

R -space 上の正作用素の分解

お茶の水女大 理 竹尾富貴子

1. 序文

ordered unit をもつ (AM) space 上の正作用素を irreducible operator に分解して、そのスペクトルを調べるのが、これまで、澤島、新納両氏により研究され [6]、その後、宮島氏により、order unit をもたない (AM) space 上 [4, 5]、及び L_1 上の正作用素に対して拡張されている。秋の学会で、Banach lattice ではない R -space の例が存在すること、及び、この R -space 上の正作用素のスペクトル半径の周上におけるスペクトルの性質について述べたが、それにひきつづいて、order unit を持つ R -space 上の正作用素に対しても、irreducible operator に分解できることを述べる [8]。

order unit を持つ R -space の dual space は L -type の Banach lattice であるが、作用素に strongly

ergodic を仮定しても, dual operator は strongly ergodic とは限らないので, Banach lattice 上の dual operator で考えることができない。そこで, R -space 上の operator としての分解を試みた。

2. R -space

定義: closed, proper cone により順序づけられた Banach 空間 E が Riesz separation property をもつとは, 任意の E の元 a, b, c, d に対して, $a, b \leq c, d$ の関係があるとき, $a, b \leq x \leq c, d$ となる x が E の中に存在することである。

E が regular とは次の性質をみたすことである。

- 1) $x, y \in E$, $-x \leq y \leq x \Rightarrow \|y\| \leq \|x\|$
- 2) 任意の E の元 x と, 任意の正数 ε に対して, $y \geq x, -x$ が $\|y\| \leq \|x\| + \varepsilon$ をみたす y が E の中に存在する。

R -space とは Riesz separation property を持つ, regular な順序 Banach 空間のことである。

order unit $\mathbb{1} \in E$ とは, 次の性質をみたすものである。

- 1) $\|\mathbb{1}\| = 1$
- 2) $-\mathbb{1} \leq x \leq \mathbb{1} \Leftrightarrow \|x\| \leq 1$

$S, \varepsilon S, \overline{\varepsilon S}$ を次のように定義する。

$$S = \{\varphi \in E' : \varphi \geq 0, \|\varphi\| = 1\}$$

$\varepsilon S = S$ の extreme point からなる集合

$\overline{\varepsilon S} = \varepsilon S$ の汎弱位相による閉包

E が Banach lattice であると, E は $C(\varepsilon S)$ と Banach lattice として同型であるが, R -space の場合は εS が closed とは限らないが, 次の命題 1 に示すように表現できる. まずその準備として, 次の定義をする. $A(S)$ は S 上の連続アフィン関数の全体, 任意の $s \in S$ に対し, μ_s は resultant s に対する S 上の maximal probability measure を表わし, μ_s は εS の中に台を持つ. $s \in \varepsilon S$ なら μ_s は point measure を表わす.

命題 1 E を order unit を持つ R -space とすると,

E と $A(S)$ と $\{f \in C(\overline{\varepsilon S}) : f(s) = \int f d\mu_s \quad \forall s \in \overline{\varepsilon S}\}$ は R -space として同型である.

証明 [1] の補題 2.5 より natural map $t: E \rightarrow A(S)$ は one-to-one, onto, order isomorphism であることが得られている. 又, E は order unit $\mathbb{1}$ を持つので, $\text{cone } K$ は内点を持つ. よって $f \in E$ かつ $f \notin K$ なら $\varphi(f) < 0$ かつ $\varphi \geq 0$ なる $\varphi \in E'$ が存在するので, t の逆写像も order preserving より, 任意の $f \in E$ に対して $-\alpha \cdot t\mathbb{1} \leq tf \leq \alpha \cdot t\mathbb{1} \Leftrightarrow -\alpha \mathbb{1} \leq f \leq \alpha \mathbb{1}$ の関係が得られ, $\|f\| = \|tf\|$ となり, E と $A(S)$ の R -space

としての同型が得られる。 $A(S)$ と $\{f \in C(\mathcal{E}S) : f(\omega) = \int f d\mu_\omega \quad \forall \omega \in \mathcal{E}S\}$ の同型は [3] の定理 2.4 から得られる。

3. 分解の定理

以下 E, T を次のように定める。

E : order unit をもつ R -space で、その positive cone を K とする。

$T \in \mathcal{L}(E)$: スペクトル半径 1 の sub-Markov かつ strongly ergodic な正作用素とする。strongly ergodic による limit operator を P とする。

