数理解析研究所講究録
第 294 巻 1977 年 15-61

最小素数定理について(*)

日本大学　本橋洋一

§1. 序

この論説の目的は，Linnikの最小素数定理（及びそのFogels, Gallagherによる拡張）に，新しい篩法の観点に立つ証明をあたえることである。勿論，我々の興味は，その方法にあるのであって，いかにしてそこに達するかをくわしく述べたいと思う。ここに示す証明が最も簡明なものであるとは断言できないが，我々の方法においては，Turánの巾和理論，（Linnik型）零点密度理論，更にはDeuring-Heilbronn現象を全く必要としないのであって，数論的に相当に簡明かつ完備したものであると信じる次第である。

まず問題の歴史を概観してみよう。1944年にLinnikは［L1］［L2］において次のことを証明した。

(*) Y. Motohashi: On primes in arithmetic progressions (to appear in Inventiones Math.) をくわしく書きかえたものである。

定理 1.（Limnikの最小素数定理）

法qについての任意の算術級数にあらわれる最小の素数は$q^{\mathcal{L}}$をこえない。但し$\mathcal{L}$は計算可能な絶対常数である。

この$\mathcal{L}$のことをLimnik常数というのであるが，この結果の注目すべき点は，次のことにある。すなわち，それまでの素数分布論においては，このような結果は，準リーマン予想の全L-函数への拡張というような強烈な仮定なくしては，証明不可能と思われていたのであるが，Limnik は Bohr-Landau-Hoheisel の系列上につらなる考えによって，そのような仮定を廻避できることを発見したのである。その最も基本になるのがLimnik型零点密度定理

$$\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} N(\sigma, T, \chi) \ll (qT)^{c_1(1-\sigma)} \tag{1}$$

である。（但しLimnik は $T \ll q^{\varepsilon}$ の条件下で考えている。）ここにおいて，拡張されたリーマン予想を零点密度理論でおきかえるという，強力な手段が確立され，素数分布論に多くの目覚しい結果をもたらす歴史がはじまるのである。そしてそれは Bombieri の平均素数定理によって一つの頂点に達する訳である。

所で Limnik の証明［L 1］［L 2］であるが，これらは実に困難なものであり，Davenportをして‘恐るべき’と評させた

程である。主たる道具は，整函数の凸性定理及び Brun-Titchmarsh 定理の二つに帰着するのであるが，その応用は複雑で難渋を極める。(筆者自身，いまだに完全に理解した気持になれないままである。) そこで，当然，その簡易化及び深化がもとめられるのであるが，Rodosskii [P; Kap. X] の整理はあったものの，これは全くの Linnik の証明のいいかえであり，簡易化とは程遠いものであった。本当の意味の新しく簡明な証明は，Linnik の後十数年を経て Turán [T1] によってはじめてなしとげられた。Turán の証明は，Linnik の用いた凸性定理を，Turán 自身による'巾和の方法'(Power sum method) でおきかえる点が新しいのである。そしてその中心となるものは次の不等式である。

$$(2) \qquad \max_{M \leqq \nu \leqq M+N} \left| \sum_{j=1}^{N} z_j^{\nu} \right| \geqq \left(\frac{N}{8e(M+N)} \right)^N \quad (\text{但し } z_1 = 1).$$

しかしながら，あえて苦言を呈すれば，(2)の証明はかなり困難なものであり，しかもこれは，一種の暗箱を理論にもち込んだかの観がある。更にもう一つの難点は，(2)の応用は常数 $\mathcal{L}$ の評価にあまり良い効力をもたない点にもある。とは言うものの，それでもなお且つ(2)は定理1の証明をより近づきやすくするものであった。実際 Turán のすぐあとをつけて，Knapowski [K] は，Deuring-Heilbronn 現象の(2)を通しての

証明を得，理論全体を書きかえたのである。そしてなお重要なことは，Turánのideaがその後のより深い発展をもたらす源となったことであろう。そのような発展のうちでも，特にFogels [F] は (1) において，$T \ll q^{\varepsilon}$ の条件をとりさることに成功し，その直接の効果として，次のことを証明した。

定理 2.（Fogelsの素数定理）
計算可能な絶対常数 A が存在して

$$\pi(x+h;q,l)-\pi(x;q,l) \gg \frac{h}{q^2 \log x}$$

が $q^A \leqq x/q \leqq h \leqq x$ において成立する。

これは明らかに定理 1 を深めたものである。Fogelsの証明に於ては，Turánのideaの他に一つの重要な点がある。それは，Dirichlet多項式の平均値の評価についての注目すべき新しい方法であり，これは後にのべる様にGallagherの方法の出発点になったものである。Fogels の [F] が出た 1965年は，解析的整数論において更に収穫多き年であったが，そのうちでもBombieri による Large Sieve のめざましい発展がまず第一にあげられよう。そしてこれは，当然に，定理 2 の large sieve 型への拡張をうながした訳であるが，それには，やや時間がたって，1970年に Gallagher [G] が成功したのである。Gallagherの結果を述べるには，やや準備がいるので，まずそこで用い

られた3つの重要な補題を示しておこう。それらはすでに示されたTuránの(2)と，Bombieri-Davenport([B, Théorème 8])による Brum-Titchmarsh型定理のlarge-sieve型への拡張，及びGallagher自身によるDirichlet級数についての平均値定理である。この第2のものは，

定理 3. (Bombieri-Davenport)
n が Q 以下の素因子をもつとき $a_n = 0$ であれば，

$$\sum_{q \leqq Q} \log\frac{Q}{q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} \Big| \sum_{M}^{M+N} a_n \chi(n) \Big|^2 \leqq (N + Q^2) \sum_{M}^{M+N} |a_n|^2.$$

そして第3のものは，

定理 4. (Gallagherの平均値定理)
$\sum |a_n| < +\infty$ であれば，$T \geqq 1$ に対して，

$$\int_{-T}^{T} \Big| \sum a_n n^{it} \Big|^2 dt \ll T^2 \int_0^{\infty} \Big| \sum_{y}^{ye^{1/T}} a_n \Big|^2 dy/y .$$

定理3は，特別の場合としてBrum-Titchmarsh定理をもたらすのであるが，この結果がlarge sieveの'篩'の効力を研究するはじまりとなった。そして，それはMontgomeryによって本来の意味の'large' sieveへと発展する訳である。又，定理4は，それまで素数分布論の文献にあらわれてきた，雑多

個別的なDirichlet級数の平均値の計算を美しく統一するものである。

さて，本論説の目的とするGallagherの素数定理であるが，それを述べる前に，謂る例外零点あるいは例外指標について，その意味を固定しておく必要がある。これは有名なPage-Landauの定理にあらわれるのであるが，ここでは便宜上，もう一歩すすめて，次のような形にして，導入することにする。

Pracher [P] の第4章定理7.1によれば，(それを少々拡張して) 次のことが知られる。$\chi \pmod{q}$, $(q \leqq Q,\ Q \geqq 2)$, は原始指標として，領域

(3) $$\sigma \geqq 1 - K(\log Q(|t|+1))^{-1}, \quad (1 \geqq K > 0 : \text{絶対常数})^{(*)}$$

において，

(4) $$\frac{L'}{L}(s,\chi) + O(\log Q(|t|+1)) = \begin{cases} 0 & \chi \neq \chi_0, \chi_1 \text{ のとき}, \\ -(s-1)^{-1} & \chi = \chi_0 \text{ のとき}, \\ (s-1+\delta)^{-1} & \chi = \chi_1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

が成立する。但し，$\chi_0 \equiv 1$, すなわち $L(s,\chi_0) = \zeta(s)$. 又，$\chi_1 \pmod{q_1}$ は(存在するとすれば)唯一の実指標で，$L(s,\chi_1)$ は (3) において唯一の(実)根 $1-\delta$ $(\delta > 0)$ をもつ。以下の議論では，

(5) $$\delta \leqq \frac{K}{10}(\log Q)^{-1}$$

(*) $1 \geqq K$ という条件は不要であるが，以下(特に第4節)の議論を容易にするために仮定しておく。

となるとき χ_1 を例外（くわしくは Q-例外）指標，$1-\delta$ を例外（くわしくは Q-例外）零点とよぶことにする。そして，χ_1，q_1，δ は記号として，必らず，この意味で用いることとする。この約束のもとに，Gallagher の素数定理は次のようにのべられる。

定理 5.（Gallagher の素数定理）
例外指標が存在する場合は $\Delta=\delta\log Q$，存在しない場合は $\Delta=1$ と定める。そして，

$$\tilde{\psi}(x,\chi)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n\leqq x}\chi(n)\Lambda(n) & \chi\neq\chi_0,\chi_1 \text{ のとき},\\ \displaystyle\sum_{n\leqq x}\Lambda(n)-x & \chi=\chi_0 \text{ のとき},\\ \displaystyle\sum_{n\leqq x}\chi_1(n)\Lambda(n)+\frac{x^{1-\delta}}{(1-\delta)} & \chi=\chi_1 \text{ のとき},\end{cases}$$

とおく。このとき，計算可能な絶対常数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>0$ が存在して，

$$\sum_{q\leqq Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}|\tilde{\psi}(x+h,\chi)-\tilde{\psi}(x,\chi)|\leqq\alpha_1\Delta h\exp(-\alpha_2(\log x)/\log Q)$$

が条件

$$Q^{\alpha_3}\leqq x/Q\leqq h\leqq x,\quad \exp((\log x)^{1/2})\leqq Q$$

のもとに成立する。

これは勿論，定理1及び2を特別の場合として含んでいる。Gallagher の証明は，Fogels の場合と同じく，零点密度定理に帰着するものであるが，この際は，それは

$$(6) \qquad \sum_{q \leq Q} \ \sum_{\chi \pmod q}^{*} N(\sigma, T, \chi) \ll (QT)^{c_2(1-\sigma)}$$

