数理解析研究所講究録
第289巻 1977年 82-95

Stolz homomorphism と Oricycle homomorphism

和歌山大 教育　　豊志 一男

§1 序

単位開円板 D 上の有界正則関数の全体からなる Banach 環 $H^\infty(D)$ の極大イデアル空間を $\overline{D}$ とする。単位円 C 上の点 1 を頂点とする Stolz 角領域 A の $\overline{D}$ における閉包 $\overline{A}$ に対し、$\overline{A} \setminus A$ に属する点を Stolz homomorphism といい、Stolz homomorphisms の全体を $\mathcal{S}$ とする。ここでは、$\mathcal{S}$ は連結集合であること、$\mathcal{S}$, $\overline{\mathcal{S}}$ はそれぞれ Gleason part の和集合であること、その他二，三の性質を述べる。

次に点 1 で単位円 C に接する D 内の二つの円によって囲まれる Oricycle 領域 A に対し、$\overline{A} \setminus A$ に属する点を Oricycle homomorphism といい、Oricycle homomorphisms の全体を $\mathcal{O}$ とするとき、$\mathcal{S}$ で述べたと同様な性質を $\mathcal{O}$ について考察する。

§2 準備

Carleson の結果から単位開円板 D は Banach 環 $H^\infty = H^\infty(D)$ の極大イデアル空間 $\overline{D}$ で稠密である。D 上連続な関数 f が $\overline{D}$ 上の連続な関数に拡張できるとき，この拡張した関数を $\hat{f}$ で表す。u を D で上方（または下方）に有界な調和関数とし，v を u の共役調和関数とすると，$f = \exp(u + iv)$（または $f = \exp(-u - iv)$）が H^∞ に属し，$\hat{u} = \log|\hat{f}|$（または $\hat{u} = -\log|\hat{f}|$）を用いて，u を $\overline{D}$ 上の連続関数 $\hat{u}$ に拡張できる。

集合 $A\ (\subset \overline{D})$ の $\overline{D}$ における閉包を $\overline{A}$ で表す。また $\overline{A} \cap (\overline{D} \setminus D)$ を A' で表す。とくに $D' = \overline{D} \setminus D$ である。関数 $f(z) = z$ に対して $D_\alpha = \{z \in D' : \hat{f}(z) = \alpha\}$ $(|\alpha| = 1)$ を点 α 上の fiber という。

単位円周 C 上の Lebesgue 測度 $d\theta$ による $L^\infty(d\theta)$ を $L^\infty(C)$ で，$L^\infty(C)$ の極大イデアル空間を X で表す。$X \subset D'$ である。H^∞ の Gelfand 表現 $\hat{H}^\infty$ の X への制限 $\hat{H}^\infty|X$ が X 上の logmodular 環で，X は $\hat{H}^\infty|X$ の Šilov 境界である。H^∞ と $\hat{H}^\infty|X$ は同一視することがある。$X_\alpha = X \cap D_\alpha$ とおく。

関数 $u^* \in L^\infty(C)$ の Poisson 積分

$$u(z) = P_z(u^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(e^{i\varphi})\, P_r(\theta - \varphi)\, d\varphi$$

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq r < 1, \quad P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

は D 上の有界複素調和関数である。$u^* \longmapsto u^\circ = \hat{u}|X$ によって定義される写像によって $L^\infty(C)$ と $C(X)$ は Banach 環として（等距離的）同型である。特に C 上の Lebesgue 可測集合 A の特性関

数 $u^* = \chi_A$ に対し，u^s は X 上の開かつ閉な集合 $A^s = \{x \in X : \hat{\chi}_A(x) = 1\}$ の特性関数である。この $u^* = \chi_A$ に対し $u = \mu(\cdot, A)$ っすなわち $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_A(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_A P_r(\theta-\varphi)\, d\varphi = \mu(z, A)$ は zにおける A の調和測度である。$u^* \in L^\infty(C)$ に対し

$$u(z) = \int_C u^*(\xi)\, \mu(z, d\xi)\ , \quad z \in D$$

が成立する。

$u^* \in L^\infty(C)$ とする。上で述べた (u^*, u, u^s) と $z \in \bar{D}$ に対し，写像 $u^s \longmapsto \hat{u}(z)$ は $C(X)$ 上の線形汎関数で，X 上確率測度 $\nu(z, \cdot)$ によって

$$\hat{u}(z) = \int_X u^s(\xi)\, \nu(z, d\xi) = \int_X \hat{u}(\xi)\, \nu(z, d\xi)\ , \quad z \in \bar{D}$$

