambda) = e^{i\alpha\lambda}f(\lambda)$，左辺の作用素は $\hat{\pi}_1(u_\alpha)$ で表わすことにする。

$$\hat{\pi}_1(v_\beta) f_1(\lambda) = \sum_k \lambda_k e^{i\alpha_k(\lambda+\beta)} \pi_1(v_\beta h)$$

$a_\beta(\lambda) = \pi_1(v_\beta h)$ とおいて

$$= a_\beta(\lambda) f_1(\lambda+\beta)$$

したがって一般に $L^2(\mu)$ の任意の元 $f(\lambda)$ について この式は成りたつ。

v_β の unitary 性より，任意 f, β に対し

$$\int |f(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) = \int |a_\beta(\lambda)|^2 |f(\lambda+\beta)|^2 d\mu(\lambda)$$

いま X を可測集合とし $f(\lambda)$ として $X+\beta$ の特性関数をとれば

$$\mu(X+\beta) = \int_X |a_\beta(\lambda)|^2 d\mu(\lambda)$$

これは，任意βに対し，$\mu(\lambda+\beta)$ は $\mu(\lambda)$ と equivalent であることを示している（quasi-invariant measure）。このような measure は Lebesgue measure に equivalent であるから

$$\frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} = \rho(\lambda)$$

とおく。前の式から，任意 $f \in L^2(\mu)$ に対し

$$\int |f(\lambda+\beta)|^2 \rho(\lambda+\beta)\,d\lambda = \int |a_\beta(\lambda)|^2 |f(\lambda+\beta)|^2 \rho(\lambda)\,d\lambda$$

ゆえに，ある λ が存在し，殆んど全ての β について

$$\rho(\lambda+\beta) = |a_\beta(\lambda)|^2 \rho(\lambda)$$

この λ を λ_0 と記し，$L^2(\mu)$ から $L^2(\mathbb{R})$ への unitary operator π_2 を ： $f(\lambda) \longmapsto a_{\lambda-\lambda_0}(\lambda_0)\rho(\lambda_0)^{\frac{1}{2}} f(\lambda)$ で定義する。 π_2 で $\widehat{\pi}_1(u_\alpha)$ の action は $e^{i\alpha\lambda}\times$ と変らない。

$\widehat{\pi}_1(v_\beta)$ の変り具合をみる。

$a_\beta(\lambda) = \pi_1(v_\beta h)$ は $a_{\beta_1+\beta_2}(\lambda) = a_{\beta_1}(\lambda)\, a_{\beta_2}(\lambda+\beta_1)$ を満たすから

$$\begin{aligned}
\pi_2 \circ \pi_1(v_\beta h) &= \pi_2\left(a_\beta(\lambda) f_1(\lambda+\beta)\right) \\
&= a_{\lambda-\lambda_0}(\lambda_0)\rho(\lambda_0)^{\frac{1}{2}} a_\beta(\lambda)\, f_1(\lambda+\beta) \\
&= a_{\beta+(\lambda-\lambda_0)}(\lambda_0)\, \rho(\lambda_0)^{\frac{1}{2}} f_1(\lambda+\beta)
\end{aligned}$$

よって一般に

$$\widetilde{\pi_2 \circ \pi_1}(v_\beta) \ :\ f(\lambda) \longmapsto f(\lambda+\beta)$$

以上から，$\widetilde{\pi_2 \circ \pi_1}$ により (3) の u_α, v_β は Schrödinger 表現 (4) に写された。∎

最初 von Neumann が証明した方法は，ここに記したのと違い，*-algebra 上の state によりその algebra の表現が決まることの証明：GNS-constraction に基ずいていえば，cyclic vector h を $(h, v_\beta u_\alpha h) = e^{-\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)}$ ととることができることによっている。 h としては

$$h=\iint e^{-\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{i}{2}\alpha\beta}\, v_\beta u_\alpha h'\, d\alpha\, d\beta, \quad h'\neq 0$$

ととればよい。

§3. 以下 (1) の表現について調べることにする。

$p=\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$, $q=x\times$ は $L^2(0,1)$ の dense subspace $C^2[0,1]$ 上で (1) を満たすが、このとき q は bounded であるから $L^2(R)$ 上で考えた (2) とはユニタリー同値になりえない。

いま、$C^1[0,1]$ の元のうち、端点で 0 となる関数について $T=\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ を考える。T の self-adjoint な拡張は、絶対連続で $f'\in L^2(0,1)$, しかも $f(0)=cf(1)$ (c は定数で $|c|=1$) となる f 全体を定義域として得られる。したがって CCR (1) で