という形のものになる。このことの証明に，中和理論，定理3及び4が必要とされ，更にそれを定理5にむすびつけるために，Deuring－Heilbronn 現象が援用された訳である。

このようにして，Linnik の最小素数定理は深い発展をしたのであるが，その基本には，つねに密度定理の改良，拡張があった。この点において Turán の方法は礎となっていた訳であるが，上にものべたように，その方法には一つの大きな欠点がある。それは，明確な形でのべれば，(6) における，常数 C_2 の評価に有効に作用しない，すなわち，あまりにも大きな値をもたらしてしまう，ということである。これは Turán の方法そのものに内在するのであって，これを改良するには，Turán の方法にかわるものをみつけなければならない。

しかるに，Selberg [S2] は それ（少くともその端初を）を発見したのである。Selberg の方法は，もとをただせば，遠く [S1] にまでさかのぼれるのであるが，large sieve の概念を得て，全く新しい様相を示してきたのである。そして

彼の方法の中心となるものは，定理3の深化とも言うべき，次の結果である。

定理6.（Selberg）

$$\psi_r(n) = \mu((r,n))\varphi((r,n))$$

とすると，

$$\sum_{\substack{qr \leqq Q \\ (q,r)=1}} \frac{\mu^2(r)q}{\varphi(qr)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)}^{*} \left| \sum_{M}^{M+N} a_n \chi(n) \psi_r(n) \right|^2 \leqq (N + Q^2) \sum_{M}^{M+N} |a_n|^2 .$$

これの証明には，まず r が squar-free であれば

$$\mu(r)\psi_r(n) = c_r(n) = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,r)=1}}^{r} e^{2\pi i \frac{h}{r} n} \quad (\text{Ramamujan和})$$

となることに注意し，$\chi(n)$ を Gauss和によってあらわし，それをまとめれば，通常の加法的 large sieve の形になるということどめておく。（[B，Théorème 7A]をみよ。）定理3の条件を a_n につけくわえれば $a_n\psi_r(n) = a_n$ であり，且つ又，

(7) $$\sum_{\substack{r \leqq x \\ (r,q)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \geqq \frac{\varphi(q)}{q} \log x$$

に注意することにより，定理6が定理3を含むことが知られる。

実は，定理6は，のちにわかるように，Selberg の他のいく

つかの着想をつけくわえれば，例外指標が存在しない場合，Gallagherの素数定理をもたらすのである。そして，しかも，それには，Turánの方法，密度理論をともに必要としないのである。但しSelberg自身は，定理6の応用として，(6)の次のような驚くべき改良を示したのである。

$$(8) \qquad \sum_{q \leqq Q} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)}^{*} N(\alpha, T, \chi) \ll_{\varepsilon} (Q^{5+\varepsilon} T^{3+\varepsilon})^{1-\sigma}.$$

従って，少くとも，Linnik常数 $\mathcal{L}$ の評価に大きな進展が予想されるのであるが，ただそのためには，Deuring-Heilbronn現象にかかわる常数を改良しなくてはならない。そして，更に，そのためには，Turánの方法を用いない，Deuring-Heilbronn現象の証明がもとめられる訳である。このことは筆者によってごく最近にいたって解決されたのであるが，その出発点は，やはり定理6にある。それを以下に説明しよう。

まず，$\psi_r(n)$ がどうして出てくるのかをよく考えてみる必要があろう。$\psi_r(n)$ の導入は定理6に（linear）sieve としての効力をあたえるのであったが，一方，linear sieve は，最も簡単に考えて，Selbergの篩法

$$(9) \qquad \sum_{n \leqq N} \Big(\sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqq R}} \theta_d \Big)^2 \qquad (\theta_1 = 1)$$

によって処理される。この θ_d の最適な値は，よく知られ

ているように（はじめて得られたのは［S1］!）

(10) $$\theta_d = \Big\{\sum_{r\le R}\varphi(r)^{-1}\mu^2(r)\Big\}^{-1}\Big\{\sum_{\substack{r\le R/d\\(r,d)=1}}\varphi(r)^{-1}\mu^2(r)\Big\}\mu(d)d/\varphi(d).$$

所が，このことから容易に，次の等式がみちびかれる。

(11) $$\Big\{\sum_{\substack{d\mid n\\d\le R}}\theta_d\Big\}\Big(\sum_{r\le R}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\Big)=\sum_{r\le R}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\psi_r(n).$$

すなわち，$\psi_r(n)$ の根処は Selberg の篩にある訳である。さて，Deuring - Heilbronn 現象の証明にあたっては，'伝統的に' Linnik の着想により

(12) $$\begin{aligned}F(s,\chi) &= L(s,\chi)L(s+\delta,\chi\chi_1)\\ &= \sum \chi(n)B(n)n^{-s}, \qquad (\sigma>1)\end{aligned}$$

但し

(13) $$B(n)=\sum_{d\mid n}\chi_1(d)d^{-\delta},$$

を考える必要がある。一方（10）の θ_d は，

$$\sum \theta_d\chi(d)d^{-s}$$

が $L(s,\chi)$ の molifier となっているという関係をもっており，これが結果として $L(s,\chi)$ の零点の評価にむすびつく。（［S1］ではこうして

$$\int_{1/2}^{1} N(\sigma,T)\,d\sigma \ll T$$

が示されたのであった。）

従って，いま我々が考察すべきは，$F(s,\chi)$ の有効な molifier の発見であると想像されよう。そして，上記の事情から，これは恐らく，篩

(14) $$\sum_{n\le N} B(n)\Big(\sum_{\substack{d|n\\ d\le R}}\Theta_d\Big)^2 \qquad (\Theta_1=1)$$

をしらべて，(11) に相当することをみつければよいのではなかろうか。

さて，(14) は

(15) $$\sum_{d_1,d_2\le R}\Theta_{d_1}\Theta_{d_2}\sum_{n\le N/[d_1,d_2]} B([d_1,d_2]n)$$

で，ここに d_1, d_2 は square-free と考えてよいから，

$$\sum_{n\le x} B(dn) \qquad (d:\ \text{square-free})$$

を計算しよう。容易にわかるように，$\sigma>1$ で，

$$\sum B(dn)n^{-s} = F(s,\chi_0)\prod_{p|d}\Big(1+\frac{\chi_1(p)}{p^\delta}-\frac{\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\Big).$$

よって Perron の反転公式により

(16) $$\sum_{n\le x} B(dn) = x\,L(1+\delta,\chi_1)\prod_{p|d}\Big(1+\frac{\chi_1(p)}{p^\delta}-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\Big) + O\big((x^{1/2}q_1^{1/4})^{1+\varepsilon}d^{\varepsilon}\big).$$

但し，ここで

(17) $$L(s,\chi) \ll (q(|t|+1))^{\frac{1}{2}(1-\sigma)+\varepsilon}$$

$$(\chi \pmod q), \quad 0 \leqq \sigma \leqq 1, \quad |s-1| \geqq 1/2)$$

を用いた。(15) はこれにより，($\Theta_d \ll 1$ としてもかまわないから)，

$$\sum_{n \leqq N} B(n) \Big(\sum_{\substack{d|n \\ d \leqq R}} \Theta_d \Big)^2$$

(18) $$= N L(1+\delta, \chi_1) \sum_{d_1, d_2 \leqq R} \frac{\Theta_{d_1} \Theta_{d_2}}{[d_1, d_2]} \prod_{p|d_1 d_2} \Big(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\Big)$$

$$+ O\big((N^{1/2} q_1^{1/4} R)^{1+\varepsilon} \big)$$

となる。すなわち，Selberg の篩法により，Θ_d の最適値は，

(19) $$\Theta_d = \Big\{ \sum_{r \leqq R} \mu^2(r) g(r) \Big\}^{-1} \Big\{ \sum_{\substack{r \leqq R/d \\ (r,d)=1}} \mu^2(r) g(r) \Big\} \mu(d) / K(d)$$

但し

(20) $$g(r) = \prod_{p|r} \frac{\Big(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\Big)}{(p-1)\Big(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\Big)}, \qquad K(d) = \prod_{p|d} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\Big).$$

これから容易に，

(21) $$\Big(\sum_{\substack{d|n \\ d \leqq R}} \Theta_d \Big) G(R) = \sum_{r \leqq R} \mu^2(r) g(r) \Psi_r(n)$$

但し $$\Psi_r(n) = \mu((r,n))\, g((r,n))^{-1}$$

(22) $$G(R) = \sum_{r \leqq R} \mu^2(r) g(r)$$

を得る。そしてまた，基本的な操作により，

$$(23)\qquad \sum_{\substack{(r,q)=1\\ r\leqq R}} \mu^2(r)g(r) \geqq G(R)K(q)$$

も得られる。

さて，これを全体としてながめれば，

$$\varphi(r) \longleftrightarrow g(r)^{-1}, \qquad q/\varphi(q) \longleftrightarrow K(q)^{-1}, \quad \psi_r(n) \longleftrightarrow \Psi_r(n)$$

という対応があることに気ずく。よって定理6から類推して，

$$\sum_{\substack{qr\leqq Q\\ (q,r)=1}} \frac{\mu^2(r)g(r)}{K(q)} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \left| \sum_{M}^{M+N} a_n \chi(n) \Psi_r(n) \right|^2$$

を考察すればよいのではないであろうか。しかしながら，事情はもう少し複雑なのであって，実際は次のような結果がもたらされるのである。

<u>定理7.</u> (Motohashi)
$B(n)$, $g(r)$, $K(q)$, $\Psi_r(n)$ は上記の通りとして，条件 $N \ll M$, $q_r \leqq Q$ のもとに

$$\sum_{\substack{q\leqq Q\\ r\leqq R\\ (q,r)=1}} \frac{\mu^2(r)g(r)}{K(q)} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \left| \sum_{M}^{M+N} a_n \chi(n) B(n)^{1/2} \Psi_r(n) \right|^2$$

$$\leqq \left(N L(1+\delta,\chi_1) + O\left((QR)^{2+\varepsilon} M^{1/2+\varepsilon}\right)\right) \sum_{M}^{M+N} |a_n|^2.$$

これの証明は次節で示される。そしてこの結果はまさに我々

の当初の目的にかなうものであり，Deuring-Heilbronn 現象の新しい証明をあたえるのである。しかしながら，それよりもなお一層重要な帰結は，この結果が，Gallagher の素数定理の，より困難な場合，すなわち，例外指標が存在する場合に，その全くしい立脚点にたつ証明をあたえることにある。それはこの長い序文の最初でのべたように，Turán の巾和理論，零点密度理論，Deuring-Heilbronn 現象を全く必要としないものであり，なお且つ（くわしくは示さないが）そこに含まれる常数の評価に当っても，在来の方法よりもよりよい結果をもたらすのである。

以下，定理7の証明，それの応用としての定理3の証明に入るが，出てくる常数は全て計算可能である。

§2. 定理7の証明.

