数理解析研究所講究録
第289巻 1977年 66-81

Partially archimedean ordered dual を持つ compact group に対する不変部分空間の定理

北大 応電研 中路 貴彦

本講演の一つの目的は、dual group が totally order づけられている compact 可換な group 上の L^p の不変部分空間の定理を、任意の compact 可換な group の場合に拡張することである。それを dual group が totally order づけられている group に適用して、Helson-Lowdenslager が示していない多くの不変部分空間の表現定理を示す。もう一つの目的は、archimedean totally order の場合に Helson-Lowdenslager が simply 不変部分空間と cocycle との一対一の対応を示したが、それを (partially) archimedean order の場合に拡張して、totally archimedean order の時には現われない flow に関して不変な cocycle を研究する事である。これは Helson を中心とした人々が研究している cocycle よりも非常にわかりやすく、coboundary でも trivial でもない cocycle を無数に見つける事ができる。

1章　不変部分空間の表現定理

G を compact 可換な group で、Γ をその discrete dual group とする。更に Γ には、$\Gamma = P \cup (-P)$ となるような semigroup P が与えられているとする。P は Γ と一致してもよい。このとき P は Γ を order づけているという。$\Lambda = P \cap (-P)$ とするとき、$P \backslash \Lambda$ の元を正であるという。$\Lambda = \{0\}$ のとき P は Γ を totally order づけているという。σ を G 上の正規化された Haar 測度とするとき、$f \in L^1(\sigma)$ で

$$\int_G f(x)\,\overline{\chi}_\lambda(x)\,d\sigma(x) = 0\ , \quad {}^\forall \lambda \in \Gamma \text{ かつ } \lambda < 0$$

のとき f を analytic という。H^p $(1 \leq p \leq \infty)$ は $L^p(\sigma)$ における analytic な関数の全体とする。G が単位円のとき、H^p は古典的な Hardy 空間である。I^p は $L^p(\sigma)$ で analytic かつ Λ の上でそのフーリエ係数が零となる関数の全体である。$\mathcal{L}^p$ は $L^p(\sigma)$ における analytic かつ $P \backslash \Lambda$ の上でそのフーリエ係数が零となる関数の全体である。これは totally order のときは常数のみからなる。

M が $L^p(\sigma)$ の不変部分空間であるとは閉（$p=\infty$ のときは弱*閉）部分空間で、全ての $\lambda \in P$ に対して M は f とともに $\chi_\lambda f$ をも含むことである。各 $\lambda \in \Gamma$ に対して $M_\lambda = M \cdot \chi_\lambda$ とすると、M_λ は λ について単調減少である。

$M_+ = \bigcap_{\lambda < 0} M_\lambda$ 、 $M_- = \bigcup_{\lambda > 0} M_\lambda$ の閉包

とすると、$M_- \subseteq M \subseteq M_+$ である。G の任意の *Borel* 集合 E に対して、c_E は E の *characteristic function* とする。全ての $c_E M \neq \{0\}$ である *analytic* c_E に対して $c_E M \supsetneq c_E M_-$ のとき M を I 型という。全ての $c_E M \neq \{0\}$ である *analytic* c_E に対して $c_E M \subsetneq c_E M_+$ のとき M を II 型という。$M_- = M = M_+$ のとき III 型という。

M が $L^p(\sigma)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の不変部分空間のとき、G の *Borel* 集合 E_1、E_2、E_3 で次の性質を持つものが存在する。c_{E_1}、c_{E_2}、c_{E_3} は *analytic* で $c_{E_1} + c_{E_2} + c_{E_3} = 1$; $c_{E_1} M$ は I 型、$c_{E_2} M$ は II 型、$c_{E_3} M$ は III 型の不変部分空間であって

$$M = c_{E_1} M \oplus c_{E_2} M \oplus c_{E_3} M \quad .$$

我々は I 型と II 型に対する $L^2(\sigma)$ の表現定理を示し、それを用いて解析性（特に III 型）を研究するのに基本となる不変部分空間の定理を証明しかつそれを用いて $L^p(\sigma)$ の表現定理を得る。

$\boxed{\text{補題 1}}$ M を $L^2(\sigma)$ の不変部分空間とする。そのとき、M が I 型である必要十分条件は $M = c_E \cdot g H^2$ となることである。ここで c_E は *analytic* で $|g| = 1$ a.e. 。