と表される。特に上式が $u \in H^\infty$ に対し成立し，$\nu(z, \cdot)$ は H^∞ に対するその表現測度である。X 上の測度空間の $*$弱位相によって $\nu(z, \cdot)$ は $z \in \bar{D}$ の連続関数である。特に A^s が開かつ閉な集合であるときは $\nu(\cdot, A^s)|D = \mu(\cdot, A)$ が D 上の調和関数で，$\bar{D}$ 上の連続関数 $\nu(\cdot, A^s) = \hat{\mu}(\cdot, A)$ に拡張できる。

$\mathbb{E}_1 = \{E \subset D : E^{cl} \cap C = \{1\}\}$（ここで E^{cl} は平面上の E の閉包を表す。以下同様）とおく。また $z, w \in D$ に対し $\chi(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$ とおく。$E \subset D$，$0 < \delta < 1$ に対し

$$E^\delta = \{z \in D ;\ \chi(s, z) < \delta \text{ for some } s \text{ in } E\}$$

とおく。$E \in \mathbb{E}_1$ に対し，$E'(= \bar{E} \setminus D)$ と交わる Gleason part の全体からなる集合を $\mathcal{P}(E)$ で表す。ときには $\bigcup_{P \in \mathcal{P}(E)} P$ をまた

$\rho(E)$ で表す．$z, w \in \bar{D}$ が同じ Gleason part に属するとき $z \sim w$ と表す．$z \in \bar{D}$ を含む Gleason 部分を $P(z)$ とかく．

定理 2.1．$E, F \in \mathbb{E}_1$ とする．このとき $\rho(E) \supset \rho(F)$ であるための必要十分条件はある δ $(0<\delta<1)$ が存在して $E^{\delta} \supset F$ となることである．(Rosenfeld - Weiss [4], Theorem 3.2.)

§3 Stolz homomorphism

定義．$S_\alpha = \bigcup\{A' : A$ は $\alpha \in C$ を頂点とする Stolz 角領域$\}$ $(\subset D_\alpha)$ に属する点を点 α における Stolz homomorphism という．

以下 $S = S_1$ のみを取り扱う．

D で有界調和関数である $u(z) = \arg(1-z)$ $(-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2})$ に対して

(3.1) $\quad S = \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\}$, $\{\hat{u}(z) ; z \in S\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

が成立する．

$M = \{e^{i\theta} : 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$ とおき，$z \in D$ における M の調和測度を $\mu(z, M)$ で表す．$z_0 \in D$ に対して

$$\Gamma = \{z \in D : \mu(z, M) = \mu(z_0, M)\}$$

とおくと，Γ は三点 -1, z_0, 1 を通る円と D の共通部分である．そして $z \in \Gamma$ に対して $\mu(z, M) = \frac{\delta}{\pi}$ $(\in (0,1))$ である．ただし δ は Γ と弧 $C \setminus M$ のなす角である．$z \in \Gamma'$ とすると，z に収束するネット $\{z_\alpha\}$ $(\subset \Gamma)$ が存在して，$\mu(z_\alpha, M) \to \nu(z, M_1^s)$

(ただし $M_1^s = M^s \cap X_1$)．よって $\nu(z, M_1^s) = \frac{\delta}{\pi}$ である．これから $\mathcal{S} \subseteqq \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^s) < 1\}$ を得る．$\supseteqq$ も容易にわかり

(3.2) $\mathcal{S} = \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^s) < 1\}$，$\{\nu(z, M_1^s) : z \in \mathcal{S}\} = (0, 1)$