命題 2 PE は order unit $P\mathbb{1}$ をもつ R -space である。
 PE の順序は E から導入されたものである。(即ち $Px \geq 0$ in E
 $\Leftrightarrow Px \geq 0$ in PE)

証明 PE が R -space であることは容易に確かめられ、
 $P\mathbb{1}$ が order unit なることも、 E が lattice の場合と同様に
 して確かめられる。(参照 [6] の命題 2)

命題 3 $(PE)'$ は $P'E'$ と Banach lattice として同型である。

証明 E が lattice の場合と同様にしてできる。(参照
 [6] の命題 3)

定義 $\Phi = \{ \varphi \in E' : T'\varphi = \varphi \quad \varphi \geq 0 \quad \varphi(\mathbb{1}) = 1 \}$

$\Lambda = \Phi$ の extreme point からなる集合

定理 1 PE は $\{ f \in C(\bar{\Lambda}) : f(\omega) = \int f d\mu_\omega \quad \forall \omega \in \bar{\Lambda} \}$ と R -space として 同型である。

証明 $\varphi \in \Phi$ なら $T'\varphi = \varphi$ より $P'\varphi = \varphi$.

$\varphi(P\mathbb{1}) = P'\varphi(\mathbb{1}) = \varphi(\mathbb{1})$. 又, $P'E' = (PE)'$ より

$\Phi = \{ \varphi \in (PE)' : \varphi \geq 0, \varphi(P\mathbb{1}) = 1 \}$. PE は R -space

より, 命題 1 から 上記の表現ができる。

Φ の元が Λ に属するかどうかは, E が lattice の場合, lattice homomorphic かどうかで調べられるが, R -space の場合も 定理 1 のように表現できることから lattice homomorphic に対応する次の系が得られる。

系 $\varphi \in \Phi$ が Λ に属するための 必要かつ十分条件は, 任意の $f, g \in PE$ に対し, $h \geq f, g$ かつ $\varphi(h) = \max(\varphi(f), \varphi(g))$ をみたす $h \in PE$ が存在することである。

証明 必要条件は [2] の定理 2.4 より 求められる。

十分条件は, $\varphi \in \Phi$ かつ $\varphi \notin \Lambda$ と仮定すると, ある $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ 及び正数 $\alpha (1 > \alpha > 0)$ が存在して, $\varphi = \alpha \varphi_1 + (1-\alpha) \varphi_2$ をみたす。

PE の元は $A(\Phi)$ の元と考えられ、 $A(\Phi)$ の元は Φ の点を分離するので、ある $f, g \in A(\Phi)$ が存在して、 $f(\varphi_1) > g(\varphi_1) + \varepsilon$,
 $f(\varphi_2) < g(\varphi_2) - \varepsilon$ をみたす。このとき、任意の $r \geq f, g$ に対し
 $r(\varphi) \geq \max(f(\varphi) + \varepsilon(1-\alpha), g(\varphi) + \alpha\varepsilon)$ となる。よって $r \geq f, g$
 かつ $\varphi(r) = \max(\varphi(f), \varphi(g))$ なる $r \in PE$ は存在しない。

定義 Q を E の中の convex set とするとき、 F が G の face であるとは " $x, y \in Q$ かつ $\alpha x + (1-\alpha)y \in F, 0 < \alpha < 1$ なら $x, y \in F$ " をみたすような G の convex subset のことである。
 J が E の ideal とは $J = J^+ - J^+$ かつ $J^+ = J \cap K$ が K の face であるような E の subspace のことである。

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $I_\lambda = \{f \in E : \exists r \in E \rightarrow r \geq f, -f, \lambda(r) = 0\}$ と定義すると、次の命題を得る。

命題4 I_λ は E の T -invariant closed ideal である。

証明 T -invariant は明らか。

\bullet closed を示す。 $f_0 \in \overline{I_\lambda}$ とすると、任意の n に対し、

$\|f_0 - f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ なる $f_n \in I_\lambda$ が存在する。このような $\{f_n\}$ 列に

対して $\|f_n - f_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}}$ このとき、

$-f_n, f_n \leq r_n, r_n \leq r_{n+1} \leq r_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ かつ $\lambda(r_n) = 0$ なる

増加列 $\{r_n\}$ が E の中に選べる。何故なら、 $-f_1, f_1 \leq r_1$ かつ

$\lambda(k_1) = 0$ なる k_1 は選べるので k_n まで選べたとする。そのとき、 $f_{n+1} \in I_\lambda$ より $k_{n+1}' \geq f_{n+1}, -f_{n+1}$ かつ $\lambda(k_{n+1}') = 0$ なる k_{n+1}' は存在する。 $k_{n+1}'' = k_{n+1}' + k_n$ とおくと、 $\lambda(k_{n+1}'') = 0$, $k_{n+1}'' \geq k_n$, $f_{n+1} \leq f_n + \frac{1}{2^{n-1}} \leq k_n + \frac{1}{2^{n-1}}$,
 $-f_{n+1} \leq -f_n + \frac{1}{2^{n-1}} \leq k_n + \frac{1}{2^{n-1}}$ これより $-f_{n+1}, f_{n+1}, k_n \leq k_n + \frac{1}{2^{n-1}}, k_{n+1}''$.