<u>証明</u> 本質的には筆者 [4、定理 2] である。$1 \leq p \leq \infty$ に対し、H^p、I^p または $\mathcal{L}^p$ がそこに属する *character* により

生成され、$H^p = \mathcal{L}^p \oplus I^p$ と書けることが基本である。

H^∞ は $L^\infty(\sigma)$ の *subalgebra* であるが、*totally order* の場合のように σ が H^∞ の上で乗法的ではないから、*Jensen* の不等式を満足しない。しかし $I^1 \oplus C$（C は複素数体）に属する関数に対しては *Jensen* の不等式を満足している。$f \in L^2(\sigma)$ に対して M_f を f を含む最小の不変部分空間とする。もし $g \in H^2$ が $u \in \mathcal{L}^2$ かつ $g_0 \in I^2$ に対して $g = u + g_0$ と書かれ $M_g = H^2$ となっているならば、

$$\inf_{f \in Q} \int_G |1 - f|^2 |g|^2 d\sigma = \int |u|^2 d\sigma$$

となる。ここで Q は $f(x) = \sum_{\lambda > 0} a_\lambda \chi_\lambda(x)$ となる G 上の三角多項式の全体である。

$\boxed{\text{補題 2}}$ もし $w \in L^1(\sigma)$、$w \geq 0$ かつ $\log w \in L^1(\sigma)$ ならば、$M_g = H^2$ となる $g \in H^2$ があって、$w = |g|^2$。

<u>証明</u> 補題1より、ある零でない *analytic* な C_E があって、$C_E w = C_E |g|^2$ とできる。$C_E = 1$ とできる事を示さなくてはならない。$0 \leq w \leq 1$ で $\log w \in L^1(\sigma)$ としてよい。各正整数 n に対して

$$h_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{w(x)} & , \ n\sqrt{w(x)} < 1 \\ 1 & , \ n\sqrt{w(x)} \geq 1 \end{cases}$$

とする。そのとき、$0 \le h_1 \le h_2 \le \cdots$、$h_n(x) \to 1$ a.e. x、$\log h_n \in L^1(\sigma)$ かつ $h_1 = \sqrt{w}$ である。このとき各 n に対して $h_n \le h_{n+1} \le 2h_n$ となっている事に注意する。この h_n と $I^1 \oplus C$ に対する Jensen の不等式を使って、$C_E = 1$ を証明できる。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $1 \le p < q \le \infty$ とする。$L^p(\sigma)$ の不変部分空間 M_p と $L^q(\sigma)$ の不変部分空間 M_q との間に次のような一対一の対応がつけられる。(1) $M_q = M_p \cap L^q(\sigma)$、(2) M_p は M_q の $L^p(\sigma)$ での閉包である。

証明　本質的には、補題2を用いるならば Helson - Lowdenslager [2 、 p12] であるが、やはり σ が H^∞ 上で乗法的でないという煩わしさがある。

$\boxed{\text{定理 2}}$ M を $L^p(\sigma)$ $(1 \le p \le \infty)$ の不変部分空間とする。そのとき、

(1) M がI型である必要十分条件は $M = C_E \cdot g H^p$ となることである。ここで C_E は analytic で $|g| = 1$ a.e.

(2) M がII型である必要十分条件は $M = C_E \cdot g I^p$ となることである。ここで C_E は analytic で $|g| = 1$ a.e.。

証明　定理1はこの定理が本質的には $p = 2$ だといっている。

2章 H^∞ を含む弱*-閉 subalgebra

この章と3、4章では Γ が (partially) archimedean order をつけられているとする。これは $\Gamma = P \cup (-P)$ となる semigroup P が Γ の中で maximal semigroup であることである。このとき、Γ から実数の group R の中への order を保つ明らかでない連続な準同型写像 ψ がある。その ψ は R から G への連続な準同型写像 φ を引き起こし、

$$\chi_\lambda(\varphi(t)) = e^{i\psi(\lambda)t} \qquad (t \in R、\lambda \in \Gamma)$$

となる。この仮定での group 上の解析性の研究は de Leeuw-Glicksberg [1] にある。

もし totally archimedean order なら H^∞ は $L^\infty(\sigma)$ の maximal 弱*-閉 subalgebra となることは、Gamelin の定理である [2、p33]。しかし単に archimedean order ならば、H^∞ を本当に含む $L^\infty(\sigma)$ と異なる subalgebra を見つけることができる。しかし、我々は Gamelin の定理を系として含む次の定理を示す事ができる。