が成立する．

(3.2) から次のことがわかる．

(3.3) $D_1 \setminus \mathcal{S} = H^\infty\text{-hull}(M_1^s) \cup H^\infty\text{-hull}(X_1 \setminus M_1^s)$

$$H^\infty\text{-hull}(M_1^s) \cap H^\infty\text{-hull}(X_1 \setminus M_1^s) = \phi .$$

補題 3.1. $u(z) = \arg(1-z)$ $(-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2})$ とする．$\Gamma = \{z \in D : \mathrm{Re}\, z \geqq 0, u(z) = \alpha\}$ $(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$ ならば Γ' は連結集合である．

証明．$\Gamma_r = \Gamma \cap \{z \in D : |z-1| < r\}$ $(0 < r < 1)$ とおくとき，

$$\Gamma' = \bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}$$

となる．まず $\subseteqq$ となること．$\varphi \in \Gamma'$ に対し，φ に收束するネット $\{\varphi_\alpha\} \subset \Gamma$ が存在する．このとき $\varphi_\alpha(z) \to \varphi(z) = 1$ であるから，任意の $r > 0$ に対し，ある α_0 があって，$\alpha \geqq \alpha_0$ のとき $|\varphi_\alpha(z) - 1| < r$．ゆえに $\varphi_\alpha \in \Gamma_r$，ゆえに $\varphi \in \overline{\Gamma_r}$．ゆえに $\Gamma' \subseteqq \bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}$．次ぎに $\supseteqq$ となること．明らかに，$(\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}) \cap D = \phi$，ゆえに $\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r} \subset D'$，ゆえに $(\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}) \cap \overline{\Gamma} \subset D' \cap \overline{\Gamma}$ から $\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r} \subseteqq \Gamma'$．

いま Γ' が不連結集合であるとすると，$\Gamma' = A_1 \cup A_2$，$A_1 \neq \phi$，

$A_2 \neq \phi$, $A_1 \cap A_2 = \phi$, A_1, A_2 はコンパクト集合となる。このとき $U(\Gamma') = U(A_1) \cup U(A_2)$, $\overline{U(A_1)} \cap \overline{U(A_2)} = \phi$ となるものがある。ただし $U(\Gamma')$, $U(A_1)$, $U(A_2)$ はそれぞれ Γ', A_1, A_2 の $\bar{D}$ 近傍である。このとき、ある Γ_{r_0} が存在して、$\Gamma' \subset \overline{\Gamma_{r_0}} \subset U(\Gamma')$ となり、$\overline{\Gamma_{r_0}}$ は不連結集合となり、矛盾である。　　　　(証明終)

定理 3.2. (i) S は D' の開集合である。

(ii) S は連結集合である。

証明. (i)の証明. (3.2)式から $S = \{z \in D_1 ; 0 < \nu(z, M_1^s) < 1\}$ であるから S は D_1 の相対開集合である。また関数 $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ を考えると、$D' \setminus D_1$ 上で $|\hat{f}(z)| = 1$ であるから、$\overline{D' \setminus D_1}$ 上で $|\hat{f}(z)| = 1$。一方 S 上で $f(z) = 0$ であるから $\bar{S}$ 上で $\hat{f}(z) = 0$。よって

$$S \subset D' \setminus (\overline{D' \setminus D_1}) \subset D_1$$

ゆえに S は D' の開集合である。

(ii)の証明. $u(z) = \arg(1-z)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。$\Gamma' = [0, 1)$ とおくとき、$z_0 \in \Gamma'$ に対して

$$S = \bigcup_{w \in p(z_0)} \Gamma_w'$$

が成立する。ただし Γ_w は、$\hat{u}(w) = \alpha$ とするとき、$\Gamma_w = \{z \in D : \mathrm{Re}\, z \geq 0,\ u(z) = \alpha\}$ を満たす集合である。

なぜならば z が S に属するならば $\hat{u}(z) = \beta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$。そこで $\Gamma_1 = \{z \in D : \mathrm{Re}\, z \geq 0,\ u(z) = \beta\}$ とするとき、ある δ が存