E は Riesz separation property をもつので

$-f_{n+1}, f_{n+1}, k_n \leq k_{n+1} \leq k_n + \frac{1}{2^{n-1}}, k_{n+1}''$ なる $k_{n+1} \in E$ が存在する。

これより $k_n \leq k_{n+1} \leq k_n + \frac{1}{2^{n-1}}$ かつ $0 \leq \lambda(k_{n+1}) \leq \lambda(k_{n+1}'') = 0$

$\|k_n - k_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n-1}}$ (E は完備より) $\{k_n\}$ はある $k_0 \in E$ に収束

し、 $-f_0, f_0 \leq k_0$ かつ $\lambda(k_0) = 0$ となり $f_0 \in I_\lambda$ かつ

I_λ は closed.

I_λ が ideal は $f \in I_\lambda \cap K$ なら $\lambda(f) = 0$. $0 \leq g \leq f$ なら $\lambda(g) = 0$ より $g \in I_\lambda$. 又、 $f \in I_\lambda$ なら $k \geq f, -f$ かつ $\lambda(k) = 0$ なる $k \in E$ が存在することより $f = k - (k - f)$ かつ $k, k - f \in I_\lambda \cap K$ となり I_λ は ideal である。

λ の台に対応するものとして \overline{ES} 及び S の中に、 S_λ, N_λ を次のように定める。

定義 $S_\lambda = \{x \in \overline{ES} \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I_\lambda\}$

$N_\lambda = \{x \in S \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I_\lambda\}$

命題5 N_λ は S の T -invariant face である。

$$I_\lambda = \{f \in E : f = 0 \text{ on } N_\lambda\} = \{f \in E : f = 0 \text{ on } S_\lambda\}$$

$$S_\lambda = N_\lambda \cap \overline{\varepsilon S}, \quad \varepsilon N_\lambda = N_\lambda \cap \varepsilon S \quad (\because \varepsilon N_\lambda \text{ は } N_\lambda \text{ の extreme point からなる集合})$$

証明 [2] の定理 3.1 から得られる。

命題6 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $x \in N_\lambda$ ならば $P'\varepsilon_x = \lambda$ である。($x \in S_\lambda$ でも同様である)

証明 1) $x \in N_\lambda \cap \varepsilon S$ のとき, 任意の $f, g \in PE$ に対し,
 $\max(P'\varepsilon_x(f), P'\varepsilon_x(g)) = \max(\varepsilon_x(f), \varepsilon_x(g))$. f, g を E の元と考えると, x は S の one-point face より, [2] の定理 2.4 から $h \geq f, g$ かつ $\varepsilon_x(h) = \max(\varepsilon_x(f), \varepsilon_x(g))$ なる $h \in E$ が存在する。一方, $\lambda \in \Lambda$ より 定理 1 の系から $h \geq f, g$ かつ $\lambda(h) = \max(\lambda(f), \lambda(g))$ なる $h \in PE$ が存在する。
 E は Riesz separation property をもつから
 $h, h \geq l \geq f, g$ なる $l \in E$ が存在する。 $\lambda(h-l) = 0$ $h \geq l$ より $h = l$ on N_λ . これより $\varepsilon_x(l) = \varepsilon_x(h) = \varepsilon_x(P'h) = P'\varepsilon_x(h)$ かつ $\varepsilon_x(h) \geq \varepsilon_x(l) \geq \max(\varepsilon_x(f), \varepsilon_x(g)) = \varepsilon_x(h)$ より
 $P'\varepsilon_x(h) = \max(P'\varepsilon_x(f), P'\varepsilon_x(g))$ よって 定理 1 の系より
 $P'\varepsilon_x = \mu$ なる μ が Λ の中に存在する。 $\mu \neq \lambda$ とすると,
 定理 1 より, $f \geq 0, \lambda(f) = 0, \mu(f) > 0$ なる $f \in PE$ が存在する。