定理の式の左辺は a_n についてのエルミート形式であり，右辺はその最大固有値を評価しているものとみなせる故，一般論により，共役な形式

$$J=\sum_{M}^{M+N}B(n)\left|\sum_{\substack{q\leqq Q\\ r\leqq R\\ (q,r)=1}}\left\{\frac{\mu^2(r)g(r)}{K(q)}\right\}^{1/2}\Psi_r(n)\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}^{*}\chi(n)b(r,\chi)\right|^2.$$

を考察してもよい。但し $b(r,\chi)$ は任意の複素数である。展開して，

$$J = \sum_{\substack{q,\, q' \leqq Q \\ r,\, r' \leqq R \\ (q,r)=(q',r')=1}} \left\{ \frac{\mu^2(r) g(r) \mu^2(r') g(r')}{K(q) K(q')} \right\}^{1/2} \times \tag{24}$$

$$\times \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q) \\ \chi' \,(\mathrm{mod}\, q')}}^{*} \left\{ S_{r,r'}(M+N; \chi\bar{\chi}') - S_{r,r'}(M; \chi\bar{\chi}') \right\} b(r,\chi) \overline{b(r',\chi')}$$

ここに

$$S_{r,r'}(y;\chi) = \sum_{n \leqq y} B(n)\, \chi\Psi_r\Psi_{r'}(n)$$

$$\left(\chi\Psi_r\Psi_{r'}(n) = \chi(n)\Psi_r(n)\Psi_{r'}(n) \right).$$

そこで $S_{r,r'}(y;\chi)$ を評価するために，

$$\sum_{n} B(n)\, \chi\Psi_r\Psi_{r'}(n)\, n^{-s} \qquad (\sigma > 1)$$

を考える。 r, r' が square-free であることに注意して，これは，

$$\prod_{p} \left\{ 1 + \Psi_r\Psi_{r'}(p) \sum_{m=1}^{\infty} \chi(p^m) B(p^m) p^{-ms} \right\}$$

$$= F(s,\chi) \prod_{p} \left((1 - \Psi_r\Psi_{r'}(p)) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) + \Psi_r\Psi_{r'}(p) \right)$$

$$= F(s,\chi) \prod_{\substack{p \mid r \\ p \nmid r' \\ \text{or} \\ p \nmid r \\ p \mid r'}} \left(\left(1 + \frac{1}{g(p)}\right) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) - \frac{1}{g(p)} \right) \times \tag{25}$$

$$\times \prod_{p \mid (r,r')} \left(\left(1 + \frac{1}{g(p)^2}\right) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) + \frac{1}{g(p)^2} \right)$$

$$= (g(r) g(r'))^{-1} F(s,\chi) \prod_{p \mid \frac{[r,r']}{(r,r')}} \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) - 1 \right) \times$$

$$\times \prod_{p \mid (r,r')} \left((g(p)^2 + 1) \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right) + 1 \right)$$

$$= (g(r)g(r'))^{-1} F(s, \chi) A_{r,r'}(s, \chi)$$

とおく。

反転公式により、

$$g(r)g(r')S_{r,r'}(y;\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s,\chi)A_{r,r'}(s,\chi)\frac{y^s}{s}\,ds + O((QR)^{-5})$$

但し $\sigma_0 = 1 + (\log QTRy)^{-1}$, $T \gg (QRy)^c$ (c: 充分大),

そして y は奇数の2分の1。

$F(s,\chi)$ は χ が主指標 (mod q) のとき $s=1$ において留数

$L(1+\delta, \chi_1)K(q)$ をもち、しかもこの場合 $(rr', q) = 1$ であれば、$A_{r,r'}(1,\chi) = g(r)$ $(r = r')$ $A_{r,r'}(1,\chi) = 0$ $(r \neq r')$ である。従って $\delta_{r,r'}$ は kronecker のデルタとして、χ, χ' が原始指標であれば、(24) において、

$$S_{r,r'}(y;\chi\bar{\chi}') = y\,K(q)g(r)^{-1}L(1+\delta,\chi_1)\delta_{r,r'}\delta_{\chi,\chi'}$$

(26) $$+ O\left\{\frac{y^{1/2}}{g(r)g(r')}\int_{-T}^{T}\left|F(\tfrac{1}{2}+it,\chi\bar{\chi}')A_{r,r'}(\tfrac{1}{2}+it,\chi\bar{\chi}')\right|\frac{dt}{|t|+1}\right\}$$

$$+ O((QR)^{-5}).$$

但しここで (17) を用いた。一方

$$|A_{r,r'}(\tfrac{1}{2}+it,\chi\bar{\chi}')|$$

$$\leq \prod_{p \mid \frac{[r,r']}{(r,r')}}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{p^{m/2}}\right\}\prod_{p\mid(r,r')}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{p^{m/2}}\right\}$$

$$\ll (rr')^{\varepsilon}[r,r']^{-1/2}$$

であるから，(26) を (24) に入れて，

$$J = L(1+\delta,\chi_1)N \sum_{\substack{r \leq R\\ q \leq Q\\ (q,r)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} |b(r,\chi)|^2$$

$$+ O\left\{ (RQ)^{\varepsilon} M^{1/2} \sum_{\substack{q,q' \leq Q\\ r,r' \leq R\\ (q,r)=(q',r')=1}} \left(g(r)g(r')[r,r']\right)^{-1/2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi' (\mathrm{mod}\, q')}} |b(r',\chi')|^2 \int_{-T}^{T} |F(\tfrac{1}{2}+it, \chi\bar{\chi}')| \frac{dt}{|t|+1} \right\}$$

$$+ O\left\{ (QR)^{-5+\varepsilon} \sum_{\substack{q,q' \leq Q\\ r,r' \leq R\\ (q,r)=(q',r')=1}} \left(g(r)g(r')\right)^{-1/2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi' (\mathrm{mod}\, q')}} |b(r,\chi)|^2 \right\}$$

(27)

$$= L(1+\delta,\chi_1)N \sum_{\substack{q \leq Q\\ r \leq R\\ (q,r)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} |b(r,\chi)|^2$$

$$+ O\left((RQ)^{2} M^{1/2} \sum_{\substack{q' \leq Q\\ r' \leq R\\ (q',r')=1}} \frac{1}{\sqrt{g(r')r'}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q')} |b(r',\chi')|^2 \, I_1 \right)$$

$$+ O\left((RQ)^{-5+\varepsilon} \sum_{\substack{q \leq Q\\ r \leq R\\ (q,r)=1}} \frac{1}{\sqrt{g(r)}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} |b(r,\chi)|^2 \, I_2 \right).$$

但しここに

$$I_1 = \left\{ \sum_{r \leq R} \frac{(r,r')^{1/2}}{\sqrt{g(r)r}} \right\} \left\{ \sum_{q \leq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} \int_{-T}^{T} |F(\tfrac{1}{2}+it, \chi\bar{\chi}')| \frac{dt}{|t|+1} \right\},$$

$$I_2 = \left\{ \sum_{r' \leq R} \frac{1}{\sqrt{g(r')}} \right\} \left\{ \sum_{q \leq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} 1 \right\}.$$

さて所で，

$$g(r)=\prod_{p|r}\frac{1+\frac{\chi_1(p)}{p^\delta}-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}}{(p-1)(1-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}})}=\prod_{p|r}\left((1-\tfrac{1}{p})^{-1}(1-\tfrac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}})^{-1}-1\right)$$

(28)
$$\geq\prod_{p|r}\left((1-\tfrac{1}{p})^{-1}(1+\tfrac{1}{p^{1+\delta}})^{-1}-1\right)\geq\prod_{p|r}\left((1-\tfrac{1}{p^{1+\delta}})^{-1}(1+\tfrac{1}{p^{1+\delta}})^{-1}-1\right)$$

$$\geq\prod_{p|r}\frac{1}{p^{2(1+\delta)}}=r^{-(2+\delta)}\qquad(\because\ r:\ \text{square-free})$$

であるから，$\delta\leqq\kappa(\log Q)^{-1}<\varepsilon$ （Q：充分大）に注意して，

$$\sum_{r\leqq R}\frac{(r,r')^{1/2}}{\sqrt{g(r)r}}\ll R^\varepsilon\sum_{r\leqq R}(r(r',r))^{1/2}$$

$$\ll R^\varepsilon R^{\frac{3}{2}}r'^{\varepsilon}\ll R^{\frac{3}{2}+\varepsilon},$$

$$\sum_{r'\leqq R}\frac{1}{\sqrt{g(r')}}\ll R^{2+\varepsilon}.$$

従って，(27) から，

$$J=\left(L(1+\delta,\chi_1)N+O((QR)^{-2+\varepsilon})\right)\sum_{\substack{q\leqq Q\\ r\leqq R\\ (q,r)=1}}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}|b(r,\chi)|^2$$