在して，$[0,1)^{\delta}\supset \Gamma_1$，$\Gamma_1^{\delta}\supset[0,1)$であるから，定理2.1から$\rho(\Gamma_1)=\rho([0,1))$．ゆえに$\Gamma_1'\cap P(z_0)\neq\phi$．ゆえに$S\subseteqq\bigcup_{w\in P(z_0)}\Gamma_w'$．また$S\supseteqq\bigcup_{w\in P(z_0)}\Gamma_w'$は明らかであるから，$S=\bigcup_{w\in P(z_0)}\Gamma_w'$である。

$P(z_0)$は連結集合であり（Wermerの埋めこみ定理），補題3.1からΓ_w'は連結集合であるから，Sは連結集合である。

（証明終）

定理3.3. D'中でのD_1の位相境界$D_1\cap\overline{(D'\setminus D_1)}$を$C_B$とすると，$C_B$はGleason partの和集合である。（Weiss [6], p.96）.

$z\in D_1\setminus C_B$とすると，D中のある可算集合Eで，$E^{a}\cap C=\{1\}$（すなわち$E\in\mathbb{E}_1$）で，$z\in\overline{E}$を満たすものが存在する。（Weiss [6], p.96）

$C_B\supset X_1$である。

定理3.4. D上の調和関数uが

$$u(z)=u(re^{i\theta})=\int_0^{2\pi}P_r(\theta-\varphi)\,d\mu(\varphi)$$

と表されて（るとし）いて，$a=\inf_{D}u>-\infty$，$\mu(\{1\})=0$を仮定する，さらに$B\in\mathbb{E}^1$に対して$\lim_{\substack{z\in B\\ z\to 1}}u(z)=a$と仮定する。

このとき，$A=\{z\in D_1:\hat{u}(z)>a\}$に対して$D$上の非負調和関数$v$で，

$$\hat{v}(B')=0,\qquad \hat{v}(A)=+\infty$$

を満たすものが存在する。 (Doob [1], P. 193)

注意. u が D で有界調和関数ならば，(円周上の Lebesgue 測度にかんして)ほとんどすべての θ について $u^*(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1}u(re^{i\theta})$ が存在して，$u^*\in L^\infty(T)$ かつ $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-\varphi)u^*(e^{i\varphi})d\varphi$ である (Fatou の定理). よって $d\mu=u^*d\theta/2\pi$ に対して $\mu(\{1\})=0$ である。

定理 3. 5. (i) $z_0\in S$ に対して $P(z_0)\subset S$ である。

(ii) $z_0\in S$ とする. D 上の調和関数 $u(z)=\arg(1-z)$ $(-\frac{\pi}{2}<u(z)<\frac{\pi}{2})$ に対し $\{\hat{u}(z):z\in P(z_0)\}=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ である。また $z\in P(z_0)$ の表現測度 $\nu(z,\cdot)$ については $\{\nu(z,M_1^s);z\in P(z_0)\}=(0,1)$ である。ただし，$M=\{e^{i\theta};0\leqq\theta\leqq\pi\}$ で $M_1^s=\{x\in X:\hat{\chi}_A(x)=1\}\cap D_1$ である。

(iii) $z_0\in\overline{S}$ に対して $P(z_0)\subset\overline{S}$ である。

証明. (i) の証明. $w\in D_1\backslash S$ ならば $\nu(w,M_1^s)=1$ または $\nu(w,X_1\backslash M_1^s)=1$ である. $\nu(w,M_1^s)=1$ ならば $\nu(w,X_1\backslash M_1^s)=0$ である. 一方 (3.2) 式から，$z\in S$ に対して $\nu(z,X_1\backslash M_1^s)>0$. よって $\nu(z,\cdot)$ は $\nu(w,\cdot)$ に関して絶対連続にならない. したがって z と w は同じ Gleason part に属さない. $\nu(w,X_1\backslash M_1^s)=1$ としても同様な結論を得る。

(ii)の証明. $P(z_0)\subset S$ であることと (3.1) 式から

$$\{\hat{u}(z):z\in P(z_0)\}\subseteq(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

