数理解析研究所講究録
第293巻 1977年 3-9

くさび状領域における3次元Moffatt渦

東大 理学部　橋本 英典

§1 はしがき

Moffatt(1964)は2枚の平面壁にかこまれたくさび状の領域において、壁が静止していても、たとえば遠くに攪乱が加えられることに対応して、領域内に2次元の流れが生じ、

(a)　(b)

頂点に向って急減少するが無限に湧く渦模様の生じることを流れからそのときのストークスの方程式にもとづいて示した。すなわち、半頂角をαとするときα<156°ならば、2等分面に対して対称な流れ(a)α<146°ならばさらに、反対称な流れ(b)が可能であるという。[1)] これはストークスの方程式の固有解であって、このような角状あるいはカスプに近い領域にあらわれる一つの特異的な流れである。[2-8)] 本研究会

においても次の金．佐野さらに徳田氏の講演で関連した話が2平面間の円柱，球，さらに3次元境界層のストークス域に[3,4]ついて述べられるはずであるが；ここでは純粋な形で，くさび状領域の3次元流れについてこのような固有解の存在することを示してみたい。

§2

粘性流体のおそい運動を支配するストークスの方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 , \qquad \cdots\cdots (1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad \cdots\cdots (2)$$

の一般解として

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j \phi_j) - 2\phi_i , \qquad \cdots\cdots (3)$$

$$p = 2\mu \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j} \qquad \cdots\cdots (4)$$

をとろう[8]。ただし、x_jは直交座標，ϕ_j ($j = 1, 2, 3$) は調和関数でラプラスの方程式 $\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \partial x_i} = 0$ $\cdots\cdots$ (5)

を満足する。くさびの交線を$x_3 = z$軸に，2等分面($x_1 - x_3$面)を$\theta = 0$とする円柱座標を(ρ, θ, z)とすれば速度成分(v_ρ, v_θ, v_z)は(3)から．

$$v_\rho = \frac{\partial\phi_\rho}{\partial\rho} - 2\phi_\rho + z\frac{\partial\phi_3}{\partial\rho}, \qquad \cdots\cdots (6)$$

$$v_\theta = \frac{\partial\phi_\rho}{\partial\theta} - 2\phi_\theta + \frac{z}{\rho}\frac{\partial\phi_3}{\partial\theta} = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\right)\phi_1 + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\right)\phi_2 + \frac{z}{\rho}\frac{\partial\phi_3}{\partial\theta}, \qquad \cdots\cdots (7)$$

$$v_z = \rho\frac{\partial\phi_\rho}{\partial z} + z\frac{\partial\phi_3}{\partial z} - \phi_3, \qquad \cdots\cdots (8)$$

ただし

$$\phi_\rho = \phi_1\cos\theta + \phi_2\sin\theta, \qquad \cdots\cdots (9)$$

$$\phi_\theta = -\phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta \qquad \cdots\cdots (10)$$

である。

さて渦度のθ成分ω_θは.(3),(6),(8)から

$$\omega_\theta = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V})_\theta = -2(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\phi})_\theta = 2\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial\rho} - \frac{\partial\phi_\rho}{\partial z}\right) \cdots (11)$$

となるが壁面$\theta=\pm\alpha$で $\omega_\theta = 0$, $v_z=0$ を考慮すれば,(11),(8)から境界上で

$$\frac{\partial\phi_\rho}{\partial z} = \frac{\partial\phi_3}{\partial\rho}, \qquad \frac{\partial\phi_\rho}{\partial z} = \frac{\phi_3}{\rho} - \frac{z}{\rho}\frac{\partial\phi_3}{\partial z} \qquad : \theta = \pm\alpha \qquad \cdots (12)$$

を満足しなければならない。これからϕ_ρを消去すれば,

$$\rho\frac{\partial\phi_3}{\partial\rho} + z\frac{\partial\phi_3}{\partial z} = \phi_3 \qquad : \theta = \pm\alpha \qquad \cdots (13)$$

となる。ρ.zが壁上の変数であることに留意し,これを積

分すれば.

$$\phi_3 = r\,g\left(\frac{z}{r}\right) \qquad \cdots\cdots (14)$$

たゞし、gは任意関数である。一般に$g=0$でなければϕはr, zの1次の同次関数でかなり特殊なので，その議論は別の機会に譲るとすれば，$\phi_3=0$となる。(12)から$\theta=\pm\alpha$でϕ_ρはzに無関係で，ρだけの関数となるが，そこではv_ρが0なので(6)を用いれば、$\phi_\rho = A e^{2\rho}$を与える。特別の場合を除けば，$A=0$で境界条件としては$\phi_\rho=0$をとれる。残る境界条件$v_\theta=0$を考慮すれば，(7)，(9)からϕ_jに対し，

$\theta=\pm\alpha$で

$$\begin{cases} \phi_\rho = \phi_1\cos\alpha \pm \phi_2\sin\alpha = 0 & \cdots\cdots (15) \\ \left(\cos\alpha\dfrac{\partial}{\partial\theta} \pm \sin\alpha\right)\phi_1 + \left(\pm\sin\alpha\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \cos\alpha\right)\phi_2 = 0 & \cdots\cdots (16) \\ \phi_3 = 0 & \cdots\cdots (17) \end{cases}$$