(29)
$$+O\Bigl(Q^\varepsilon R^{2+\varepsilon}M^{1/2}\sum_{\substack{q'\leqq Q\\ r'\leqq R\\ (q',r')=1}}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi'(\mathrm{mod}\,q')}|b(r',\chi')|^2\ I_3\Bigr).$$

ここに

$$I_3=\sum_{q\leqq Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}\int_{-T}^{T}|F(\tfrac{1}{2}+it,\chi\bar{\chi}')|^2\frac{dt}{|t|+1}.$$

よって残るのは、I_3の評価であるが、これにはRamachandra [B, p.80-82] の方法を用いるのが一番早い。まず

$$I_3 \leqq \left\{ I(\tfrac{1}{2}, \chi')\, I(\tfrac{1}{2}+\delta, \chi'\chi_1) \right\}^{1/2}$$

(30)
$$I(\sigma, \chi) = \sum_{q \leqq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\bmod q)} \int_{-T}^{T} | L(\sigma+it, \chi\xi) |^2 \frac{dt}{|t|+1} .$$

であるから、以下 $I(\sigma, \xi)$, $\xi (\bmod f)$ を考えることにする。勿論ξは原始指標とはかぎらない。そしてて、凸性定理により $I(\frac{1}{2}, \xi)$ を考えれば充分である。

さて

(31) $\chi\xi$ をみちびく原始指標を $\chi^* (\bmod q^*)$ とする。

このとき明らかに、

$$I(\tfrac{1}{2}, \xi) \ll (Qf)^{\varepsilon} \sum_{q \leqq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\bmod q)} \int_{-T}^{T} | L(\tfrac{1}{2}+it, \chi^*) |^2 \frac{dt}{|t|+1} .$$

そして更に、指標の理論により

(32) $(m, f) = 1$ であれば $\chi^*(n) = \chi\xi(n)$

である。これは、χが原始指標であるから言えるのである。
以下これらのことを注意して、

$$\tilde{I}(\tfrac{1}{2}, \xi) = \sum_{q \leqq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\bmod q)} \int_{-T}^{T} | L(\tfrac{1}{2}+it, \chi^*) |^2 \, dt$$

を評価することにしよう。

$L(s,\chi^*)$ の函数等式を

$$L(s,\chi^*) = \psi(s,\chi^*)\,L(1-s,\overline{\chi}^*)$$

(33)

$$\left(\psi(s,\chi^*) = \varepsilon_{\chi^*}\left(\frac{\pi}{q^*}\right)^{-\frac{1}{2}+s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+a_{\chi^*})\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a_{\chi^*})\right)} \right)$$

とかくことにする。そして

$$Z = (TQf)^{1/2}, \quad s = \tfrac{1}{2}+it, \quad |t| \leqq T$$

とする。Mellinの積分公式を用いて，

$$L(s,\chi^*) = \sum_n \chi^*(n)\,n^{-s}\,e^{-n/Z}$$

$$- E(\chi^*)Z^{1-s}\Gamma(1-s) - \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} L(s+w,\chi^*)\Gamma(w)Z^w\,dw$$

但し $-1 < c < -1/2$ である。この積分を分割して，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} L(s+w,\chi^*)\Gamma(w)Z^w\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c_1)} \psi(s+w,\chi^*)\left(\sum \overline{\chi}^*(n)\,n^{s+w-1}\right)\Gamma(w)Z^w\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c_1)} \psi(s+w,\chi^*)\left(\sum_{n>Z} \overline{\chi}^*(n)\,n^{s+w-1}\right)\Gamma(w)Z^w\,dw$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{(c_2)} \psi(s+w,\chi^*)\left(\sum_{n\leqq Z} \overline{\chi}^*(n)\,n^{s+w-1}\right)\Gamma(w)Z^w\,dw.$$

但しここでは $c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\log Z}$， $c_2^* = -\frac{1}{\log Z}$ とおく。

ここで, $c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\log Z}$ $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, w = c_1 \\ \mathrm{Im}\, w = v \end{pmatrix}$ では (33) より

$$\psi(s+w, \chi^*) Z^w \ll Z^{-\frac{1}{2}} q^{*\frac{1}{2}} \frac{(|t+v|+1)^{\frac{1}{2}a_{\chi^*}}}{(|t+v|+1)^{\frac{1}{2}(a_{\chi^*}-1)}}$$

$$\ll (Tq^*)^{\frac{1}{2}} Z^{-\frac{1}{2}} + |v|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^*}{Z}\right)^{1/2} \quad (\because |t| \leqq T)$$

$$\ll (TQf)^{1/2} Z^{-\frac{1}{2}} + |v|^{1/2} \left(\frac{Qf}{Z}\right)^{1/2} \quad (\because q^* \leqq Qf)$$

$$\ll (TQf)^{1/4} (1 + |v|^{1/2}).$$

同じようにして

$c_2 = -\frac{1}{\log Z}$ $(\mathrm{Re}\, w = c_2)$ では

$$\psi(s+w, \chi^*) Z^w \ll (\log Z) \cdot (|t+v|+1)^{1/\log Z}$$

$$\ll (\log Z)(1 + |v|^{1/2}) \quad (\because |t| \leqq T).$$

よって

$$|L(s,\chi^*)| \ll \left|\sum \chi^*(n) n^{-s} e^{-n/Z}\right| + E(\chi^*) e^{-|t|} (QfT)^{1/4}$$

$$+ (TQf)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n \geq Z} \frac{\chi^*(n)}{n^{1+\frac{1}{\log Z}+i(t+v)}} \right| e^{-|v|} (|v|^{1/2}+1)\, dv$$

$$+ \log Z \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n \leqq Z} \frac{\chi^*(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log Z}+i(t+v)}} \right| e^{-|v|} (|v|^{1/2}+1)\, dv.$$

すなわち,

$$\tilde{I}\left(\tfrac{1}{2}, \xi\right) \ll I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)}$$

$$I^{(1)} = \sum_{q \leqq Q} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \int_{-T}^{T} \Big| \sum \chi^{*}(n) n^{-s} e^{-n/Z} \Big|^{2} dt,$$

$$I^{(2)} = (QfT)^{1/2} \int_{-T}^{T} e^{-|t|}\, dt,$$

$$I^{(3)} = (QfT)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (|v|+1) e^{-|v|}\, dv \sum_{q \leqq Q} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{n > Z} \frac{\chi^{*}(n)}{n^{1+(\log Z)^{-1}+i(t+v)}} \Big|^{2} dt,$$

$$I^{(4)} = (\log Z)^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (|v|+1) e^{-|v|}\, dv \sum_{q \leqq Q} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{n \leqq Z} \frac{\chi^{*}(n)}{n^{\frac{1}{2}+(\log Z)^{-1}+i(t+v)}} \Big|^{2} dt.$$

$I^{(1)}$ を評価しよう。まず，

$$\sum \chi^{*}(n) n^{-s} e^{-n/Z} = \sum_{d | f^{\infty}} \sum_{(n, f^{\infty}) = d} \chi^{*}(n) n^{-s} e^{-n/Z}$$

$$= \sum_{d | f^{\infty}} \frac{\chi^{*}(d)}{d^{s}} \sum_{(n, f) = 1} \chi^{*}(n) n^{-s} e^{-nd/Z}$$

但し $d|f^{\infty}$ は d の素因子が全て f を割ること，$(n, f^{\infty}) = d$ も同じように意味をとる。しかるに (32) によれば，これは

$$\sum \chi^{*}(n) n^{-s} e^{-n/Z} = \sum_{d | f^{\infty}} \frac{\chi^{*}(d)}{d^{s}} \sum \chi_{\xi}(n) n^{-s} e^{-nd/Z}$$

を意味する。よって

$$I^{(1)} \ll \Big\{ \sum_{d | f^{\infty}} \frac{1}{\sqrt{d}} \Big\} \Big\{ \sum_{d | f^{\infty}} \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{q \leqq Q} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \int_{-T}^{T} \Big| \sum \chi_{\xi}(n) n^{-\frac{1}{2}-it} e^{-nd/Z} \Big|^{2} dt \Big\}$$

$$\ll \prod_{p|f}\left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1} \sum_{d|f^\infty} \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n} \frac{n+Q^2T}{n^{1+(\log Z)^{-1}}} e^{-nd/Z} \qquad (*)$$

$$\ll \prod_{p|f}\left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1} \sum_{d|f^\infty} \frac{1}{\sqrt{d}} \left\{\frac{Z}{d}+Q^2T\right\} \log Z$$

$$\ll f^{\varepsilon}\left(\left(Q^2Tf\right)^{1/2}+Q^2T\right)\log(QTf)$$

全く同様の評価が，同じようにして，$I^{(3)}$, $(I^{(4)}$ についても証明される。これらをまとめて

$$\tilde{I}\left(\tfrac{1}{2},\xi\right) \ll \left(Q^2T+(QTf)^{1/2}\right)f^{\varepsilon}(\log QT)^2$$

(30) にもどって，部分積分により

$$I_3 \ll \left\{Q^2+(Qq')^{\frac{1}{2}}\right\}^{1/2}\left\{Q^2+(Qq_1q')^{1/2}\right\}^{1/2+\varepsilon}(\log T)^3$$

$$\ll Q^{2+\varepsilon}(\log T)^3.$$

これを (29) に入れて，$\log T \ll \log(QRM)$ にとれば

$$J=\left\{N\,L(1+\delta,\chi_1)+O\left((QR)^{2+\varepsilon}M^{1/2+\varepsilon}\right)\right\}\sum_{\substack{q\leqq Q\\ r\leqq R\\ (q,r)=1}}\ \sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}^{*}|b(r,\chi)|^2$$