を得る．いま $\hat{u}(z_0)=\alpha_0$ とし，$\Gamma_0=\{z\in D: \mathrm{Re}\, z\geqq 0,\ u(z)=\alpha_0\}$ とすると $\Gamma_0'\ni z_0$ である．任意の $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に対して $\Gamma=\{z\in D;\ \mathrm{Re}\, z\geqq 0,\ u(z)=\alpha\}$ とおく．このときある $\delta\ (0<\delta<1)$ が存在して $\Gamma_0^\delta\supset\Gamma$ かつ $\Gamma^\delta\supset\Gamma_0$ である．ゆえに定理2.1から $\rho(\Gamma)=\rho(\Gamma_0)$．ゆえに $\Gamma'\cap P(z_0)\neq\phi$．このとき $w\in\Gamma'\cap P(z_0)$ に対して $\hat{u}(w)=\alpha$．ゆえに $\{\hat{u}(z): z\in P(z_0)\}=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ である。

$\{\nu(z, M_1^s);\ z\in P(z_0)\}=(0,1)$ なることも同様に証明できる。

(iii)の証明．$\bar{S}\cap C_B=\phi$ であるから（定理3.2の(i)の証明参照），定理3.3を用いて，任意の $z\in\bar{S}$ と任意の $w\in C_B$ は同じGleason partに属さない，ゆえに任意の $z\in\bar{S}$ と任意の $w\in D_1\setminus(\bar{S}\cup C_B)$ が同じGleason partに属さないことを示せばよい。

$u(z)=\arg(1-z)\ (-\frac{\pi}{2}<u(z)<\frac{\pi}{2})$ は D で有界調和関数である．$A=\overline{\{z\in D_1: -\frac{\pi}{4}<\hat{u}(z)\}}$ とおき $D_1\setminus(A\cup C_B)$ に属する一点 z_1 をとる。

$z_1\notin C_B$ よりある(可算)集合で $E^{cl}\cap C=\{1\}$，$\bar{E}\ni z_1$ を満たすものがある．よって z_1 に収束するあるネット $\{z_\alpha\}(\subset E)$ が存在する．いま z_1 のある $\bar{D}$ 近傍 $V(z_1)$ で $V(z_1)\cap(A\cup C_B)=\phi$ を満たすものをとると，ある添数 α_0 があって $\alpha\geqq\alpha_0$ ならば $z_\alpha\in V(z_1)$．$B=\{z_\alpha: \alpha\geqq\alpha_0\}\ (\subset D)$ に対し $B^{cl}\cap C=\{1\}$

で，$\lim_{\substack{z\in B\\ z\to 1}} u(z)=-\frac{\pi}{2}$ である．

このとき D 上の非負調和関数 v で

$$\hat{v}(B')=0,\quad \hat{v}(A)=+\infty$$

を満たすものが存在する（定理 3.4）．v_1 を v の共役調和関数とし，$f=\exp(-v-iv_1)$ とおくと，$f\in H^\infty(D)$，$\|f\|\leqq 1$，

$$|\hat{f}|=\exp(-\hat{v})=\begin{cases}1 & (z=z_0)\\ 0 & (z\in A)\end{cases}$$

ゆえに，z_1 と任意の $z\in A$ は同じ Gleason part に属さない．

u の代わりに $u_1=-u$ を用いることにより，上と同様に $A_1=\overline{\{z\in D_1 : \hat{u}_1(z)>-\frac{\pi}{2}\}}$ とおくと，任意の $z_1\in D_1\setminus(A_1\cup C_B)$ と任意の $z\in A_1$ は同じ Gleason part に属さない．

$$\begin{aligned}\overline{S}&=\overline{\{z\in D_1 : -\tfrac{\pi}{2}<\hat{u}(z)<\tfrac{\pi}{2}\}}\\ &=\overline{\{z\in D_1 : -\tfrac{\pi}{2}<\hat{u}(z)\}}\cap\overline{\{z\in D_1 : \hat{u}(z)<\tfrac{\pi}{2}\}}\\ &=A\cap A_1\end{aligned}$$

