数理解析研究所講究録
第290巻 1977年 9-18

L_1における positive operator の reduction について

東大・養(院) 宮島静雄

L_1空間上の positive operator の古典的な例として保測変換から導かれるものがあるが，この場合についてはエルゴード的な成分への分解ができることが知られている。(例えば十時[7]) 一方で近年 新納-沢島[6] は $C(X)$ 型の Banach lattice (AM-space) 上のある種の positive operator のエルゴード的な分解を与え，彼らの irreducible positive operator のスペクトルについての深い結果を用いて分解された operators のスペクトルともとの operator のスペクトルとの関係を調べた。その後筆者は彼らの結果を部分的に拡張した([3],[4])。そこでこのような分解が一般の Banach 束上の positive operator に対し，どの程度拡張できるかということが問題になるが，L_1空間 (AL-space) の場合について一応の結果が得られたので報告したい。

§1. 基本的な定義と標準的な場合へのreduction

L_1空間上のpositive operator Tの分解を考えるわけであるが，どのような程度まで分解するのかという問題がまずある。保測変換の場合のエルゴード分解に対応して，一般のTに対しては次の意味でirreducibleな成分にまで分解するのである ——

Tがirreducibleとは自明でないT-不変なidealが存在しないこと（ここにidealとはclosed subspace Iで，$x \in I$，$|y| \leq |x|$なら$y \in I$となるようなもの）。

さて $E = L_1(\Omega, \Sigma, m)$ を σ-有限な測度空間(Ω, Σ, m)における可積分函数全体のなす空間とし，TをE上の有界作用素で次のI)，II)を満たすものとする。

I) T は positive （i.e. $\forall f \geq 0, f \in E$ に対し $Tf \geq 0$）

II) $T_N \equiv \frac{1}{N}(I + T + \cdots + T^{N-1})$ がある作用素Pに$N \to \infty$で強収束する。（これをTがstrongly ergodicであるという。）

このときII)の中の作用素Pは次の性質を持つ：

a) $PT = TP = P$　　　b) $P'T' = T'P' = P'$

c) $\forall f \in E$　$Tf = f \Leftrightarrow Pf = f$　　　c) $\forall \varphi \in E'$　$T'\varphi = \varphi \Leftrightarrow P'\varphi = \varphi$

ここでideal $I = \{f \in E;\ P|f| = 0\}$を考えると，これは$T$-不変である。$I$に対して$\Omega$の分割$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$があり$I = L_1(\Omega_2) = \{f \in E;\ f = 0 \text{ on } \Omega_1\}$となり，商空間$E/I$は$L_1(\Omega_1) = \{f \in E;\ f = 0 \text{ on } \Omega_2\}$とBanach束として等長同型となる。

$T_1 f = 1_{\Omega_1} Tf$ によって定義される $L_1(\Omega_1)$ 上の operator T_1 は明らかに positive で，$\frac{1}{N}(I+T_1+\cdots+T_1^{N-1})f$ は $N \to \infty$ で $1_{\Omega_1}Pf$ に強収束するので strongly ergodic である。さらにこの極限作用素 $P_1 : f \longmapsto 1_{\Omega_1}Pf$ は $P_1|f| = 0$ から $f = 0$ が導かれるという意味で strictly positive である。一方 T の $L_1(\Omega_2)$ への制限 T_2 はやはり positive であるが $\frac{1}{N}(I+T_2+\cdots+T_2^{N-1})$ は 0 に強収束する。(cf. Derriennic and Lin [ ], Th. 2.1)。

T の分解を考える際重要なのは T_1 の方なので，以後 $T = T_1$ であるとしておくが，これは P が strictly positive であると仮定することと同等である。次に m が σ 有限な測度であるという仮定から "最大の" support をもつ P-不変な函数 $e \in E_+$ が存在することがわかる。$\Omega_0 = \mathrm{support}(e)$ とすると，Ω_0 上で測度 $e \cdot dm = dm'$ と m の Ω_0 への制限 m_0 は同値である。そして空間 $L_1(\Omega_0, m_0)$ と $L_1(\Omega_0, m')$ は写像 $i : f \in L_1(\Omega_0, m_0) \longrightarrow f/e \in L_1(\Omega_0, m')$ により Banach 束として同型になる。$L_1(\Omega_0, m_0)$ は $L_1(\Omega, m)$ の T-不変 ideal とみなされるので，同型写像 i を介して $L_1(\Omega_0, m')$ 上の operator が次の図式により定まる。

$$\begin{tikzcd}
L_1(\Omega_0, m_0) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i"'] & L_1(\Omega_0, m_0) \arrow[d, "i"] \\
L_1(\Omega_0, m') \arrow[r, "U"] & L_1(\Omega_0, m')
\end{tikzcd}$$