を得る。これは定理 7 の共役な結果であり，これで証明を終る。

(*) ここでよく知られた Gallagher の結果を用いた。

§3. 補題

これから，定理7にいくつかの補題をつけくわえて，Gallagher の素数定理の証明を行う訳であるが，まずはじめに，定理4と7から，容易に，

補題 1.（Motohashi）
$B(n)$, $g(r)$, $K(q)$, $\Psi_r(n)$ は上記の通りとして，任意の $T \geqq 1$ 及び $\sum |a(n)| n^{\varepsilon} < +\infty$ に対して，

$$\sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=1}} \frac{\mu^2(r) g(r)}{K(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \int_{-T}^{T} \left| \sum a_n \chi(n) B(n) \Psi_r(n) n^{it} \right|^2 dt$$

$$\ll \sum \left(L(1+\delta, \chi_1) n + T (QR)^{2+\varepsilon} n^{1/2+\varepsilon} \right) |a_n|^2 B(n).$$

定理6を応用する際に Selberg は更に2つの重要な着想を得ているが，そのはじめのものは，

補題 2.（Selberg）
$\eta_d = O(|\mu(d)|)$ ，r : square-free であれば，$\sigma > 1$ のとき，

$$\sum \chi(n) \psi_r(n) \left(\sum_{d|n} \eta_d \right) n^{-s} = L(s, \chi) M_r(s, \chi; \eta)$$

$$M_r(s, \chi; \eta) = \sum_d \chi(d) \Psi_r(d) \eta_d \prod_{\substack{p \nmid d \\ p | r}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s-1}} \right).$$

これの我々の場合の類似物は，

補題 3.（Motohashi）

η_d，r は 上記と同じとして，$\sigma > 1$ のとき，

$$\sum \chi(n) B(n) \Psi_r(n) \Big(\sum_{d|n} \eta_d \Big) n^{-s}$$

$$= F(s, \chi) \widetilde{M}_r(s, \chi ; \eta)$$

$$\widetilde{M}_r(s, \chi ; \eta) = g(r)^{-1} \sum_d \chi(d) \eta_d \mu((r,d)) d^{-s} \prod_{p|d} \Big(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^\delta} - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\Big) \times$$

$$\times \prod_{\substack{p \nmid d \\ p | r}} \Big(\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)\Big(1 - \frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\Big) - 1 \Big).$$

これを証明するには，まず r : square-free のとき

$$\Psi_r(dm) = \Psi_r(d) \Psi_u(m), \quad u = \frac{r}{(r, d)}$$

に注意する。すると，

$$\sum \chi(n) B(n) \Psi_r(n) \Big(\sum_{d|n} \eta_d \Big) n^{-s}$$

$$= \sum_d \chi(d) \eta_d d^{-s} \sum_m \chi(m) B(dm) \Psi_r(dm) m^{-s}$$

$$= \sum_d \chi(d) \eta_d d^{-s} \Psi_r(d) \sum_m \chi(m) B(dm) \Psi_u(m) m^{-s}.$$

しかるに，d は square-free としてよいから，

$$\sum_m \chi(m) B(dm) \Psi_u(m) m^{-s} =$$

$$\prod_{p\nmid d}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\chi(p^m)}{p^{ms}}B(p^m)\Psi_u(p^m)\right\}\prod_{p\mid d}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\chi(p^m)}{p^{ms}}B(p^{m+1})\Psi_u(p^m)\right\}$$

$p\nmid u$ が $p\mid d$ からみちびかれるから,

$$\prod_{p\mid d}=\prod_{p\mid d}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\chi(p^m)}{p^{ms}}B(p^{m+1})\right)$$

$$=\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\chi_1(p)}{p^{\delta}}-\frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right)\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^{s}}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right)^{-1}.$$

一方

$$\prod_{p\nmid d}=\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\nmid u}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\nmid d\\ p\mid u}}\left\{1+\Psi_u(p)\left(\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right)^{-1}-1\right)\right\}.$$

すなわち,

$$\sum_{n}\chi(n)B(dn)\Psi_u(n)n^{-s}$$

$$=F(s,\chi)\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\chi_1(p)}{p^{\delta}}-\frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right)\prod_{p\mid u}\left((1-\Psi_u(p))\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right)+\Psi_u(p)\right)$$

$$=\frac{F(s,\chi)}{g(u)}\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\chi_1(p)}{p^{\delta}}-\frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right)\prod_{p\mid u}\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi\chi_1(p)}{p^{s+\delta}}\right)-1\right).$$

そして, $\Psi_{r}(d)/g(u)=\mu((r,d))/g(r)$ に注意して補題3の証明を終る。

さて Selberg のもう一つの着想は, すでに [S1] に出ているのであるが, 次のものである。

補題 4 (Selberg)

$\vartheta > 0$, $z > 1$ として

$$\lambda_d = (\vartheta \log z)^{-1} \{ \lambda_d^{(1)} - \lambda_d^{(0)} \}$$

$$\lambda_d^{(j)} = \begin{cases} \mu(d) \log \dfrac{z^{1+j\vartheta}}{d} & d \leqq z^{1+j\vartheta} \\ 0 & d > z^{1+j\vartheta} \end{cases}$$

とおく。このとき

$$\lambda_d = \mu(d), \quad d \leqq z$$

且つ

$$\sum \Big(\sum_{d|n} \lambda_d \Big)^2 n^{-\omega} = O_\vartheta(1)$$

が条件

$$\omega > 1, \quad 1 \ll (\omega - 1) \log z$$

のもとに成立する。

我々の目的には，この結果は弱くてつかえない。そこで，これをつよめたいのであるが，そのために，次のような観察をする。(10)にまでもどって，そこにおける Θ_d は $R \to \infty$ のとき

(34) $$(\log R)\, \Theta_d \sim \mu(d) \log \frac{R}{d}$$

となる。従って上記の重み $\lambda_d^{(j)}$ は (9) となんらかの関係があると見てよかろう。一方又 (34) の右辺は

$$M(R) = \sum_{d<R} \mu(d)$$

の第1 Riesz 平均 $M_1(R)$ にあらわれる。

$$M_1(R) = \int_1^R M(y)\,dy/y.$$

そして更に，λ_d は '第1近似' ともいうべき

$$\{ M_1(R^{1+\vartheta}) - M_1(R) \} (\log R^{1+\vartheta} - \log R)^{-1}$$

にあらわれる。さて，我々が目的とするのは，$B(n)$ を含むものであり，上記の事情からみて，(14) を再び観察する必要があろう。しかも $B(n)$ は χ_1, δ をふくみ困難である故，$B(n) \leqq \tau(n)$ (約数函数) に注意して，一歩ゆずり，

$$\sum_{n \leqq N} \tau(n) \Big(\sum_{\substack{d|n \\ d \leqq R}} \Theta'_d \Big)^2, \quad \Theta'_1 = 1$$

を考えることにする。この最適値をもとめると，$R \to \infty$ のとき

$$\Theta'_d (\log R)^2 \sim \mu(d) \Big(\log \frac{R}{d}\Big)^2$$

となっている。すなわち，$M(R)$ の第2 Riesz 平均

$$M_2(R) = \int_1^R M_1(y)\,dy/y,$$

従って又，'第2近似'

$$\left(M_2(R^{1+2\vartheta}) - 2M_2(R^{1+\vartheta}) + M_2(R) \right) \left((\log R^{1+2\vartheta})^2 - 2(\log R^{1+\vartheta})^2 + (\log R)^2 \right)^{-1}$$

を考えればよいのではないであろうか。こうして，これを発展させて，我々は次の結果を証明する。

補題5 (Motohashi)

$\vartheta>0$, $z>1$ として

$$\Lambda_d^{(k)}=\frac{1}{k!(\vartheta\log z)^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\Lambda_d^{(k,j)}$$

$$\Lambda_d^{(k,j)}=\begin{cases}\mu(d)\left(\log\dfrac{z^{1+j\vartheta}}{d}\right)^k & (d\leqq z^{1+j\vartheta}),\\ 0 & (d>z^{1+j\vartheta}).\end{cases}$$

とするとき

$$\Lambda_d^{(k)}=\mu(d),\quad d\leqq z.$$

且つ

$$\sum\tau_k(n)\Big(\sum_{d|n}\Lambda_d^{(k)}\Big)^2 n^{-\omega}=O_{\vartheta,k}(1)^{(*)}$$

が条件

$$\omega>1,\quad 1\ll(\omega-1)\log z$$

のもとに成立する。

まず $d\leqq z$ であれば

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\Lambda_d^{(k,j)}=\mu(d)\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\Big(\log\frac{z^{1+j\vartheta}}{d}\Big)^k$$

$$=\mu(d)\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}(\log z)^l(\log d)^{k-l}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}(1+j\vartheta)^l.$$

しかるによく知られているように,

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}j^l=\begin{cases}k! & (l=k),\\ 0 & (l<k).\end{cases}$$

(*) $$\tau_k(m)=\sum_{m=u_1u_2\cdots u_k}1$$

であるから，上記の和は $\mu(d)k!(\vartheta\log z)^k$ となり補題の前半は証明された。次に後半を証明するには，

$$D_j = \sum_m \tau_k(n)\Big(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(k,j)}\Big)^2 n^{-\omega} = O((\log z)^{2k})$$

$$j=0,1,2,\cdots,k$$

を示せば充分である。それにヌ，当然のことながら，

$$1 \ll (\omega-1)\log z \ll 1$$

と仮定してよかろう。結局，この条件下で，$j=0$ のときのみを考えればよいことになる。さて，

$$D_0 = \sum_{d_1,d_2} \frac{\Lambda_{d_1}^{(k,0)}\Lambda_{d_2}^{(k,0)}}{[d_1,d_2]^\omega} \sum_m \tau_k([d_1,d_2]m)m^{-\omega}.$$