このとき、 $f(x) = P'\varepsilon_x(f) = P1(x) \cdot \mu(f) > 0$ となり $\lambda(f) = 0$ と矛盾する。よって $\mu = \lambda$ 即ち $P'\varepsilon_x = \lambda$ である。

2) N_λ は汎弱位相で compact, convex より 命題5 から $N_\lambda = \overline{\text{co}(N_\lambda \cap \varepsilon S)}$ である。1)より $x \in \text{co}(N_\lambda \cap \varepsilon S)$ なら $P'\varepsilon_x = \lambda$, 又写像 $\tau: S \rightarrow P'E'$ を $\tau(x) = P'\varepsilon_x$ によって考えると, τ は汎弱位相で連続より, $\overline{\text{co}(N_\lambda \cap \varepsilon S)} = N_\lambda$ 上で, $\tau(x) = \lambda$ となる。即ち $x \in N_\lambda$ ならば $P'\varepsilon_x = \lambda$ である。

命題7 E/I_λ は R -space である

$$\begin{aligned} E/I_\lambda &\simeq \{f_\lambda \in C(S_\lambda) : \exists f \in E \rightarrow f|_{S_\lambda} = f_\lambda\} \\ &\simeq \{g_\lambda \in C(N_\lambda) : \exists g \in E \rightarrow g|_{N_\lambda} = g_\lambda\} \end{aligned}$$

証明 [2]の定理3.4から得られる。

S_λ は T -invariant より Tf の S_λ 上への制限は $f|_{S_\lambda}$ により一意に決められるので $T_\lambda: E/I_\lambda \rightarrow E/I_\lambda$

$$f_\lambda = f|_{S_\lambda} \mapsto (Tf)|_{S_\lambda}$$

なる作用素が定義できる。又 S_λ は P' -invariant でもあるので, P から同様にして E/I_λ 上の作用素 P_λ も定義できる。

このように定義した T_λ に対して次の定理が成り立つ。

定理2 T_λ は E/I_λ 上の正作用素で、スペクトル半径1, 又, Markov, strongly ergodic で その limit operator は P_λ である。 T_λ の1に対する固有空間は 1_{S_λ} を基にもつ一次元空間で, T_λ' の1に対する固有空間も $\lambda 1_{S_\lambda}$ を基にもつ一次元空間である。更に T_λ は irreducible である。

証明 T_λ が limit operator P_λ をもつ strongly ergodic であることは明らかである。次に任意の $x \in S_\lambda$ に対し, $Pf(x) = P'E_x(f) = \lambda 1_{S_\lambda}(f_x)$ より $P_\lambda f_\lambda = \lambda 1_{S_\lambda}(f_\lambda) 1_{S_\lambda}$ が任意の $f \in E$ について成り立つ。これより T_λ はスペクトル半径1の Markov operator で T_λ の1に対する固有空間は 1_{S_λ} を基にもつ一次元空間である。又 $\varphi_\lambda \in (E/I_\lambda)'$ に対し, $P_\lambda' \varphi_\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda(P_\lambda f_\lambda) = \varphi_\lambda(1_{S_\lambda}) \lambda 1_{S_\lambda}(f_\lambda)$ より $f_\lambda \neq 0$ かつ $f_\lambda \geq 0$ なら $\lambda 1_{S_\lambda}(f_\lambda) > 0$ となり, $\varphi_\lambda \geq 0$ なら $P_\lambda' \varphi_\lambda$ は strictly positive で T_λ' の1に対する固有空間は $\lambda 1_{S_\lambda}$ を基にもつ一次元空間である。又 T_λ が irreducible は [7] の定理1から得られる。

参考文献

- [1] E. B. Davies: The structure and ideal theory of the predual of a Banach lattice. Trans. Amer.

- Math. Soc. 131 (1968) 544-555.
- [2] E. G. Effros : Structure in simplexes. Acta Math. 117 (1967) 103-121.
- [3] E. G. Effros : Structure in simplexes II, J. Functional Analysis 1 (1967) 379-391.
- [4] S. Miyajima : A note on reduction of positive operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 21 (1974) 287-298.
- [5] S. Miyajima : A note on reduction of positive operators, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 23 (1976) 245-256.
- [6] I. Sawashima and F. Niire : Reduction of a sub-Markov operator to its irreducible components, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 24 (1973) 35-59.
- [7] F. Takeo : On proper spaces of some positive operators with the property (W), Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 27 (1976) 89-97.
- [8] F. Takeo : Decomposition of a positive operator in a simplex space to its irreducible components, (to appear).