同様に P から $L_1(\Omega_0, m')$ 上の operator Q が定まる。これ以後我々

は，U，Qしか扱わないのでU，Qの代わりにT，Pと書くことにする。こうした場合，T,Pがどのような性質を持つことになるかというと次の条件を満たしていることがわかる。

I) Tは positive

II) $T_N \equiv \frac{1}{N}(I+T+\cdots+T^{N-1})$ は $N \longrightarrow \infty$ でPに強収束する。

III) Pは strictly positive

IV) $T\mathbb{1}=\mathbb{1}$ （ここで $\mathbb{1}$ は定数函数1を表わす．考えている測度空間は今までの reduction により有限になっている。）

これから条件I)～IV)をみたすTの分解を考えるのであるがそれにはT，Pの土台となっている測度空間を hyperStonean space におきかえる，すなわちある hyperStonean space Xと support(μ)=X となる normal measure μ があり $L_1(X,\mu)$ と $L_1(\Omega,m)$ が Banach 束として等長同型，しかも同じ同型写像で $L_\infty(\Omega,m)$ が $C(X)$ に同型となるようにできる。この同型写像を使って前と同様にTを $L_1(X,\mu)$ 上の operator と考えることができ，そうした場合，T，PはI)～IV)の他に $C(X)$ を $C(X)$ に写すという条件を満足する。

V) $T\,C(X)\subset C(X)$ ，$P\,C(X)\subset C(X)$

従ってT，Pを $C(X)$ 上に制限して $C(X)$ における operator が得られるが，これらをそれぞれ T_0，P_0 と書くことにする。

§2. Reduction Theory

前節の最後で hyperstonean space X と $C(X)$ 上の positive projection P_0 を得たが，P_0 はあきらかに strictly positive で，$P_0 \mathbb{1} = \mathbb{1}$ を満足する。従って P_0 に対して沢島－新納［　］の reduction theory が摘用できて，次のことがわかる。$C(X)'$ の compact subset Λ と連続写像 $\tau : X \longrightarrow \Lambda$ が存在して，$P_0 C(X)$ は $C(\Lambda)$ と写像 $f \in C(\Lambda) \longmapsto f \circ \tau \in C(X)$ のもとに同型となる．また任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $X_\lambda = \tau^{-1}(\lambda)$ は λ の support を含み，$f \in C(X)$ が X_λ 上で 0 ならば $P_0 f$ も X_λ 上で 0 となる．そして $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と直和分割される。特に今の場合，X 上に normal measure μ が存在するので，$f \in C(\Lambda)$ に対し $\nu(f) = \mu(f \circ \tau)$ と定義することにより Λ 上の measure ν が定まる．これについて次が成り立つ。

Lemma 1. Λ は stonean space であり ν は $\mathrm{supp}\cdot \nu = \Lambda$ となる normal measure である。

この測度 ν と写像 τ に関する μ の分解が存在することがわかる。すなわち

Proposition 1. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して X 上の positive measure μ_λ で $\|\mu_\lambda\| = 1$，$\mathrm{supp}\, \mu_\lambda \subset X_\lambda$．となるものが存在する．そして $f \in C(X)$ に対し $\mu_\lambda(f)$ は λ の連続函数で

$$\mu(f) = \int \mu_\lambda(f)\, d\nu$$

が成り立つ。

証明. 任意の $f\in C(X)$, $g\in L^1(\nu)$ に対し

$$\left|\int f\cdot g\circ\tau\, d\mu\right| \le \|f\|_\infty \|g\|_1 .$$

がなりたつのである $\tilde{h}_f\in L_\infty(\nu)$ で

$$\int f\, g\circ\tau\, d\mu = \int \tilde{h}_f\, g\, d\nu$$

が任意の $g\in L_1(\nu)$ について成り立つようにできる。ところが ν が normal なので $\tilde{h}_f$ と同値な連続函数 $h_f\in C(\Lambda)$ が一意的に存在する (cf. Dixmier [2])。この h_f に対して任意の f_1, $f_2\in C(X)$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\Lambda$ に対し $h_{f_1+f_2}(\lambda)=h_{f_1}(\lambda)+h_{f_2}(\lambda)$, $h_{\alpha f_1}(\lambda)=\alpha h_{f_1}(\lambda)$ が成り立つ。故に写像 $f\in C(X)\longmapsto h_f(\lambda)$ は $C(X)$ 上の positive measure μ_λ を定める。また定義より $\mu_\lambda(f)$ は λ の連続函数で

$$\int f\, d\mu = \int \mu_\lambda(f)\, d\nu$$

が成り立つ. $\|\mu_\lambda\|=1$, $\mathrm{supp}\,\mu_\lambda\subset X_\lambda$ も容易に証明できる。∎