$d=[d_1,d_2]$ は square-free としてよりから

$$\sum_m \tau_k(dm)m^{-\omega} = \prod_{p\nmid d}\Big(\sum_{m=0}^\infty \frac{\tau_k(p^m)}{p^{m\omega}}\Big)\prod_{p|d}\Big(\sum_{m=0}^\infty \frac{\tau_k(p^{m+1})}{p^{m\omega}}\Big)$$

$$= \prod_{p\nmid d}\Big(1-\frac{1}{p^\omega}\Big)^{-k}\prod_{p|d} p^\omega\Big(\Big(1-\frac{1}{p^\omega}\Big)^{-k}-1\Big)$$

$$= \zeta(\omega)^k \prod_{p|d} p^\omega\Big(1-\Big(1-\frac{1}{p^\omega}\Big)^k\Big).$$

すなわち，

$$D_0 = \zeta(\omega)^k \sum_{d_1,d_2} \Lambda_{d_1}^{(k,0)}\Lambda_{d_2}^{(k,0)} \prod_{p|d_1d_2}\Big(1-\Big(1-\frac{1}{p^\omega}\Big)^k\Big)$$

これを

(35) $$D_0 = \zeta(\omega)^k E$$

とおく。

Selbergの篩の方法で変形すれば

$$E = \sum_{d} \prod_{p\mid d} \left(\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{-k} - 1 \right)^{-1} \left\{ \sum_{d\mid u} \Lambda_u^{(k,0)} \prod_{p\mid u} \left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right) \right\}^2$$

$$= \sum_{d \leqq z} \prod_{p\mid d} \left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k} \left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right) \left\{ \sum_{\substack{u \leqq z/d \\ (u,d)=1}} \Lambda_{du}^{(k,0)} \prod_{p\mid u} \left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right) \right\}^2$$

となることが容易にわかる。これを

$$(36) \qquad E = \sum_{d \leqq z} \prod_{p\mid d} \left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k} \left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right) \left\{ E_d(z/d) \right\}^2$$

とおくことにする。すると,

$$E_d(x) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ (n,d)=1}} \mu(n) \left(\log \frac{x}{n}\right)^{k} \prod_{p\mid n} \left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right)$$

$$(37) \qquad = \frac{k!}{2\pi i} \int_{(2)} \left\{ \sum_{(n,d)=1} \frac{\mu(n)}{n^s} \prod_{p\mid n} \left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right) \right\} \frac{x^s}{s^{k+1}} \, ds$$

しかるに,

$$\sum_{(n,d)=1} \frac{\mu(n)}{n^s} \prod_{p\mid n} \left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right) = \prod_{p\nmid d} \left(1 - \frac{1}{p^s}\left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right)\right)$$

$$= \zeta(s+\omega)^{-k} \prod_{p\mid d} \left(1-\frac{1}{p^{s+\omega}}\right)^{-k} \prod_{p\nmid d} \left(1-\frac{1}{p^{s+\omega}}\right)^{k} \left(1-\frac{1}{p^s}\left(1-\left(1-\frac{1}{p^{\omega}}\right)^{k}\right)\right)$$

$$= \zeta(s+\omega)^{-k} \, Y_d(s).$$

すぐわかるように, $Y_d(s)$ は $\sigma \geqq -3/4$ で絶対収束し,

かつ

$$Y_d(s) \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k \qquad (\sigma \geqq -1/2)$$

が d について一様に成立する。(37)で積分路を

$$l: \quad \sigma = 1-\omega - c(\log(|t|+2))^{-1}, \quad (\underset{>0}{c}: 充分小)$$

にうつすまえに，次のことに注意する。

$$l \text{ 上で} \quad \zeta(s+\omega) \ll \log(|t|+2)$$

又 点 $s=0$ の近くで

$$\zeta(s+\omega)^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} O((\omega-1)^{k-j})\, s^j,$$

$$Y_d(s) = \sum_{j=0}^{\infty} O\left(\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k\right) s^j.$$

これより (37) から

$$E_d(x) = \frac{k!}{2\pi i}\,\mathrm{Res}\left\{\zeta(s+\omega)^{-k}\,Y_d(s)\,x^s\,s^{-k-1}\right\}_{s=0}$$

$$+ \frac{k!}{2\pi i}\int_l \zeta(s+\omega)^{-k}\,Y_d(s)\,x^s\,s^{-k-1}\,ds$$

$$\ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k \sum_{j=0}^{k}((\omega-1)\log x)^k$$

$$+ \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k \int_l (\log(|t|+2))^k \frac{x^{-\sigma}}{|s|^{k+1}}\,|ds|$$

ここで $|t| \leqq \exp((\log x)^{1/2})$, $|t| > \exp((\log x)^{1/2})$ とわけて

$$E_d(x) \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k \left\{ \sum_{j=0}^{k} ((\omega-1)\log x)^k + \exp(-c(\log x)^{1/2}) \right\}$$

従って $(\omega-1)\log z \ll 1$ と仮定しているのであるから，

$$E_d(z/d) \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^k.$$

これと，(36) から，

$$E \ll (\log z)^k$$

が直ちに従う。よって (35) から

$$D_0 \ll (\log z)^k \zeta(\omega)^k$$
$$\ll (\log z)^k (\omega-1)^{-k} \ll (\log z)^{2k}.$$

これで補題 5 の証明を終る。

補題の応用の一つとして，後で有用な次のことを示しておく。

補題 6.

$\widetilde{M}_r(s,\chi;\eta)$ は補題 3 の通りとして，$z \geq q_1^{\varepsilon}$，$R \leq z^{1+2\vartheta}$ であるとき，

$$\sum_{r \leq R} \mu^2(r) g(r) \left| \widetilde{M}_r(1,\chi_0;\Lambda^{(2)}) \right|^2 \ll (L(1+\delta,\chi_1)\log z)^{-1}.$$

補題 3 からわかるように，

$$\widetilde{M}_r(1,\chi_0;\Lambda^{(2)})=\frac{\mu(r)}{g(r)}\sum_{\substack{d\leqq z^{1+2\vartheta}\\ r|d}}\frac{\Lambda_d^{(2)}}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{\chi_1(p)}{p^\delta}-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right).$$

よって

$$\sum_{r\leqq R}\mu^2(r)g(r)\,|\,\widetilde{M}_r(1,\chi_0;\Lambda^{(2)})|^2$$

$$=\sum_{r\leqq R}\frac{\mu^2(r)}{g(r)}\left\{\sum_{\substack{d\leqq z^{1+2\vartheta}\\ r|d}}\frac{\Lambda_d^{(2)}}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{\chi_1(p)}{p^\delta}-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right)\right\}^2$$

$$\leqq\sum_{r}\frac{\mu^2(r)}{g(r)}\left\{\sum_{r|d}\frac{\Lambda_d^{(2)}}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{\chi_1(p)}{p^\delta}-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right)\right\}^2$$

（Selbergの方法を逆に用いて）

$$=\sum_{d_1,d_2}\frac{\Lambda_{d_1}^{(2)}\Lambda_{d_2}^{(2)}}{[d_1,d_2]}\prod_{p|d_1d_2}\left(1+\frac{\chi_1(p)}{p^\delta}-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}\right).$$

これをHとおくことにする。（18）にもどって

$$\sum_{m\leqq N}B(m)\Big(\sum_{d|m}\Lambda_d^{(2)}\Big)^2$$

$$=N\,L(1+\delta,\chi_1)H+O\big((N^{\frac{1}{2}}q_1^{\frac{1}{4}}z^{1+2\vartheta})^{1+\varepsilon}\big).$$

従って部分積分により，任意の $\omega>1$ に対して，

$$\sum_{m>z^b}B(m)\Big(\sum_{d|m}\Lambda_d^{(2)}\Big)^2m^{-\omega}$$

$$=L(1+\delta,\chi_1)H(\omega-1)^{-1}z^{-b(\omega-1)}+O\big(q_1^{\frac{1}{4}+\varepsilon}z^{1+2\vartheta-(\omega-\frac{1}{2})b+\varepsilon}\big).$$

そこで，bを充分大にとり，$B(m)\leqq\tau(m)$ に注意すれば，$\omega=1+(\log z)^{-1}$ ととることにより補題5により，

$$L(1+\delta,\chi_1)H(\omega-1)^{-1}z^{-b(\omega-1)}=O(1),$$

すなわち　$L(1+\delta,\chi_1)H\log z \ll 1$.　これは補題6の結果である。

更につぎのことをつけくわえておく。

補題7.