定理3 B が H^∞ を含む $L^\infty(\sigma)$ の任意の弱*-閉 subalgebra ならば、ある analytic C_E があって、$B = C_E H^\infty + (1-C_E) L^\infty(\sigma)$ と書ける。

<u>証明</u> 本質的には筆者 [3、定理3] である。

3章　不変部分空間　の　スペクトル分解

この章の結果は本質的には Helson − Lowdenslager または Helson［2, p20〜31］による。しかし、やはり形式的な煩わしさがある。

Mは$L^2(\sigma)$の不変部分空間とする。全ての$\lambda\in\Gamma$に対して$\psi(\lambda)\neq 0$である$M_\lambda = M$のとき、Mを doubly 不変部分空間という。全ての$\lambda\in\Gamma$と$C_E M \neq \{0\}$である全ての analytic C_Eに対して$C_E M_\lambda \neq C_E M$のとき、Mを simply 不変部分空間という。この定義は Helson とは少し違う。任意の不変部分空間は doubly 不変部分空間と simply 不変部分空間の直和に分解される。$\psi(\Gamma)$がRで稠密とならないときは、定理2を用いて、単位円の Beurling の結果と同じく、全ての不変部分空間の表現ができる。よって以後$\psi(\Gamma)$がRで稠密と仮定する。

simply 不変部分空間の support E は、定理3を用いてC_Eが analytic になる事を示せるから、本質的ではなく、その support をGとしてよい。また、ある analytic C_Fがあって、$M = C_F M \oplus (1 - C_F)\, q I^2$と分解できる。ここで、$C_F M = C_F M_+$かつ$|q| = 1$ a.e.。よって$M = M_+$としてもよい。以後ずっとMは support がGで$M = M_+$となる simply 不変部分空間とする。

定義　G上の可測関数族 $A_t(x)$（$t \in R$、$x \in G$）がG上の cocycle であるとは、次の条件を満足するときである。（1）$|A_t(x)| = 1$ a.e. x、（2）$A_t(x)$ は t についての関数として $L^2(\sigma)$ で連続、（3）$A_{t+u}(x) = A_t(x) T_t A_u(x) = A_t(x) A_u(x + \varphi(t))$（$t, u \in R$）。

我々はHelson のように simply 不変部分空間を研究するのを、cocycle を研究する事に転化したい。即ち、一対一の対応をつける事ができる。方法はほとんどHelson と同じである。まず、M_λ（$\lambda \in \Gamma$）から右連続な単位の分解（$I - P_s$）を創る。これには、定理3を使う。ここで $s = \psi(\lambda)$ のとき P_s は M_λ への $L^2(\sigma)$ からの射影である。このとき、射影族 $\{P_s\}$ はMが不変部分空間ということより、

$$P_{s+\psi(\lambda)} = S_\lambda P_s S_{-\lambda} \quad (s \in R \text{ かつ } \lambda \in \Gamma) \quad \cdots (*)$$

を満たす。ここで、$\lambda \in \Gamma$ に対して $S_\lambda f = \chi_\lambda f$ とする。$\{S_\lambda\}$ は $L^2(\sigma)$ に作用する unitary group である。さて、$V_t = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{its} dP_s$ とすると、Stone の定理により、$\{V_t\}$ は unitary group である。このとき、Mが不変部分空間より、

$$V_t S_\lambda = e^{it\psi(\lambda)} S_\lambda V_t \quad (t \in R \text{ かつ } \lambda \in \Gamma) \quad \cdots (**)$$

を満たす。これは $\{V_t\}$ と $\{S_\lambda\}$ が Weyle の commutation relation を満たすということである。逆に（$*$）と（$**$）を満たす左連続な射影族 $\{P_s\}$ と連続な unitary group $\{V_t\}$

は、ただ一つの simply 不変部分空間 M より得られる。今はもう、simply 不変部分空間と cocycle が一対一に対応するとは Helson と同じである。ただ、$\psi(\Gamma)$ が R で稠密のときであることに注意しなければならない。