$z_1\in D_1\setminus(\overline{S}\cup C_B)$ ならば $z_1\in D_1\setminus(A\cup C_B)$ または $z_1\in D_1\setminus(A_1\cup C_B)$ である。$z_1\in D_1\setminus(A\cup C_B)$ ならば任意の $z\in A$ に対して $z_1\not\sim z$，よって任意の $z\in A\cap A_1$ に対し $z_1\not\sim z$，$z_1\in D_1\setminus(A_1\cup C_B)$ としても同様に任意の $z\in A\cap A_1$ に対して $z_1\not\sim z$．（証明終）

§4 Oricycle homomorphism

点 1 で単位円 C に接する D 内の円を点 1 における Oricycle

という．また点1における二つの Oricycle に囲まれる領域を点1における Oricycle 領域という．点1における一つの Oricycle Γ に対して $\{z\in\Gamma : \operatorname{Im} z \geqq 0\}$, $\{z\in\Gamma ; \operatorname{Im} z \leqq 0\}$ をそれぞれ Γ の upper oricycle, lower oricycle という．点1における upper oricycle 領域, lower oricycle 領域も同様に定義する。

定義．$O=\bigcup\{A' ; A$ は点1における Oricycle 領域$\}$ に属する点を Oricycle homomorphism という．また，$O^+=\bigcup\{A' :$ A は点1における upper oricycle 領域$\}$ に属する点を upper oricycle homomorphism という．$O^-=\bigcup\{A' ; A$ は点1における lower oricycle 領域$\}$ に属する点を lower oricycle homomorphism という。

$$O^+\subset H^\infty\text{-hull } M_1^s \quad , \quad O^-\subset H^\infty\text{-hull}(X_1\setminus M_1^s)$$

である．ただし $M=\{e^{i\theta} : 0\leqq\theta\leqq\pi\}$, $M_1^s=\{x\in X : \hat{\chi}_M(x)=1\}$ である．((3,3)式参照)　$O=O^+\cup O^-$, $\overline{O^+}\cap\overline{O^-}=\phi$ であるから O は不連結である．

定理 4.1. (i) O^+, O^- はそれぞれ D' の開集合である。

(ii) O^+, O^- はそれぞれ連結集合である．

証明．(i)の証明．$f(z)=\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ を考えると，$D'\setminus D_1$ 上では $|\hat{f}(z)|=1$ で，$O=\{z\in D_1 ; 0<|\hat{f}(z)|<1\}$ であるから $O=\{z\in D' ; 0<|\hat{f}(z)|<1\}$ となり O が D' で開集合である．ゆえに O^+,

O^- は D' の開集合である。

(ii) $z_0 \in O^+$ を一つ固定する．このとき，ある upper oricycle Γ_0 が存在して $\Gamma_0' \ni z_0$ である．$w \in P(z_0)$ に対して upper oricycle Γ_w を次のように定義する．

$$\Gamma_w = \{ z \in D; \operatorname{Im} z \geqq 0, |f(z)| = c \}, \text{ ただし } c = |\hat{f}(w)|$$

(この Γ_w は中心 $(\frac{k}{k-1}, 0)$，半径 $\frac{1}{1-k}$ (ただし $\log c = k$) の upper oricycle である) このとき

$$O^+ = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$$

である。なぜならば $z \in O^+$ ならば $|\hat{f}(z)| = l$ $(0 < l < 1)$．$\Gamma = \{ z \in D : \operatorname{Im} z \geqq 0, |f(z)| = l \}$ とおく．このときある δ が存在して $\Gamma_0^{\delta} \supset \Gamma$ でかつ $\Gamma^{\delta} \supset \Gamma_0$ であるから，定理2.1から $\rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_0)$。ゆえに $\Gamma' \cap P(z_0) \neq \phi$．よってある $w \in P(z_0)$ に対して $\Gamma = \Gamma_w$ 。ゆえに $O^+ \subseteqq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$。$O^+ \supseteqq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ は明らかであるから，$O^+ = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$．