(22) における $G(R)$ について

$$G(R) \geqq (2\delta)^{-1}L(1+\delta,\chi_1)+O(q_1^{\frac{1}{4}+\varepsilon}R^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

更に

$$L(1+\delta,\chi_1) \gg \delta \gg q_1^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

$\delta \gg q_1^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ であることはよく知られているので，その他のことを証明する。

$$G(R)=\sum_{r\leqq R}\mu^2(r)g(r) \geqq R^{-2\delta}\sum_{r\leqq R}\mu^2(r)g(r)r^{2\delta}$$

所で

$$\sum_{r}\mu^2(r)g(r)r^{2\delta-s}=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{s-2\delta}}\frac{1+\frac{\chi_1(p)}{p^\delta}-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}}}{(p-1)(1-\frac{\chi_1(p)}{p^{1+\delta}})}\right)$$

$$=\zeta(s+1-2\delta)L(s+1-\delta,\chi_1)A(s).$$

ここに $A(s)$ は $\sigma>-1$ で絶対収束し，そこで有界である。従って，反転公式により（$A(2\delta)=1$ に注意して）

$$\sum_{r \leq R} \mu^2(r) g(r) r^{2\delta} = \frac{L(1+\delta, \chi_1)}{2\delta} R^{2\delta} + O(R^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} q_1^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$$

が (17) を通して得られる。これは G(R) の下からの評価をあたえる。又，この等式の左辺は明らかに 1 以上であるから，R を充分大きくとれば

$$\frac{L(1+\delta, \chi_1)}{2\delta} R^{2\delta} > 1/2$$

となる。しかるに R は q_1 の適当な巾にとれ，且つ $\delta \ll (\log Q)^{-1} \leq (\log q_1)^{-1}$ であるから これより $L(1+\delta, \chi_1) \gg \delta$ がしたがう。これで補題 7 の証明を終る。

§4. 定理 5 の証明.

以上を準備として Gallagher の素数定理の新証明をあたえる。しかし，ここでは，例外指標が存在する場合のみを考えることにする。例外指標が存在しない場合には序で注意したように，Selberg の定理 6 から証明がみちびかれるのであるが，その議論は以下のものと酷似しており，しかもより単純である。

さて 例外指標が存在する場合は，(3) (4) (5) から，線分

$$\sigma = \sigma_0 = 1 - \kappa (\log QT)^{-1}, \quad |t| \leq T = Q^5$$

の上で

(38) $$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\log Q)$$

が全ての原始指標 $\chi \pmod q$, $q \leqq Q$ に対して成立する。ここで

$$\sigma_0 = 1 - K(\log QT)^{-1} < 1 - \frac{K}{10}(\log Q)^{-1} \leqq 1 - \delta$$

であるから, $\widetilde{\psi}(x, \chi)$ の定義により

$$\widetilde{\psi}(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT}\left\{-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right\}\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x}{T}(\log Qx)^2\right)$$

と書けることも容易にわかる。次に Heilbromm - Gallagher のよく知られた変形を応用するのであるが, $\Lambda^{(2)}$ 従って ϑ, ε は補題 5 により定義されたものとして,

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{L'}{L}(s, \chi)\left(1 - F(s, \chi)\widetilde{M}_r(s, \chi; \Lambda^{(2)})\right)^2$$

$$-\Big\{2L'(s, \chi)L(s+\delta, \chi\chi_1)\widetilde{M}_r(s, \chi; \Lambda^{(2)})$$

$$- L(s, \chi)L'(s, \chi)L^2(s+\delta, \chi\chi_1)\widetilde{M}_r(s, \chi; \Lambda^{(2)})^2\Big\}$$

$$= -\frac{L'}{L}(s, \chi)U_r(s, \chi)^2 + V_r(s, \chi)$$

とおく。こうして,

$$\widetilde{\psi}(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT}\left\{-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right\}U_r(s, \chi)^2\frac{x^s}{s}ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT}V_r(s, \chi)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x}{T}(\log Qx)^2\right).$$

次に, この第2の積分において積分路を

$$\sigma = \sigma_1 = (\log x)^{-1}, \quad |t| \leqq T \ (= Q^5)$$

に変えるのであるが，その前に $U_r(s,\chi)$，$V_r(s,\chi)$ の評価をしておく必要がある。補題3及び $\Lambda^{(2)}$ の定義から，$0\leqq\sigma\leqq 1$ において

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{M}_r(s,\chi;\Lambda^{(2)})\\
&\ll g(r)^{-1}\sum_{d\leqq z^{1+2\vartheta}} d^{-\sigma}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p^{\delta}}+\frac{1}{p^{\sigma+\delta}}\right)\prod_{\substack{p\nmid d\\ p|r}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{p^{m\sigma}}\right)\\
&\ll g(r)^{-1}(rz)^{\varepsilon}\sum_{d\leqq z^{1+2\vartheta}} d^{-\sigma}\,\frac{(r,d)^{\sigma}}{r^{\sigma}}\\
&\ll \frac{(rz)^{\varepsilon}}{r^{\sigma}g(r)}\,z^{(1+2\vartheta)(1-\sigma)}
\end{aligned}
$$

よって (17) と組み合せて

$$U_r(s,\chi)\ll\frac{1}{r^{\sigma-\varepsilon}g(r)}\left(z^{1+2\vartheta}qq_1^{\frac{1}{2}}(|t|+1)\right)^{1-\sigma+\varepsilon},$$

$$V_r(s,\chi)\ll\frac{1}{r^{2\sigma-\varepsilon}g(r)^2}\left(z^{1+2\vartheta}qq_1^{\frac{1}{2}}(|t|+1)\right)^{2(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

が $\chi(\mathrm{mod}\ q)$，$|s-1|\geqq 1/2$，$0\leqq\sigma\leqq 1$ のときに成立する。ここで更に次のように各変数を定める。

$$q\leqq Q,\quad r\leqq R,\quad R=Q^{\frac{1}{2}+\varepsilon},\quad T=Q^5,\quad z=(Q^5R^4T^2)^{1+\varepsilon},$$

$$\vartheta=\varepsilon,\quad x/Q\leqq h\leqq x,\quad \log x\leqq(\log Q)^2$$

これより

(39)
$$U_r(s,\chi)\ll\frac{1}{r^{\sigma}g(r)}(Q^{17}T^6)^{\frac{1}{2}(1-\sigma)+\varepsilon}$$
$$V_r(s,\chi)\ll\frac{1}{(r^{\sigma}g(r))^2}(Q^{17}T^6)^{1-\sigma+\varepsilon}$$

が

$$0 \leqq \sigma \leqq \sigma_0 \ , \quad |t| \leqq T, \quad \chi \ (\mathrm{mod}\ q), \quad q \leqq Q, \quad r \leqq R$$

で成立している。さてこの $V_r(s,\chi)$ の評価から

$$\tilde{\psi}(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT}\left\{-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\}U_r(s,\chi)^2\frac{x^s}{s}\,ds$$

$$+ O\left(g(r)^{-2}(Q^{17}T^6)^{1+\varepsilon}\right) + O\left(\frac{xQ^\varepsilon}{(rg(r))^2T}\right)$$

ここで $(rg(r)) \ll r^\varepsilon$ を用いた。(38) により，

$$|\tilde{\psi}(x+h,\chi) - \tilde{\psi}(x,\chi)|$$

$$\ll h\log Q\exp\left(-K\frac{\log x}{\log QT}\right)\int_{-T}^{T}|U_r(\sigma_0+it,\chi)|^2\,dt$$

$$+ g(r)^{-2}(Q^{17}T^6)^{1+\varepsilon} + (rg(r))^{-2}T^{-1}Q^\varepsilon x.$$

この両辺に $\mu^2(r)g(r)$ を乗じて，$r \leqq R$, $(r,q)=1$ について和をとれば (23) (28) に注意して

$$K(q)G(R)\,|\tilde{\psi}(x+h,\chi) - \tilde{\psi}(x,\chi)|$$

$$\ll h\log Q\exp\left(-K\frac{\log x}{\log QT}\right)\sum_{\substack{r\leqq R\\(r,q)=1}}\mu^2(r)g(r)\int_{-T}^{T}|U_r(\sigma_0+it,\chi)|^2\,dt$$

$$+ (R^3Q^{17}T^6)^{1+\varepsilon} + RQ^\varepsilon T^{-1}x$$

更に $K(q)^{-1}$ を乗じて，χ 原始 $(\mathrm{mod}\ q)$, $q \leqq Q$ について加えれば

$$G(R)\sum_{q\leqq Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}|\tilde{\psi}(x+h,\chi) - \tilde{\psi}(x,\chi)|$$

$$\ll h\log Q\exp\left(-K\frac{\log x}{\log QT}\right)\sum_{\substack{q\leqq Q\\ r\leqq R\\(q,r)=1}}\frac{\mu^2(r)g(r)}{K(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)}\int_{-T}^{T}|U_r(\sigma_0+it,\chi)|^2\,dt$$

$$+ (R^3Q^{19}T^6)^{1+\varepsilon} + \chi R Q^{2+\varepsilon} T^{-1}.$$

さて，

$$I = \sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=1}} \frac{\mu^2(r)g(r)}{K(q)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)}^{*} \int_{-T}^{T} |U_r(\sigma_0+it,\chi)|^2 dt$$

とおく。これの評価には，零点密度理論でよく用いられる方法をつかう。すなわち，$U_r(s,\chi)$ の Mellin 変換をつかうのである。このために

$$X = (Q^3T^2)^5$$

とする。そして

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} U_r(s+w,\chi)\Gamma(w)X^{w}\, dw$$

$$= \sum_{n>1} \chi(n)B(n)\Psi_r(n)\left(\sum_{d|n}\Lambda_d^{(2)}\right)n^{-s}e^{-n/X}$$

$$= W_r^{(1)}(s,\chi)$$

とおく。積分路を $\mathrm{Re}(w) = -\sigma_0$ とすることにより，(39)に注意して

$$W_r^{(1)}(s,\chi) = E(\chi)L(1+\delta,\chi_1)\Gamma(1-s)X^{1-s}\widetilde{M}_r(1,\chi;\Lambda^{(2)})K(q)$$

$$+ U_r(s,\chi) + O\left(g(r)^{-1}X^{-\sigma_0}(Q^{17}T^6)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

$$= W_r^{(2)}(s,\chi) + U_r(s,\chi) + O(W_r^{(3)}(s,\chi))$$

とおく。すると，

$$I \ll I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}.$$

$I^{(j)}$ は I の定義における $U_r(s,\chi)$ を $W_r^{(j)}(s,\chi)$ でおきかえたものである。

まず $I^{(1)}$ については，$\Lambda_d^{(2)} = \mu(d)$ $(d \leqq z)$ であるから，補題1により

$$I^{(1)} = \sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=1}} \frac{\mu^2(r) g(r)}{K(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\ q)} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{n \geqq z} \chi(n) B(n) \Psi_r(n) \Big(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(2)}\Big) n^{-\sigma_0 - it} e^{-\frac{n}{X}} \Big|^2 dt$$

$$\ll \sum_{n \geqq z} \left(L(1+\delta, \chi_1) n + T (QR)^{2+\varepsilon} n^{1/2+\varepsilon} \right) \Big(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(2)}\Big)^2 B(n) n^{-2\sigma_0} e^{-2\frac{n}{X}}$$