我々は simply 不変部分空間を研究するのに、cocycle を研究するでしょう。ある $|g(x)| = 1$ a.e. x となる g に対して、$A_t(x) = g(x)\bar{g}(x+\varphi(t))$ となっている cocycle を coboundary という。これは $M = gH^2$ と書ける事である。C_{E_j} は analytic で $\sum_{j=1}^{\infty} C_{E_j} = 1$ とし、s_j は実数としかつ $|g_j| = 1$ a.e. とするとき、$A_t(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{E_j} e^{-its_j} g_j(x)\bar{g}_j(x+\varphi(t))$ となっている cocycle を trivial cocycle という。$\psi(\Gamma) = R$ のとき、trivial cocycle は coboundary となる。定義は Helson とは少し違う。

$\{P_s\}$、$\{V_t\}$、$\{A_t\}$ を simply 不変部分空間 M と対応していると考える。$f \in L^2(\sigma)$ に対して、$-d(P_s f, f)$ は R 上の有限な正測度となる。L_a をこの測度が R 上のルベーグ測度に関して絶対連続となる f の全体、L_s は特異連続となるものの全体かつ L_d は離散的であるものの全体とする。totally archimedean order のとき、どんな simply 不変部分空間についても $L_a = L^2(\sigma)$ か $L_s = L^2(\sigma)$ か $L_d = L^2(\sigma)$ かである。しかし単に archimedean order のときは、$L_a = C_{E_a}L^2(\sigma)$、$L_s = C_{E_s}L^2(\sigma)$

かつ $L_d = C_{E_d} L^2(\sigma)$ となる。ここで、C_{E_a}、C_{E_s}、C_{E_d} は analytic で $C_{E_a} + C_{E_s} + C_{E_d} = 1$ である。我々は、$L_d = L^2(\sigma)$、$L_s = L^2(\sigma)$ または $L_a = L^2(\sigma)$ のとき cocycle A をそれぞれ離散型、特異連続型、絶対連続型と呼ぶ。このとき、cocycle A が trivial となる必要十分条件は M のスペクトル測度が離散型であることとなる。証明は Helson のようにするのだが、少し煩雑である。

R 上の測度 $d\nu(t) = dt/\pi(1+t^2)$ に対して $L^2(\nu)$ を考えると、$H^2(\nu)$ は $F \in L^2(\nu)$ で、全ての $u < 0$ に対して、$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1-it)^{-1} e^{-itu}\,dt = 0$ となるものの全体とする。M が cocycle A をもつ simply 不変部分空間とする。このとき、$f \in L^2(\sigma)$ が M に属するための必要十分条件は $A_t(x) f(x + \varphi(t)) \in H^2(\nu)$（t の関数として、a.e. x に対して）となる事である。

4章 Flow に関して不変な cocycle

totally archimedean order のとき G にひき起こされる flow はエルゴード的であるから、flow に関して不変な cocycle は定数となる。もし $\phi(\Gamma) = R$ ならば、その cocycle は coboundary となり、研究すべきものは何もない。しかし

archimedean order のとき、たとえ$\psi(\Gamma)=R$でも一般には多くの不変な cocycle が存在する。我々は不変な cocycle を研究する。

$\lambda\in\Gamma$は$\psi(\lambda)=0$でその位数は無限とするとき、$A_t(x)=\exp t\log X_\lambda(x)$は cocycle となりしかも trivial ではない事が割合簡単に示せる。その証明には、$\psi(\Gamma)$がRで稠密である事を使わない。以後$\{P_s\}$、$\{V_t\}$、$\{A_t\}$を simply 不変部分空間Mと対応していると考える。

$\boxed{\text{定理4}}$ Mを cocycle Aを持つ simply 不変部分空間とすると、次の事は同値である。

（1）$A_t(x+\varphi(s))=A_t(x)$ a.e. x $(t,s\in R)$，即ち$A_t(x)$は不変な cocycle である。

（2）$f\in M$なら$f_{\varphi(s)}(x)=f(x+\varphi(s))$ $(s\in R)$はMに属する、即ちMは$\varphi(R)$の元の変換によって不変である。

<u>証明</u>（1）は$T_tA_s=A_s$であり、（2）は$T_tP_0=P_0T_t$という事である。$V_t=A_tT_t$と前章の（$*$）と（$**$）を使うとよい。