Lemma 1 の前で述べたように, $f=0$ on X_λ から $P_0 f=0$ on X_λ が従うが, $T_0P_0=P_0T_0=P_0$ を使うと次の命題が [ ] Theorem 2. v) と全く同様に証明できる。

Proposition 2. 任意の $\lambda\in\Lambda$, $f\in C(X)$ に対し $f=0$ on X_λ ならば. $T_0 f=0$ on X_λ である。

以上により T_0 [resp. P_0] から $C(X_\lambda)$ 上の operator T_λ [resp. P_λ] が次のようにして導かれる —— $f\in C(X_\lambda)$ に対しその延長 $f_1\in C(X)$ をとり $T_\lambda f = T_0 f_1|_{X_\lambda}$ [resp. $P_\lambda f = P_0 f_1|_{X_\lambda}$] と定義するのであ

る。こうして得られた P_λ, T_λ が実は $L_1(\mu_\lambda)$ 上の operator に拡張できることが示される（μ_λ は Prop 1. の分解で得られた X_λ 上の measure.）。

Proposition 3. 任意の $\lambda \in \Lambda$, $f \in C(X_\lambda)$ に対し

$$\int |T_\lambda f|\, d\mu_\lambda \leq \|T\| \int |f|\, d\mu_\lambda$$
$$\int |P_\lambda f|\, d\mu_\lambda \leq \|P\| \int |f|\, d\mu_\lambda$$

が成り立つ。

Proof. $|T_\lambda f| \leq T_\lambda |f|$ なので上の不等式を $f \geq 0$ として証明すればよい。$f_1 \in C(X)$ を f の延長で nonnegative なものとする。このとき任意の $g \in C(\Lambda)$ に対して

$$T_0(f_1 \cdot g\circ\tau) = g\circ\tau \cdot T_0 f_1$$

が成り立つことが Prop. 2 から分る。これから $g \geq 0$ のとき

$$\int g(\lambda)\, \mu_\lambda(T_0 f_1)\, d\nu = \|T_0(f_1 \cdot g\circ\tau)\|_1 \leq \|T\|_1 \|f_1 \cdot g\circ\tau\|_1$$

従って $$\int g(\lambda)\, \mu_\lambda(T_0 f_1)\, d\nu \leq \|T\|_1 \cdot \int g(\lambda)\, \mu_\lambda(f_1)\, d\nu$$

$\mu_\lambda(f_1)$ 及び $\mu_\lambda(T_0 f_1)$ は λ の連続函数で g は任意の正値函数としてよいから $\mu_\lambda(T_0 f_1) \leq \|T\| \mu_\lambda(f_1)$ を得る。f_1 と T_λ の定義から $\mu_\lambda(T_\lambda f) \leq \|T\| \mu_\lambda(f)$ を得る。P_λ についての不等式も同様に証明できる。∎

この命題により T_λ [resp. P_λ] の $L_1(\mu_\lambda)$ への延長が一意的に存在することがわかるが、その延長も同じ記号で表わすことにする。このとき次のことが簡単にわかる.

Corollary. $\|T\| = \sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda\|$, $\|P\| = \sup_{\lambda\in\Lambda}\|P_\lambda\|$.

上と同様に $\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T_\lambda^n\right\| \leq \left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}T^n\right\|$ が証明されるので，

[ ], Th. 4.2 により $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T_\lambda^n$ は $N\to\infty$ である作用素 Q_λ に強収束する。Q_λ は $T_\lambda Q_\lambda = Q_\lambda T_\lambda = Q_\lambda$ をみたす positive projection である。また $P_\lambda Q_\lambda = Q_\lambda P_\lambda = P_\lambda$ も成り立っている。P_λ と Q_λ の関係について次のことが言える。

Proposition 4. T_N が P にノルム収束すれば，任意の $\lambda\in\Lambda$ について $P_\lambda = Q_\lambda$ が成り立つ。

Proof. 任意の $f\in C(X)$, $g\in C(\Lambda)$ に対し

$$\|(T_N-P)(f\cdot g\circ\tau)\| = \int |g(\lambda)|\cdot\mu_\lambda(|(T_{\lambda,N}-P_\lambda)f|)\,d\nu$$

が成り立つ。ここに $T_{\lambda,N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T_\lambda^n$。これから $\|T_N-P\| \geq \|T_{\lambda,N}-P_\lambda\|$ が Prop. 3 と同様に得られ $T_{\lambda,N}$ は P_λ にノルム収束することがわかる。従って $P_\lambda = Q_\lambda$ がすべての $\lambda\in\Lambda$ で成立する。∎