しかるに補題7により

$$L(1+\delta, \chi_1) n + T (QR)^{2+\varepsilon} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

$$\ll L(1+\delta, \chi_1) n \left(1 + \frac{Q^{\frac{5}{2}+\varepsilon} R^{2+\varepsilon}}{\sqrt{n}} n^{\varepsilon} T \right)$$

である故，前に仮定したように $z = (Q^5 R^4 T^2)^{1+\varepsilon}$ であれば

$$I^{(1)} \ll L(1+\delta, \chi_1) \sum_{n} B(n) \Big(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(2)}\Big)^2 n^{1-2\sigma_0} e^{-2\frac{n}{X}}$$

$$\ll L(1+\delta, \chi_1) \sum_{n \leqq X^2} B(n) \Big(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(2)}\Big)^2 n^{1-2\sigma_0} e^{-2\frac{n}{X}}$$

$$\ll L(1+\delta, \chi_1) \sum_{n \leqq X^2} B(n) \Big(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(2)}\Big)^2 n^{-1-(\log Q)^{-1}}$$

この最後の不等式は $n \leqq X^2$ であるとき $n^{1-2\sigma_0} \ll n^{-1-(\log Q)^{-1}}$

であることによるのである。ここで更に $B(n) \leqq \tau(n)$ を注意して，結局，補題5により，

$$I^{(1)} \ll L(1+\delta, \chi_1) \sum_{n} \tau(n) \Big(\sum_{d|n} \Lambda_d^{(2)}\Big)^2 n^{-1-(\log Q)^{-1}}$$

$$\ll L(1+\delta, \chi_1) \quad (\because \log Q \gg \log z).$$

次に $I^{(2)}$ については，

$$I^{(2)} \ll L(1+\delta, \chi_1)^2 \sum_{r \leqq R} \mu^2(r) g(r) \int_{-T}^{T} |\Gamma(1-\sigma_0+it) Z^{1-\sigma_0+it}|^2 dt \times$$

$$\times |M_r(1, \chi_0 ; \Lambda^{(2)})|^2$$

しかるに

$$\int_{-T}^{T} |\Gamma(1-\sigma_0+it)|^2 dt \ll (1-\sigma_0)^{-1} \ll \log Q$$

であるから，

$$I^{(2)} \ll L(1+\delta, \chi_1)^2 \log Q \sum_{r \leqq R} \mu^2(r) g(r) |M_r(1, \chi_0 ; \Lambda^{(2)})|^2$$

ここで明らかに補題6の条件がみたされている故

$$I^{(2)} \ll L(1+\delta, \chi_1)^2 \log Q \quad (L(1+\delta, \chi_1) \log z)^{-1}$$

$$\ll L(1+\delta, \chi_1).$$

又 $\qquad W_r^{(3)}(s, \chi) \ll (Q^{17} T^6)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} g(r)^{-1} X^{-1}$

より，

$$I^{(3)} \ll (R Q^{19} T^7)^{1+\varepsilon} X^{-2} \ll Q^{-1} \ll L(1+\delta, \chi_1)$$

以上から

$$I \ll L(1+\delta, \chi_1).$$

すなわち,

$$\sum_{q \leqq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} |\tilde{\psi}(x+h, \chi) - \tilde{\psi}(x, \chi)|$$

$$\ll h \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) L(1+\delta, \chi_1) G(R)^{-1}$$

$$+ (R^3 Q^{19} T^6)^{1+\varepsilon} + x R Q^{2+\varepsilon} T^{-1}.$$

補題7により

$$\sum_{q \leqq Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} |\tilde{\psi}(x+h, \chi) - \tilde{\psi}(x, \chi)|$$

$$\ll h \delta \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) + (Q^{\frac{41}{2}} T^6)^{1+\varepsilon} + x Q^{\frac{5}{2}+\varepsilon} T^{-1}$$

$$\ll h \delta \log Q \exp\left(-\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) \Big\{ 1 + (h\delta)^{-1} \exp\left(\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) (Q^{\frac{41}{2}} T^6)^{1+\varepsilon}$$

$$+ (Th\delta)^{-1} x \exp\left(\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) Q^{\frac{5}{2}+\varepsilon} \Big\}$$

さて, $T = Q^5$ であるから

$$(h\delta)^{-1} \exp\left(\kappa \frac{\log x}{\log QT}\right) (Q^{\frac{41}{2}} T^6)^{1+\varepsilon}$$

$$\ll \frac{1}{h} Q^{51+\varepsilon} \exp\left(\frac{\kappa}{6} \frac{\log x}{\log Q}\right)$$

$$\ll \frac{1}{h} Q^{52*} \quad (\because (\log x)/\log Q \leqq \log Q)$$

すなわち　$h \geqq Q^{52}$　が要求される。

一方

$$\frac{x}{Th\delta}\exp\left(K\frac{\log x}{\log Q}\right)Q^{\frac{5}{2}+\varepsilon}$$

$$\ll \frac{x}{h}Q^{-2+\frac{K}{6}+\varepsilon} \ll Q^{-1+\frac{K}{6}+\varepsilon} \qquad (\because\ x/h \leqq Q)$$

以上から

$$x \geqq Q^{53}$$

とすれば

$$\sum_{q\leqq Q}\ \sum_{\chi(\mathrm{mod}\, q)}^{*} |\tilde{\Psi}(x+h,\chi)-\tilde{\Psi}(x,\chi)|$$

$$\ll h\delta\log Q\exp\left(-\frac{K}{6}\frac{\log x}{\log Q}\right)$$

これで定理5の証明を終る。

ー付記ー

第2及び3節でのべたことは，$B(n)$のかわりに，乗法的函数$f(n)$について一般化できるのであるが，ここでは，簡単のために，$f(n)$に次の条件をつけることにする。

(I) 全てのnについて　$f(n)\geqq 0$，　$f(n)\ll \tau_k(n)$.

(II) $F_p(s)=\sum_{m=0}^{\infty} f(p^m)p^{-ms}$，　$F_p(1)=F_p$　とおくとき，
全てのpについて　$F_p-1\geqq cp^{-\alpha}$　となる常数c，
$\alpha>0$が存在する。

(III) 全てのp，及び$\alpha>0$について，

$$F_p(s)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} f_1(p^m)p^{-ms}$$

となる乗法的函数 f_1 が存在する。

(IV) 量 $\mathfrak{F}$, $D>0$, $D^{\varepsilon} \gg \mathfrak{F}$, が存在し、任意の $\chi(\bmod q)$ に対して

$$\sum_{n \leq y} \chi(n)f(n) = y\mathfrak{F}K_f(q)E(\chi) + O(Dy^{\beta}q^{\gamma})$$

となる $\beta, \gamma \geq 0$ が存在する。但しここに $K_f(q) = \prod_{p|q} F_p^{-1}$

これらの条件（とくに(III)）はゆるめることができるが、ここではくわしいことは示さないことにする。

定理7に対応して

定理 7A

f について条件 (I)-(IV)を仮定する。そして

$$g_f(r) = \prod_{p|r}(F_p - 1^{-1}),\quad \Psi_r(n;f) = \mu((r,n))g_f((r,n))^{-1}$$

とおく。このとき、$M \gg N$ であれば、

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \leq R \\ (q,r)=1}} \frac{\mu^2(r)g_f(r)}{K_f(q)} \sum_{\chi(\bmod q)}^{*} \left| \sum_{M}^{M+N} a_n \chi(n) f(n)^{1/2} \Psi_r(n;f) \right|^2$$

$$\leq (\mathfrak{F}N + O_{\varepsilon}(Y_f(M;Q,R))) \sum_{M}^{M+N} |a_n|^2.$$

$$Y_f(M;Q,R) = \{DM^{\beta}Q^{2(1+\gamma)}(R^{\alpha-2\beta+1} + R^{\frac{\alpha}{2}-\beta+1})\}^{1+\varepsilon}$$

参考文献

[B] E. Bombieri, Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. Soc. Math. France, Astérisque no. 18 (1974).

[F] E. Fogels, On the zeros of L-functions. Acta Arith., 11, 67–96 (1965).

[G] P. X. Gallagher, A large sieve density estimate near $\sigma = 1$. Inventiones Math., 11, 329–339 (1970).

[K] S. Knapowski, On Linnik's theorem concerning exceptional L-zeros. Publ. Math. Debrecen 9, 168–178 (1962).

[L_1] U. V. Linnik, On the least prime in an arithmetic progression. I. The basic theorem. Rec. Math., 15, 139–178 (1944).

[L_2] ――――, ―― II. The Deuring-Heilbronn phenomenon. ibid. 347–368.

[P] K. Pracher, Primzahlverteilung. Springer (1957).

[S] A. Selberg, Remarks on sieves. Proc. 1972 Number Theory Conf. Boulder, 205–216.

[T] P. Turán, On a density theorem of Yu. V. Linnik. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 6, 165–179 (1961).

（1977年3月9日 記）