$\boxed{\text{補題3}}$ Mを不変な cocycle Aを持つ simply 不変部分空間とすると、G上の全ての三角多項式$\sum_\lambda a_\lambda X_\lambda$に対して、

$$P_0\Big(\sum_\lambda a_\lambda X_\lambda\Big)=\sum_\lambda a_\lambda C_{E-\psi(\lambda)}X_\lambda$$

である。ここで、$C_{E_{-\psi(\lambda)}} = P_{-\psi(\lambda)}1$ は analytic である。

<u>証明</u> 定理4と(*)より $P_s 1 = C_{E_s}$ となり、C_{E_s} は analytic である。(**)を使う。

$\boxed{\text{定理5}}$ ある $|g(x)| = 1$ a.e. x に対して、$A_t(x) = g(x) \cdot \overline{g(x+\varphi(t))}$ が不変な cocycle ならば、

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} C_{F_j} \cdot u_j \cdot \chi_{-\lambda_j} \quad ,$$

ここで C_{F_j} は analytic、$\sum_{j=1}^{\infty} C_{F_j} = 1$ かつ $u_j \in \mathcal{L}^\infty$ で $|u_j(x)| = 1$ a.e. x。cocycle $A_t(x)$ が離散型であるための必要十分条件は、

$$A_t(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{its_j} \cdot C_{F_j}(x) \quad ,$$

ここで C_{F_j} は analytic かつ $\sum_{j=1}^{\infty} C_{F_j} = 1$、$s_j$ は実数。

<u>証明</u> 後半は前半と前章の注意よりでてくる。$M = gH^2$ とすると、$s = \psi(\lambda)$ に対して $M_{s-0} = (M_s)_+ = M_s$ かつ $(P_s \ominus P_{s+0})L^2(\sigma) = g\chi_\lambda \mathcal{L}^2$。$P_s 1 = C_{E_s}$ かつ $P_{s+0}1 = C_{E_{s+0}}$ となることは、cocycle が不変であることによる特殊な性質であるが、$C_{E_s} - C_{E_{s+0}} \in g\chi_\lambda \mathcal{L}^2$ である。$F(s) = \sigma(E_s)$ とすると、$F(s)$ は単調非増加な左連続な関数であり、前章の注意により R の有界区間で階段関数である。よって $F(s) \neq F(s+0)$ となる高々可算個の点があることを使うとよい。

$v \in \mathcal{L}^1$ が実数値関数で、$A_t(x) = e^{itv(x)}$ とすると、$A_t(x)$ は不変な cocycle であるが、定理5により、もし v が $v = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j C_{F_j}$ (α_j は実数で C_{F_j} は analytic) とならなければ $A_t(x)$ は trivial ではない。totally archimedean order のときは、trivial ではない cocycle を見つける事は難しく、ある意味で見つけられたものは数個であるが、単に archimedean order の場合には無数にしかも容易に trivial でない cocycle を見つけれる。

$\boxed{\text{定理 6}}$ $\psi(\lambda) = 0$ でその位数が無限である $\lambda \in \Gamma$ が少くとも一つあるとする。μ を R 上の確率測度とする。全ての $t \in R$ に対して、

$$\int A_t \, d\sigma = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{its} \, d(P_s 1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} \, d\mu(s)$$

が成立する cocycle A がある。特に、絶対連続または特異連続な cocycle A が存在する。

<u>証明</u> $t \in R$ に対して $G(t) = \mu((-\infty, t])$ とし、$1 - G(t)$ の逆関数をちょっと直して $(0, 2\pi]$ 上の関数としたものを $v(x)$ とする。この v を $\hat{v}$ として $\mathcal{L}$ に埋めこみ、$A_t(x) = e^{it\hat{v}(x)}$ とすると求める cocycle である。ここで、$\mathcal{L}$ とは analytic な Borel 集合から作られる測度空間 (G、$\mathcal{A}$、σ) で可測な関数の全体である。$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}$ である。

$-\infty < s < \infty$ に対して、$E_s = \{x \in G ; \tilde{\psi}(x) \geq s\}$ とし、$C_{E_s} = P_s 1$ となることを示すとよい。それには前章の最後の注意を使う。

cocycle を通して $M = g H^2$ と書けない $\varphi(R)$ の変換で不変な *simply* 不変部分空間が無数に存在する事を示したが、次にそんな不変部分空間はどんな空間かを調べなければならない。補題3が示すように、これらの不変部分空間はHelson が研究しているものより非常にわかりやすい構造をもっている。例えば、$\varphi(R)$ の変換で不変な *simply* 不変部分空間は $|g| = 1$ a.e. なる g を含むということを証明するのでさえ、非常にやさしい。詳しくは筆者〔5〕を参照して下さい。