一般の場合には

Proposition 5. $f\in C(X)$ に対し ν-a.e. の λ につき $P_\lambda f|_{X_\lambda} = Q_\lambda f|_{X_\lambda}$ が成り立つ。

Proof. Prop. 4 における式において $g\equiv 1$ とすれば

$$\|(T_N-P)f\| = \int \mu_\lambda(|(T_{\lambda,N}-P_\lambda)f|)\,d\nu$$

$\|(T_N-P)f\| \longrightarrow 0\ (N\to\infty)$ より部分列 $\{N_k\}_{k=1,2,\ldots}$ があって

$$\lim_{k\to\infty}\mu_\lambda(|(T_{\lambda,N_k}-P_\lambda)f|) = 0 \qquad \nu\text{-a.e. } \lambda$$

一方 $\lim_{k\to\infty}T_{\lambda,N_k}f|_{X_\lambda} = Q_\lambda f|_{X_\lambda}$ なので $Q_\lambda f|_{X_\lambda} = P_\lambda f|_{X_\lambda}$ a.e. λ ∎

さて今まで $\lambda\in\Lambda$ は単なるパラメータとしてのみ出て来たが実は最初に述べたように X 上の測度であり、さらに $\mathrm{supp}\,\lambda\subset X_\lambda$ で、$f\in C(X_\lambda)$ に対し $P_\lambda f=\lambda(f)\cdot 1\!\!1_\lambda$（$1_\lambda$ は X_λ 上の値 1 の定数函数）となっている。従って P_λ-不変な函数は定数函数しかないのであるが、測度としての λ と μ_λ の間には次の関係がある。

Proposition 6. λ は μ_λ-絶対連続で、その Radon-Nikodym derivative を v_λ とすると、$v_\lambda\in L_\infty(\mu_\lambda)$ で $P_\lambda' v_\lambda = v_\lambda$.

この命題より $L_1(\mu_\lambda)$ の ideal $I_\lambda=\{f\in L_1(\mu_\lambda)\,;\,f=0 \text{ on } \mathrm{supp}\,v_\lambda\}$ は T_λ, P_λ-不変であることがわかり、商空間 $E_\lambda = L_1(\mu_\lambda)/I_\lambda$ は AL-space で T_λ, P_λ は E_λ 上の operator $\hat{T}_\lambda, \hat{P}_\lambda$ を誘導する。このとき $\tilde{P}_\lambda$ は §1 の最初に述べた意味で irreducible である。もし $P_\lambda = Q_\lambda$ が成り立っていれば、これから $\hat{T}_\lambda$ も irreducible となるのであるが、そうでない場合には $\hat{T}_\lambda, \hat{P}_\lambda$ を E_λ の sublattice に制限したものを考えれば irreducible になる。具体的には最初の空間 $L^1(\mu)$ が separable な場合 $\{f_n\}_{n\in N}$ を $L_1(\mu)$ で dense で lattice operation について閉じた $\mathbb{Q}$-linear space とすると、命題5* より a.e. λ で $P_\lambda f_n|_{X_\lambda} = Q_\lambda f_n|_{X_\lambda}$ となるので $\{f_n|_{X_\lambda}\}_{n\in N}$ の像で作られる E_λ の closed sublattice F_λ をとるとよい。まとめて

Theorem 1. T が I)～IV) をみたす operator のとき、I)～IV) をみたし irreducible な operator の族 $\{\hat{T}_\lambda|_{F_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ を T から構成できる。もし II) における T_N の収束がノルム収束

なら，$\tilde{T}_\lambda$ 自身が irreducible。（さらに T が contraction なら T_λ が irreducible.）

さらに［6］と同様な手法で次の定理を得る。

Theorem 2. T_N が P にノルム収束するとき，Γ を複素平面上の単位円とすると，

$$\sigma(T) \cap \Gamma = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\tilde{T}_\lambda) \right)^{-} \cap \Gamma$$

が成り立つ。

Theorem 3. 定理2と同じ条件下で，$\sigma(T)\cap\Gamma$ は有限集合となり，$\alpha_0 \in \sigma(T)\cap\Gamma$ が $\sigma(T)$ の孤立点ならそれは $R(\alpha, T)$ の一位の極になる。

References

[1] Y. Derriennic and M. Lin : On invariant measures and ergodic theorems for positive operators, J. Func. Analysis 13, 252-267 ('73)

[2] J. Dixmier : Sur certains espaces cosidérés par M.H. Stone, Summa Brasil Math. 2 ('51) 151-182.

[3] S. Miyajima ; A note on reduction of positive operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec IA, 21 ('74) 287-298.

[4] S. Miyajima ; A note on reduction of positive operators II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec IA, 23 ('76) 245-256