を得る。さて，調和関数Φは円柱座標で.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = 0 \qquad \cdots\cdots (18)$$

を満足するので，変数分解によって解を求めれば.

$$\Phi = e^{i(\nu\theta + kz)}\varphi_\nu = e^{i(\nu\theta+kz)}\begin{cases} I_{\pm\nu}(|k|\rho) \\ K_\nu(|k|\rho) \end{cases} \qquad \cdots\cdots (19)$$

の重疊であることがわかる。たゞし、$I_\nu(\xi)$，$K_\nu(\xi)$は変形でベッセル関数であり、

$$\varphi_\nu'' + \frac{1}{\xi}\varphi_\nu' - \left(1 + \frac{\nu^2}{\xi^2}\right)\varphi_\nu = 0 \qquad \cdots\cdots (20)$$

を満足し，

$$K_\nu(\xi) = K_{-\nu}(\xi) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\pi\nu}\left[I_{-\nu}(\xi) - I_\nu(\xi)\right] \cdots\cdots (21)$$

の関係がある。従って(17)を満足するϕ_3の固有解は

$$\phi_3 = \begin{Bmatrix} \varphi_{\nu n} \cos\nu_n\theta \\ \varphi_{\nu m} \sin\nu_m\theta \end{Bmatrix} e^{ikz} \qquad \cdots\cdots (22)$$

で，$\nu_n\alpha = n\pi$，$\nu_m\alpha = (m + \frac{1}{2})\pi$ （n，$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$）によって定まる普通の形を有するが，$\phi_1$，$\phi_2$に対しては，(15)，(16)を連立させる必要がある。i) $\theta = 0$について対称な流れでは，ϕ_1がθについて偶，ϕ_2が奇，ii) 反対称なものではその逆が期待されるので，

i) 対称解　　　　　　ii) 反対称解

$$\begin{cases} \phi_1 = \varphi_\nu \sin\alpha \sin\nu\alpha \cos\nu\theta e^{ikz} \\ \phi_2 = -\varphi_\nu \cos\alpha \cos\nu\alpha \sin\nu\theta e^{ikz} \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi_1 = \varphi_\nu \sin\alpha \cos\nu\alpha \sin\nu\theta e^{ikz} \\ \phi_2 = -\varphi_\nu \cos\alpha \sin\nu\alpha \cos\nu\theta e^{ikz} \end{cases} \cdots\cdots (23)$$

をとれば，(15)は自動的に満足され，(16)も$\theta = \alpha$だけで満足させればよいことになる。(23)を(16)に代入し，$\theta = \alpha$とすれば，$\varphi_\nu \neq 0$のνを決定する固有値方程式

$$\nu \sin 2\alpha = \pm \sin 2\nu\alpha \qquad \cdots\cdots (24)$$

が得られる。これは2次元のMoffattの結果と完全に同型であり，臨界角も全く同一であることを示す。臨界角以下では，

νは複素数であり，定数値になるような解の組合わせが必要なことも同じ事情にある。$\xi \to 0$で

$$I_{\pm\nu}(\xi) \sim \left(\frac{\xi}{2}\right)^{\pm\nu}\left(1+O(\xi^2)\right) \sim \exp\left(\pm\nu\log\frac{\xi}{2}\right) \quad (25)$$

であるので，交代する渦の強さの比も頂角の近くでは全く同一になる。$k \to 0$とすれば2次元の場合が得られる。さらに、異った値について重ね合わせれば，種々の複雑な渦を構成できる。たとえば，$K_{i\nu}(|k|\rho_0)$（ρ_0は定数）の重みに対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} K_{i\nu}(|k|\rho_0) K_{i\nu}(|k|\rho_0)\, dk = \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho z}}\frac{1}{\cosh\pi\nu} P_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho_0^2+\rho^2+z^2}{2\rho_0\rho}\right) \quad (26)$$

ただし、$P_{-\frac{1}{2}+i\nu}$は円錐関数が得られるが、これは$\rho=\rho_0$，$z=0$に特異点を持った流れになっている。このような解が含まれる場合としては，くさび領域における微小物体の運動などが考えられる。[6)]

文献

1) Moffatt, H.K. : J. Fluid Mech. 18 (1964) 1.
2) Schubert, G. : J. Fluid Mech. 27 (1967) 647.
3) Tokuda, N. : J. Fluid Mech. 53 (1972) 129.
4) Tokuda, N. : J. Phys. Soc. Japan 38 (1975)

1187

5) Wakiya, S. : J. Phys. Soc. Japan 39(1975) 1113

6) Sano, O. & Hasimoto, H : J. Phys. Soc. Japan 40(1976) 884.

7) 阿曽義之 : 数理研 講究録 52(1968)71.

8) 金子幸臣 : 数理研 講究録 187(1973)26.

9) 今井功 : 流体力学(前編) 裳華房 (1973) 313.