5章 *Totally ordered dual* を持つ *group*

$\Gamma = \Gamma_+ \cup (-\Gamma_+)$ かつ $\Gamma_+ \cap (-\Gamma_+) = \{0\}$ となる *semigroup* Γ_+ が Γ に与えられているとする。M を $L^p(\sigma)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の不変部分空間とする。もし $\lambda \leq \tau$ ならば、$M_\lambda \supseteq M_\tau$ である。起り得る二つの場合がある。

場合Ⅰ．$\lambda \lneq \tau$ である全ての λ、τ に対して、$M_\lambda \supsetneq M_\tau$．

場合Ⅱ．$\lambda \lneq \tau$ かつ $M_\lambda = M_\tau$ となる λ、τ が存在する．

Helson-Lowdenslager〔 2 、p13〕は場合Ⅰのある特別な

ものを調べた。次の二つの系は定理2の系である。

$\boxed{系1}$ (ヘlelson - Lowdenslager) Mを$L^p(\sigma)$ ($1 \leq p \leq \infty$)の不変部分空間とする。そのとき、M $\supsetneq$ [$\bigcup_{\lambda>0} M_\lambda$ の$L^p(\sigma)$での閉包]ならば、$M = \mathfrak{g} H^p$ となる。ここで、$|\mathfrak{g}| = 1$ a.e.。

証明 仮定は semigroup Γ_+ についてMがI型ということ。

我々は場合IIを調べる。このとき、M = [$\bigcup_{\lambda>0} M_\lambda$ の$L^p(\sigma)$での閉包]となり、系1では表現できない。$\Lambda_+ = \{\lambda \in \Gamma_+ ; M_\lambda = M\}$ かつ $P = \Gamma_+ \cup (-\Lambda_+)$ とすると、PはΓ_+を含む semigroup である。頁3の分解より、Pについて、$C_{E_1}M$はI型、$C_{E_2}M$はII型、$C_{E_3}M$はIII型の不変部分空間であって、$M = C_{E_1}M \oplus C_{E_2}M \oplus C_{E_3}M$ と書ける。ここで、$C_{E_1} + C_{E_2} + C_{E_3} = 1$ かつ全ての $\lambda \notin \Lambda_+$ なる $\lambda > 0$ について $C_{E_i}(\lambda) = 0$ である。

$\boxed{系2}$ M、Λ_+ と C_{E_i} は上に与えられたものとする。そのとき、$C_{E_1}M = C_{E_1} \cdot C_{E_0} \cdot \mathfrak{g}$ [$\bigvee_{\lambda \in \Lambda_+} \chi_\lambda H^p$ の$L^p(\sigma)$での閉包]で、$C_{E_2}M = C_{E_2} \cdot C_{E_0'} \cdot \mathfrak{g}'$ [$\bigcap_{\lambda \in \Lambda_+} \chi_\lambda H^p$]。ここで、$C_{E_0}$と$C_{E_0'}$はフーリエ係数が $\lambda \notin \Lambda_+$ なる $\lambda > 0$ について零で、$|\mathfrak{g}| = |\mathfrak{g}'| = 1$ a.e.。

我々は$C_{E_3}M$、即ちIII型を調べたいが、そのために上のPがmaximal semigroupとなる場合を考える。そのとき、2章～4章の結果が適用できて、III型の不変部分空間が無数に存在する。またIII型で$\varphi(R)$の変換で不変な不変部分空間を調べることができる。

参照文献

1. de Leeuw, K. and Glicksberg, I. : Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups, Acta Math. 109 (1963), 179-205.
2. Helson, H. : Analyticity on compact abelian groups, Algebras in analysis, Williamson, J. H., Academic press, 1975, 1-62.
3. Nakazi, T. : Nonmaximal weak-* Dirichlet algebras, Hokkaido Math. J. 5 (1976), 88-96.
4. Nakazi, T. : Invariant subspaces of weak-* Dirichlet algebras, to appear in Pacific J. Math.
5. Nakazi, T. : Invariant subspaces on compact abelian groups, in preprint.