(5) p, q はともに、$\mathcal{H}$ で dense な subspace Φ 上の operators であり ($p\Phi\subset\Phi$, $q\Phi\subset\Phi$), それらの Φ への restrictions は essentially self-adjoint である

と仮定すれば、T の拡張に同値な p ははぶかれる。

以下 (5) の仮定のもとに (1) は (2) に同値であることを、前節の方法に合わせて証明してみる。

簡単のため q は cyclic vector $h\in\Phi$, $\|h\|=1$ をも

つとす。q は $\bigcap_k \mathcal{D}(p^k) \cap \mathcal{D}(q^k)$ (⊃ 𝔈) 上に一意に拡張されることに注意する。

q のスペクトル表示を $q = \int \lambda dE_\lambda$, $\mu(\lambda) = (E_\lambda h, h)$ とおく。$h_1 = \sum \lambda_k q^k h$ を $f_1(\lambda) = \sum \lambda_k \lambda^k$ にうつす写像を $\mathcal{H}$ 全体に拡張し，それを π_1 で表わす。π_1 で q は

$$\tilde{\pi}_1(q) : \quad f_1(\lambda) \longmapsto \lambda f_1(\lambda)$$

にうつされる。また任意の多項式 $f_1(\lambda)$ について

$$\tilde{\pi}_1(p) f_1(\lambda) = \frac{1}{i} f_1'(\lambda) + f_1(\lambda) \tilde{\pi}_1(p) \pi_1(h)$$

よって $L^2(\mu)$ から $\mathbb{R}$ 上の $L^2(\mu)$-valued functions の空間，内積は $\int (\cdot, \cdot)_{L^2(\mu)} d\mu(\alpha)$, への写像 π_2 を

$$\pi_2 : \quad f_1(\lambda) \longmapsto e^{i\alpha \tilde{\pi}_1(p)} f_1(\alpha) 1, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

で定義すると π_2 は unitary で，$\widetilde{\pi_2 \circ \pi_1}(q)$ は $\alpha\,\times$ となり

$$\pi_2(\tilde{\pi}_1(p) f_1(\lambda)) = \frac{1}{i} e^{i\alpha \tilde{\pi}_1(p)} f_1'(\alpha) 1 + \hat{\pi}_1(p) e^{i\alpha \hat{\pi}_1(p)} f_1(\lambda) 1$$

これより $\widetilde{\pi_2 \circ \pi_1}(p)$ の action は $\frac{1}{i}\frac{d}{d\alpha}$ に等しい。

$\frac{1}{i}\frac{d}{d\alpha}$ が self-adjoint operator を定義するためには，$\mu(\alpha)$ が quasi-invariant measure でなければいけない。

$L^2(\mu)$ から $L^2(\mathbb{R})$ 上の Schrödinger 表現にうつすためには π_1 を定義しなおし，$L^2(\mathbb{R})$ ⊃ 𝔈 上の $\lambda\,\times$ を $\hat{\pi}_1(q)$

とし，以下上と同じようにすればよい。∎

ここに述べた型の定理については 3) が参考になろう。しかし証明法は $e^{i\alpha q}\Phi=\Phi$, $e^{i\beta p}\Phi=\Phi$ を示して Weyl 型の一意性に帰着させる行き方をとっている。

§4. CCR の $pq-qp=\frac{1}{i}I$ において p を $p+f(q)$ とおいても等号は成りたつ。したがって $p+f(q)$ と q についても定理の条件が満たされれば operator p と $p+f(q)$ のユニタリー同値性が成立することになる。

特に今考えている Schrödinger 表現の場合は $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+g(x)$ の spectrum が R 全体で，かつ絶対連続なるための十分条件を与えていることになる。さらに $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+g_1(x)$, $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+g_2(x)$ ともに $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ にユニタリー同値であれば $\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+g_1(x)\right)\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+g_2(x)\right)$ は当然 $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ にユニタリー同値である。

これらのことを perturbation の手法，結果と比べてみることも興味ある課題に思われる。例えば $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ と $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+g(x)$ に time dependent method 4) を適用した場合 $\int_0^\infty g(x)\,dx$ が存在すればユニタリー同値と知れるにすぎない。

参照文献

1) Gelfand, I.M. and N.Y. Vilenkin : Generalized function. Vol.4, Academic Press 1964.

2) Hegerfeldt, G.C. and O. Melsheimer : The form of representations of the canonical commutation relations for Bose fields and connection with finitely many degrees of freedom. Commun. math. Phys. 12, 304–323 (1969)

3) Majleo, L.C., On the solution of the commutation relation $PQ - QP = -iI$. Math. Scand 13, 129–139 (1963)

4) Kato, T., Perturbation theory for linear operators. Springer 1966.