補題3.1と同様な証明により Γ_w' は連結集合であることがわかり，これと $P(z_0)$ の連結性から O^+ の連結性を得る．

(証明終)

定理4.2. (i) $z_0 \in O^+$ に対して $P(z_0) \subset O^+$ である．

(ii) $z_0 \in O^+$ とする．関数 $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ に対して，$\{ |\hat{f}(z)| ; z \in P(z_0) \} = (0, 1)$ である．

O^- に対しても同様なことが成立する．

証明．(i)の証明．先ず $z_0 \in O$ ならば $P(z_0) \subset O$ となることを示す．このためには任意の $w \in D_1 \setminus O$ と z_0 が同じ Gleason 部分に属さないことを示せばよい．

$f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ に対して $O = \{z \in D_1 ; 0 < |\hat{f}(z)| < 1\}$ であるから，$|\hat{f}(w)| = 1$ または $\hat{f}(w) = 0$ である．

(a) $|\hat{f}(w)| = 1$ のとき．$F = \dfrac{f - \hat{f}(z_0)}{1 - \overline{\hat{f}(z_0)}\,f}$ とおくと，F は $H^\infty(D)$ に属する inner function である．$\hat{F}(z_0) = 0$，$|\hat{F}(w)| = 1$ であるから

$$\begin{aligned}\sigma(z_0, w) &= \sup\{\,|\hat{f}(w)| \,;\, f \in H^\infty(D),\ \|f\| \leqq 1,\ \hat{f}(z_0) = 0\} \\ &= 1\end{aligned}$$

よって z_0 と w が同じ Gleason 部分に属さない．

(b) $\hat{f}(w) = 0$ のとき．D で $f \neq 0$ であるから Royden の補題 (Hoffman [2], Lemma 2.2) より，$P(w)$ 上で $\hat{f} = 0$．他方 $0 < |\hat{f}(z_0)| < 1$．ゆえに $z_0 \notin P(w)$．

以上から $P(z_0) \subset O$ となることがわかった．次に $z_0 \in O^+$ ならば $P(z_0) \subset O^+$ となること，これは $O = O^+ \cup O^-$，$\overline{O^+} \cap \overline{O^-} = \phi$ と $P(z_0)$ の連結性から従う．

(ii)の証明．$z_0 \in O^+$ ならば $P(z_0) \subset O^+$ で，$\{|\hat{f}(z)| : z \in O\} = (0, 1)$ なることから $\{|\hat{f}(z)| : z \in P(z_0)\} \subseteqq (0, 1)$ である．

ある upper oricycle Γ_0 が存在して $\Gamma_0' \ni z_0$ である．任意の $c \in (0, 1)$ に対して $\Gamma_1 = \{z \in D ; \operatorname{Im} z \geqq 0,\ |f(z)| = c\}$ とお

くと，Γ_1 は upper oricycle である．このときある δ $(0<\delta<1)$ が存在して $\Gamma^\delta \supset \Gamma_1$，$\Gamma_1^\delta \supset \Gamma$ である．ゆえに定理 2.1 から $\rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_1)$．ゆえに $\Gamma_1' \cap P(z_0) \neq \phi$．ゆえにある $z \in P(z_0)$ に対して $|\hat{f}(z)| = c$．これから $\{|\hat{f}(z)| : z \in P(z_0)\} = (0, 1)$ である．　（証明終）

文　献

[1] J. L. Doob, Boundary approach filters for analytic function. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973), 187–217.

[2] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. Math. 86 (1967), 74–111.

[3] A. Kerr-Lawson, A filter description of the homomorphisms of H^∞, Canad. J. Math., 17 (1965), 734–757.

[4] M. Rosenfeld and M. L. Weiss, Bounded analytic functions tending radially to zero, Proc. London Math. Soc., 18 (1968), 714–726.

[5] ——————————, A function algebra approach to a theorem of Lindelöf, J. London Math. Soc., 2 (1970), 209–215.

[6] M. L. Weiss, Some separation properties in sup-norm algebras of continuous functions, 93–97, in Function algebras, Scott, Foresman, 1966.